Zadania do rozwiązania przy tablicy 8 stycznia

1 Przedstawić macierz $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

Przypomnienie: macierze operacji elementarnych 2×2 to

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ dla } a \in \mathbb{K} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szukane przedstawienie macierzy uzyskać stosując znane (i lubiane) operacje elementarne na macierzach.
Czy każdą macierz rozmiaru 2×2 można przedstawić jako iloczyn macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dla } a \in \mathbb{K} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

2 Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. spełniającym $\varphi^2 = \varphi$. Niech $\psi = \mathrm{id}_V - \varphi$. Udowodnić, że $\psi^2 = \psi$. Udowodnić, że $\varphi - \psi$ jest izomorfizmem i znaleźć $(\varphi - \psi)^{-1}$.

3 Wskazać przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające dwa warunki:

- $\mathrm{im}(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
- $\mathrm{im}(\varphi^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ x - y + 2z = 0\}$.

4 Wskazać przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki

$$1)\ \ (-1, 2, 1) \in \ker(\varphi), \qquad 2)\ \ \mathrm{im}(\varphi) = lin\{(1, 1, 2)\}, \qquad 3)\ \ \varphi^3 = 0.$$

Wykazać, że przekształcenie φ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\varphi^2 = 0$ oraz $\dim(ker(\varphi)) = 2$.

5 Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n oraz $\varphi : V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $\varphi^m = 0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że $\psi^n = 0$.
Wskazówka: rozpatrzeć ciąg podprzestrzeni $V_k = \mathrm{im}(\varphi^k)$. Udowodnić, że jeśli $V_k = V_{k+1}$ to $V_k = V_r$ dla $r \geqslant k$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 9 stycznia

Macierz przejścia (zamiany współrzędnych) od bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V: *macierz identyczności V w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ (wektory $\mathcal{A}$ wyrażamy jako kombinacje liniowe wektorów $\mathcal{B}$ i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).*

6 Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1),\ (2, 1, 3),\ (1, 0, 5)\}$ i $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x+2y, y+3z)$. Znaleźć $M(\varphi)^{st}_{\mathcal{A}}$, t.j. macierz przekształcenia φ z bazy $\mathcal{A}$ do bazy standardowej. Ponadto niech $\mathcal{B} = \{(1, 2),\ (4, 1)\}$. Znaleźć macierz przejścia z bazy standardowej do $\mathcal{B}$ oraz $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

Część b) To samo dla: $\mathcal{A} = \{(1, 2),\ (3, 1)\}$. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (1, 4, 9)\}$ oraz $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$.

7 (*Zadanie z kolokwium 2016 r.*) Niech

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 1, 0, 0), \quad \alpha_4 = (1, 0, 0, 0),$$

oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym

$$\ker(\varphi) = lin(\alpha_1, \alpha_4), \qquad \varphi(\alpha_2) = \alpha_1, \qquad \varphi(\alpha_3) = \alpha_2 .$$

Znaleźć: $M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$, $M(\varphi)^{st}_{st}$, oraz rząd przekształcenia φ^k dla k = 1, 2, 3.

8 Niech V_1, V_2, W będą przestrzeniami liniowymi oraz $L(V_i, W)$ przestrzenią przekształceń liniowych, $i = 1, 2$. Dla przekształcenia liniowego $\varphi : V_1 \to V_2$ definiujemy $\theta_\varphi : L(V_2, W) \to L(V_1, W)$ wzorem $\theta(\psi) = \psi \circ \varphi$. Udowodnić, że jeśli φ jest izomorfizmen, to θ_φ jest izomorfizmem. Czy z tego, że θ_φ jest izomorfizmem wynika, że φ jest izomorfizmem?

Wykorzystać charakteryzację izomorfizmów: [Kategoryjna definicja[1].] *Przekształcenie $\varphi : V_1 \to V_2$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\rho : V_2 \to V_1$ takie, że $\varphi \circ \rho = \mathrm{id}_{V_2}$ i $\rho \circ \varphi = \mathrm{id}_{V_1}$.*

[1] Kategoryjna – czyli bez użycia wektorów, mająca zastosowanie nie tylko w algebrze liniowej.