Rozwiązanie Zadania 6

Mateusz Lowiel

Niech $i \in \{0, \dots, n\}$ będzie indeksem takim, że $w_i = \min(w_0, \dots, w_n)$, wówczas bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\mathbb{C}^\times$ działa na $\mathbb{P}^n$ poprzez wagi $w_0 - w_i, \dots, w_n - w_i$, gdyż dla $t \in \mathbb{C}^\times$ zachodzi

$$[t^{w_0} z_0 : \dots : t^{w_n} z_n] = [t^{w_0 - w_i} z_0 : \dots : t^{w_n - w_i} z_n].$$

Innymi słowy, bez straty ogólności możemy przyjąć $w_k \geq 0$ dla każdego k. Możemy przyjąć też $w_i \leq w_{i+1}$ przenumerowując współrzędne. Wówczas punkty stałe opisuje następujący zbiór:

$$(\mathbb{P}^n)^{\mathbb{C}^\times} = \bigcup_{k=0}^{n} \{[z_0 : \dots : z_n] : z_i = 0 \text{ lub } w_i = w_k\} = \{[z_0 : \dots : z_n] : \exists k \;\; w_i = w_k \text{ lub } z_i = 0\}.$$

Zawieranie $\supseteq$ jest oczywiste, punkty na których $\mathbb{C}^\times$ działa z tą samą wagą są stałe, w drugą stronę, gdyby punkt stały $p \in \mathbb{P}^n$ miał niezerowe współrzędne dla dwóch różnych wag, to w oczywisty sposób nie może być stały – dzieląc przez którąkolwiek z tych wag torus trzyma jedną niezerową współrzędną zaś zmienia drugą. Poprzez $X_k \subseteq (\mathbb{P}^n)^{\mathbb{C}^\times}$ oznaczymy zbiór wszystkich punktów takich, że $\mathbb{C}^\times$ działa z jedną wagą, czyli sumę wszystkich zbiorów, które sumujemy we wzorze na górze, dla których wagi są te same i są równe w_k, przy czym k jest minimalnym indeksem, dla którego waga to w_k. Na przykładu $w = (0, 1, 1, 2)$ daje zbiory X_0, X_1, X_3. Zbiory te stanowią składowe spójności $(\mathbb{P}^n)^{\mathbb{C}^\times}$ – wszystkie X_k są zadane równaniami posatci $z_i = 0$ dla wybranych i (zerujemy wszystkie z_i, które mają inną wagę niż w_k), więc są domknięte oraz przecinają się pusto (w przecięciu leżałyby elementy o niezerowych współrzędnych odpowiadających różnym wagom, więc nie byłyby to punkty stałe), zatem są składowymi spójności (jest ich skończenie wiele, więc każdy z nich jest od razu otwarto-domknięty). Dla punktu $p = [z_0 : \dots : z_n]$ mamy

$$\lim_{t \to 0} t \cdot p = [0 : \dots : 0 : z_i : \dots : z_j : 0 : \dots : 0],$$

gdzie i jest indeksem minimalnego niezerowego wyrazu w p oraz j jest maksymalnym indeksem takim, że $w_j = w_i$, czyli tak naprawde nasz punkt p wyglądał jako $p = [0 : \dots : 0 : z_i : \dots : z_n]$. Powiedzmy, że mamy (pełny) podciąg równych wag $w_k = \dots = w_{k+m}$, wtedy

$$\mathscr{C}_k = \{p \in \mathbb{P}^n : \lim_{t \to 0} t \cdot p \in X_k\} = \bigcup_{i=0}^{m} \{[0 : \dots : 0 : z_{k+i} : \dots : z_n] : z_{k+i} \neq 0\} \cong \mathbb{P}^m \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n-m-k}.$$

Na poziomie zbiorów, $\mathscr{C}_k$ odpowiada tym punktom, dla których $(z_k, \dots, z_{k+m})$ jest niezerowy. Cała komórka $\mathscr{C}_k$ leży w $\mathbb{P}^{n-k} \subseteq \mathbb{P}^n$ i w tej mniejszej przestrzeni rzutowej warunek, że "pierwsze" $m + 1$ współrzędnych jest różne od wektora zerowego oznacza, że $\mathscr{C}_k$ jest sumą $m + 1$ kanonicznych afinicznych podzbiorów przestrzeni rzutowej. Na poziomie algebry, oznacza to, że $\mathscr{C}_k$ to Proj pierścienia wielomianów, gdzie kładziemy na pierwsze $m + 1$ współrzędnych gradację 1, zaś na resztę gradację 0, czyli dostajemy produkt $\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^{n-m-k}$. Taka komórka ma wymiar $n - k$.