Zadania do rozwiązania przy tablicy 23-24 października

1 Dla liczby naturalnej k definiujemy liczbę zespoloną $z_k = \cos(\frac{\pi k}{6}) + i\ \sin(\frac{\pi k}{6})$. Dla jakich $k \leqslant 12$ istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $z_k^m = z_1$?

2 Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić wzór

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(1+n)x}{2(1-\cos x)}$$

Wskazówka: Zastąpić $\sin x$ liczbą zespoloną i skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego.

3 Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\{z \in \mathbb{C}\ :\ Re((z+1+i)^4) \geqslant 0\ \}$$

4 Rozłożyć wielomian $f(x)$ na iloczyn wielomianów stopni $\leqslant 2$ o współczynnikach rzeczywistych.
a) $f(x) = x^7 + 8x^4 + 4x^3 + 32$
b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$
Odp: $(x^2 - 2\cos(\frac{2}{9}\pi)x + 1)(x^2 - 2\cos(\frac{4}{9}\pi)x + 1)(x^2 - 2\cos(\frac{8}{9}\pi)x + 1)$
c) $f(x) = x^5 - 1$

5 Czy wielomian $x^4 - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia $\leqslant 2$?

6 Czy wielomian $x^9 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$ da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia $\leqslant 2$?

7 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 38x + 26 = 0$ wiedząc, że jednym z rozwiązań jest $x = 1 + i$