Zadania do rozwiązania przy tablicy 11 grudnia

Przypomnienie z wykładu: Przekształcenie f jest izomorfizmem, jeśli jest monomorfizmem i epimorfizmem, lub równoważnie, jeśli $\ker(f) = 0$ i obraz jest równy przeciwdziedzinie.

1 Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia 3. Funkcja $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ zadana wzorem

$$f((x, y, z)) = (x + \xi y + \xi^2 z, \xi^2 x + y + \xi z, \xi x + \xi^2 y + z)\,.$$

Wskazać bazy jądra i obrazu f.

2 Wskazać przykład izomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takiego, że $f((0, i, 1)) = (1, 1, 1 + i)$.

3 Dany jest parametr $r \in \mathbb{R}$ Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 - x_2 + rx_3 + 5x_4\ ,\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + rx_4\ ,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4\ ,\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4)\,.$$

Dla jakiego r ta funkcja jest izomorfizmem.

4 Definiujemy funkcję określoną na przestrzeni wielomianów:

$$\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]\,.$$

Dla $f \in \mathbb{R}[x]$ niech

$$\phi(f)(x) = 2f(x) - f(x - 1) - f(x + 1)\,.$$

Znaleźć $ker(\phi)$ i $im(\phi)$.

5 Niech f będzie niezerową funkcją liniową $f : V \to \mathbb{K}$ oraz $v \in V$ wektorem, takim że $f(v) \neq 0$. Wykazać, że $V = ker(f) \oplus lin\{v\}$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 12 grudnia

6 Dane dwie podprzestrzenie liniowe $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2 < \infty$. Czy istnieje taka funkcja liniowa $f : V \to V$będąca izomorfizmem, że $f(W_1) = W_2$?
(Rozpatrzeć osobno przypadek $\dim V < \infty$ i $\dim V = \infty$.

7 Niech $f : V \to W$ i $g : W \to V$ będą przekształceniami liniowymi. Załóżmy, że $f \circ g = id_W$.
— Czy f i g są izomorfizmami?
— Czy któraś z tych funkcji jest monomorfizmem?
— Czy któraś z tych funkcji jest epimorfizmem?
— Przypuśćmy, że $V = W$. Jaka będzie odpowiedź na powyższe pytania?

8 Dane są trzy funkcje liniowe $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^5$. Czy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^{11}$ taki, że

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha)\,?$$

(Postarać się uogólnić ten przykład na wyższe wymiary.)