Zadania do rozwiązania przy tablicy 22 stycznia

1 Niech A bedzie macierzą antysymetryczną, tzn $A^T = -A$ rozmairu $n \times n$. Wykazać, że jeśli n jest nieparzyste, to $\det(A) = 0$. Przypuśćmy, że $n = 4$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$$

Wykazać, że $\det(A) \geqslant 0$ i jest kwadratem liczby całkowitej (przedstawić $\det(A)$ jako kwadrat pewnego wyrażenia zależnego zależnego od a, b, c, d, e, f).

2 Niech A i B będą macierzami kwadratowymi $n \times n$. Wskazać, jak za pomocą elementarnych operacji na wierszach można otrzymać macierz $\begin{bmatrix} A & -I \\ AB & 0 \end{bmatrix}$ z macierzy $\begin{bmatrix} A & -I \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Wywnioskować twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu.

3 Niech $A,\ B$ będą kwadratowymi macierzami takimi, że $AB = BA$, $A^k = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz B jest odwracalna. Udowodnić, ż $A + B$ jest odwracalna. Czy założenie, że $AB = BA$ jest konieczne?

4 Niech $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Przypuśćmy, że macierz kwadratowa A spełnia tożsamość $(A - aI)(A - bI) = 0$. Udowodnić, że A jest odwracalna. Dla $a = 1$, $b = 7$ wskazać A^{-1}.

5 Niech A będzie kwadratową macierzą $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych bądź zespolonych. Udowodnić, że szereg

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} A^k$$

jest zbieżny.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 23 stycznia

6 a) Obliczyć $\exp(A)$ dla $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ i $A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$.
b) Załóżmy A i B są kwadratowymi macierzami $n \times n$, oraz $AB = BA$. Udowodnić, że

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

c) Niech C będzie macirzą odwracalną. Udowodnić, że $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A) C^{-1}$.

7 Definiujemy ślad macierzy $tr(A)$ jako sumę wyrazów na przekątnej. Udowodnić $\det(\exp(A)) = e^{tr(A)}$. Wskazówka: sprawdzić ten wzór dla macierzy górnotrójkątnych.

8 Niech N będzie macierzą nilpotentną, tzn taką, że istnieje $k \in N$ takie, że $N^k = 0$. Znaleźć macierz A taką, że $\exp(A) = I + N$.