Zadania do rozwiązania przy tablicy 4–5 grudnia

1 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dla jakich a, b, c ta funkcja jest przekształceniem liniowym w sensie algebry liniowej?

2 Dane $a, b \in \mathbb{R}$. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x, y, z) = (x + y + z + a, x + 2y + 3z + b) .$$

Dla jakiego a, b jest to przekształcenie liniowe w sensie algebry liniowej?

3 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z) .$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu.

4 Znaleźć wzór na symetrię $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ przeprowadzającą wektor $(1, 1, 1)$ na $(-1, -1, -1)$. Znaleźć obraz wektora $(4, 2, 1)$.

5 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć wzór na f. Znaleźć $f(1, 1)$.

6 Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$f(1, 1, 1) = (6, 15, 21) , \qquad f(1, 2, 3) = (14, 32, 46) , \qquad f(1, -1, 1) = (2, 5, 7)$$

Znaleźć obrazy wektorów standardowej bazy. Znaleźć jądro i obraz.

7 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \to V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej, np $V = K[x]$) takie, że
a) $ker(f) = 0$, ale funkcja nie jest "na".
b) funkcja jest "na", ale $ker(f) \neq \{0\}$.