Zadania do rozwiązania przy tablicy 13–14 listopada

1 Niech $V \subset \mathbb{R}^7$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniami

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 = 0 \end{cases}$$

Znajdź równanie opisujące poprzestrzeń rozpiętą przez V i wektor $(2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$.

2 Niech x, y, z, s, t będą współrzędnymi w przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Znalźć bazę przestrzeni liniowej opisanej przez równania:

$$\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z + \lambda s + t = 0 \end{cases}$$

zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.
a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ α_1, α_2, $\alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.
c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2? Znaleźć tę kombinację.

4 Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.
b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

5 Dane są dwie podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x + 2y - 3w = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}, \qquad W = \begin{cases} 3x + y - z - 3w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami

$$V + W = \{v + w \in \mathbb{R}^4 \mid v \in V, \quad w \in W\}.$$

Znaleźć wymiary przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

6 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbb{R}^4$. Jeśli tak, to podać przykład takiego wektora.

7 Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subset K^n$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Niech $V \subset K^n$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n - k$. Udowodnić, że układ $\mathcal{A}$ można dopełnić do bazy wektorami z V wtedy i tylko wtedy gdy $V \cap \mathit{lin}\, \mathcal{A} = \{0\}$.

8 Rozważamy przestrzeń liniową ciągów o wyrazach rzeczywistych, które utożsamiamy z funkcjami $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcję

$$f_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad f_\lambda(n) = n^\lambda.$$

Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest liniowo niezależny?

9 (*) Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Udowodnić, że wyrażenie

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \ldots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \ldots (p^k - p^{k-1})}$$

jest wielomianem zmiennej p.