Zadania do rozwiązania przy tablicy 20–21 listopada

1 *(Zadanie nieomówione ostatnim razem, rozszerzone o drugi punkt.)*
a) Rozważamy przestrzeń liniową $\mathbb{R}^\infty$ ciągów o wyrazach rzeczywistych, które utożsamiamy z funkcjami $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcję

$$f_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_\lambda(n) = n^\lambda\,.$$

Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest liniowo niezależny?
b) Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest bazą $\mathbb{R}^\infty$.

2 Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

Można wykonywać operacje elementarne na wierszach i kolumnach. Postarać się zrobić jak najmniejszą ilość operacji. Unikać ułamków.

3 Niech $a, b, c, d, e \in K$ będą parami różnymi elementami ciała K. Udowodnić, że macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{pmatrix}$$

ma rząd 5.

4 Przypuśćmy, że macierz A ma m wierszy oraz rząd A jest równy r. Niech $s \leqslant m$. Wykazać, że wybierając z A dowolne s wierszy otrzymujemy macierz o rzędzie nie mniejszym niż $r + s - m$.

5 Dane są dwie macierze A, B takiego samego rozmiaru. Wykazać, że rząd $A + B$ jest nie większy niż suma rzędów A i B

$$r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)\,.$$

Podać przykład, gdy zachodzi równość oraz inne „ciekawe” przykłady, gdy mamy ostrą nierówność.

6 Niech $A = \{a_{i,j}\}_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ będzie macierzą rozmiaru $m \times n$. Załóżmy, że rząd macierzy jest równy r. Wykazać, można wykreślić z A $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn, a to co zostanie dalej będzie miało rząd r. Innymi słowy: istnieją takie liczby $i_1,\ i_2, \ldots,\ i_r$ oraz $j_1,\ j_2, \ldots,\ j_r$, że macierz

$$B = \{a_{i_a, j_b}\}_{1 \leqslant a \leqslant r,\ 1 \leqslant b \leqslant r}$$

ma rząd r.