Zadania do rozwiązania przy tablicy 27–28 listopada

1 Nad ciałem $\mathbb{Z}_{17}$ dany jest układ równań liniowych, którego macierz rozszerzona wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ s & 2 & -1 & 4 & | & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & | & t \end{bmatrix}$$

W zależności od $s, t \in \mathbb{Z}_{17}$ orzec ile jest rozwiązań tego układu.

2 a) Niech $a_1,\ a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Definiujemy podprzestrzenie liniowe $\mathbb{R}^n$

$$W_1 = lin\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}\,, \qquad W_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}\,.$$

Czy $V = W_1 \oplus W_2$?
b) Czy jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ ciałem $\mathbb{C}$ to odpowiedź będzie taka sama?

3 Niech

$$W_1 = \begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 & = \ 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = \ 0 \end{cases} \qquad W_2 = \begin{cases} x_1 \ - x_2 \ + x_3 - x_4 & = \ 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = \ 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^4$. Sprawdzić czy $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$. Czy wektor $\alpha = (6, -9, -4, -1)$ można zapisać jako $\alpha_1 + \alpha_2$, dla pewnych $\alpha_1 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$.

4 Załóżmy, że V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Wykazać, że

$$(V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3) + (V_3 \cap V_1) \subset (V_1 + V_2) \cap (V_2 + V_3) \cap (V_3 + V_1).$$

Podać przykład, w którym powyższej inkluzji nie można zastąpić równością.

5 Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ będzie zbiorem funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech

$$V_1 = \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)\} \qquad \text{tzn funkcje parzyste,}$$

$$V_2 = \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = -f(x)\} \qquad \text{tzn funkcje nieparzyste.}$$

Wykazać, że $V = V_1 \oplus V_2$.

6 Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia 5. Definiujemy podprzestrzeń $\mathbb{C}^5$

$$V = lin\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\}.$$

Wskazać podprzestrzeń $W \subset \mathbb{C}^5$ (podając jej bazę) taką, że $\mathbb{C}^5 = V \oplus W$.