Zadania do rozwiązania przy tablicy 6-7 listopada

1 Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?

a) $(1,1,0),\ (1,2,-3),\ (2,4,1)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(1,2,1,1),\ (2,-1,-1,4),\ (5,5,2,7)$ w $\mathbb{R}^4$;

2 Wyznaczyć wszystkie watrości parametru a, tak by układ $(a,1,1)$, $(1,a,1)$, $(1,1,a) \in \mathbb{R}^3$ był liniowo niezależny.

3 Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?

a) $(3,1,1),\ (1,0,2),\ (0,3,2)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(3,1,0,-2),\ (5,2,2,-1),\ (1,-1,0,-2),\ (5,1,1,-3),\ (-7,-3,1,5),\ (4,1,-2,-5)$ w $\mathbb{R}^4$;

4 Niech $V \subset \mathbb{R}[x]$ będzie podprzestrzenią liniową składającą się z wielomianów stopnia $\leqslant 10$ oraz spełniających

$$f(1) = f(2) = 0\,.$$

Znaleźć układ wektorów (tzn wielomianów) rozpinający V.

5 Wykazać, że jeśli w ciele $\mathbb{F}$ zachodzi $1+1 \neq 0$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ w przestrzeni liniowej nad $\mathbb{F}$ mamy $lin(v+w, v-w) = lin(v,w)$.

6 Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\beta_1 = (1,-1,1)$, $\beta_2 = (4,1,2)$. Opisać równaniami $lin(\alpha_1,\alpha_2) \cap lin(\beta_1,\beta_2)$.

7 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Niech V będzie najmniejszą popdprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ zawierającą W oraz wektor $(1,1,1,2)$. Znaleźć układ rozpinający V. Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej V.

8 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in lin(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k,\ \beta$ jest liniowo zależny.