Rozwiązanie Zadania 4

Mateusz Lowiel

Niech $a \in E$ będzie leżało nad $xH \in G/H$. Wtedy $x_x^{-1} : E_{xH} \to E_{eH}$ jest liniowe i definiujemy $\varphi : E \to G \times^H E_{eH}$ wzorem
$$\varphi(a) = [x, x_x^{-1}(a)].$$
Jeśli $yH = xH$, czyli $y = xh$ dla pewnego $h \in H$, to $y^{-1} = h^{-1}x^{-1}$ i wówczas

$$[y, y_y^{-1}(a)] = [xh, (h^{-1}x^{-1})_y(a)] = [x, h\left(h_e^{-1}(x_y^{-1})(a)\right)] = [x, x_x^{-1}(a)],$$

oczywiście $g_y = g_x$, ponieważ $yH = xH$, czyli definicja ta nie zależy od wyboru reprezentanta warstwy xH. Liniowość g_x dla każdego $g \in G, xH \in G/H$ zapewnia, że jest to przekształcenie wiązek wektorowych.

W drugą stronę, przekształcenie $\psi : G \times^H E_{eH} \to E$ definiujemy poprzez działanie G:

$$[g, a] \mapsto g_e(a) \in E_{gH}.$$

Jeśli $h \in H$, to mamy

$$[gh, a] \mapsto (gh)_e(a) = g_e(h_e(a)) = \psi([g, h_e(a)]),$$

czyli ψ nie zależy od reprezentanta elementu z $G \times^H E_{eH}$. Odwzorowania φ, ψ są oczywiście swoimi odwrotnościami.