Zadania do rozwiązania przy tablicy 18 grudnia

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$.

1 Niech $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

2 Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3 Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X .$$

4 Dla $a, t \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} a & t & 0 \\ 0 & a & t \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

5

(i) Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

(ii) Wskazać macierze kwadratowe 2×2 takie, że $AB \neq 0$, ale $BA = 0$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 19 grudnia

6 Znaleźć X rozmiaru 2×2 spełniające równanie

$$a)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7 Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia $\phi^2 = Id$, to istnieje baza w której przekształcenie ma macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

(diagonalna macierz z 1 i -1 na przekątnej).

8 Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$