Zadania na ćwiczenia z grup Liego 1

1 Niech G będzie grupą topologiczną, a H podgrupą. Udowodnić, że działanie G na zbiorze warstw:

$$G \times G/H \to G/H$$

jest ciągłe.

2 Udowodnić, że jeśli G jest spójną grupą topologiczną, $H \subset G$ jest grupą dyskretną i normalną, to H jest zawarta w centrum G.

3 Udowodnić, że grupa podstawowa grupy topologicznej jest przemienna.

4 Utożsamić $\mathbb{R}^3$ z $im(\mathbb{H})$. Udowodnić, że mnożenie kwaternionów urojonych ma postać

$$vw = -(v,w) + v \times w \in \mathbb{R} \oplus im(\mathbb{H}) \,,$$

gdzie (v,w) oznacza iloczyn skalarny, a $v \times w$ iloczyn wektorowy.

5 Rozważyć przekształcenie $\mathbb{H}^* \supset S^3 \to Aut(im(\mathbb{H}))$ zadane przez sprzęganie. Opisać jędro i obraz.

6 Definiujemy macierz $J_n \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ jako macierz blokową

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \,,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową $n \times n$.
Niech

$$G = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^{-1} J_n A = J_n \ \} \,.$$

Równanie $A^{-1}J_nA = J_n$ można przepisać jak

$$J_n A = A J_n \,.$$

Zatem G jest to zbiór automorfizmów przemiennych z J_n. Jeśli $\mathbb{C}^n$ utożsamić z $\mathbb{R}^{2n}$ z bazą

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, i\varepsilon_1, i\varepsilon_2, \ldots, i\varepsilon_n,$$

to G składa się z $\mathbb{R}$-liniowych automorfizmów przemiennych z mnożeniem przez $i \in \mathbb{C}$.
Zatem $G = GL_n(\mathbb{C})$.
Udowodnić

$$SO(2n) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = SO(2n) \cap GL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = U(n) \,.$$

1. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Lie, takim że przekształcenie $f_* : T_1G \to T_1H$ jest izomorfizmem. Pokazać, że homomorfizm f jest nakryciem oraz $\ker f \leqslant Z(G)$.

2. Znaleźć przestrzeń styczną do grupy $GL(n, \mathbb{R})$, strukturę algebry Liego na niej i znaleźć odwzorowanie *exp*. Znaleźć podalgebry odpowiadające podgrupom $SL(n, \mathbb{R})$, $Sp(n\mathbb{R})$. Znaleźć algebry Lie dla $SO(n)$, $U(n)$. $SU(n)$ i $Sp(n)$.

3. Pokazać, że dla macierzy A, $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

1. Udowodnić, że jeżeli H jest domkniętą podgrupą, to przestrzeń warstw G/H jest rozmaitością. (Wskazówka: rozważyć mapę, którą używaliśmy w dowodzie twierdzenia Cartana).

2. Rozpatrujemy grupę $SL(2, \mathbb{R})$ i $SL(2, \mathbb{C})$.

a) Pokazać, że grupa $SL(2, \mathbb{R})$ jest sprzężona w $GL(2, \mathbb{C})$ z grupą macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ i $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

b) Korzystając z przedstawienia powyżej, pokazać że $SL(2, \mathbb{R})$ jako przestrzeń topologiczna jest homeomorficzna z otwartym torusem $S^1 \times D$, gdzie D jest otwartym dyskiem.

c) Udowodnić, że algebra Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ składa się z macierzy o śladzie równym 0.

d) Udowodnić, że forma Jordana (jako macierz zespolona) jest postaci

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} (\lambda \in \mathbb{R} \text{ lub } \lambda \in i\mathbb{R}) \qquad \text{lub} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix},$$

e) Wywnioskować, że wartości własne macierzy macierzy, która leży na jednoparametrowej podgrupie są obie dodatnie, obie są liczbami zespolonymi o module 1 lub obie są równe 1. Wywnioskować, że *exp* dla $SL(2, \mathbb{R})$ nie jest odwzorowaniem "na".

f) Pokazać, że $exp : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \to GL(2, \mathbb{C})$ jest "na".

1. Związki między reprezentacjami nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza kwaterniony. Mamy funktory:

- kompleksyfikacji $c : \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ zdefiniowany $V \to V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ z trywialnym działaniem na $\mathbb{C}$ i tym samym na V;
- $q : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{H}}(G)$ zdefiniowany $V \to V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}$ z trywialnym działaniem na $\mathbb{H}$ i tym samym na V;
- $r : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(G)$ zapominania o strukturze przestrzeni zespolonej z tym samym działaniem na V;
- $s : \mathrm{Rep}_{\mathbb{H}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ zapominania o strukturze przestrzeni nad H z tym samym działaniem na V.
- $t : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ zachowująca działanie grupy G na V, jedynie mnożenie przez skalar $z \in \mathbb{C}$ na przestrzeni tV jest mnożeniem przez $\bar{z}$ w przestrzeni V.

Funktory te spełniają następujące łatwe do sprawdzenia zależności:

- $rc = 2$ i $sq = 2$ tzn. $rc(V) = V \oplus V$ i $sq(V) = V \oplus V$;
- $cr = 1 + t$ i $sq = 1 + t$;
- $tc = c$ i $ts = s$;
- $rt = r$ i $qt = q$;
- $t^2 = 1$.

2. Udowodnić, że jeżeli G jest grupą zwartą, to $V^* \cong tV$.

3. Udowodnić, że dla dwóch reprezentacji $V, W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(G)$ jeżeli $cV \cong cW$, to $V \cong W$ i analogicznie jeżeli $V, W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{H}}(G)$ i $sV \cong sW$, to $V \cong W$.

4. Pokazać, że jeżeli $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ spełnia $V \cong tV$, to V jest rzeczywista lub kwaternionowa, ale nie obie naraz.

5. Udowodnić, że dla zwartej grupy G istnieją reprezentacje $U_m \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(G)$, $V_n \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ i $W_p \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{H}}(G)$, takie że:

a) nieizomorficzne nieprzywiedlne reprezentacje nad $\mathbb{R}$, to U_m, rV_n, rsW_p;

b) nieizomorficzne nieprzywiedlne reprezentacje nad $\mathbb{C}$, to cU_m, V_n, tV_n, sW_p;

c) nieizomorficzne nieprzywiedlne reprezentacje nad $\mathbb{R}$, to qcU_m, qV_n, W_p.

(to jest twierdzenie 3.57 w książce Adamsa)

Grupy i Algebry Liego — zadania na 11 kwietnia

Zadanie 1 Niech $G = SO(n)$. Załóżmy, że n jest nieparzyste. Wskazać torus maksymalny i znaleźć tozkład reprezentacji dołączonej $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C}$ na reprezentacje jednowymiarowe.

Wskazówka: $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ jest algebrą Liego grupy

$$SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) | A^T A = I\}$$

zachowującej standardową formę 2-liniową niezdegenerowaną. Zamienć wzpółrzędne, tak by forma 2-liniowa miała macierz $\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w nowej bazie. Wskazać torus zawarty w macierzach diagonalnych. Aby przekonać się, że jest maksymalny trzeba sprawdzić, że $\mathfrak{g}^T = \mathfrak{t}$. Przy okazji rozłożyć $\mathfrak{so}(n) \otimes \mathbb{C}$ na jednowymiarowe reprezentacje torusa. Wypisać charaktery.

Zadanie 2 Wykazać, że zwarte i spójne rozmaitości zespolone, będące zespolonymi grupami Lie (tzn mnożenie i odwrotność są holomorficzne) są przemienne.

Wskazówka: zbadać reprezentację dołączoną: $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$

Zadanie 3 Niech $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \times M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ będzie zadane formułą

$$\varphi(A, B) = Tr(AB)\,.$$

Wykazać, że φ jest 2-liniową niezdegenerowaną formą symetryczną.
Sprawdzić, że $\varphi_{|\mathfrak{u}(n)\times\mathfrak{u}(n)}$ jest ujemnie określona oraz $\varphi_{|i\mathfrak{u}(n)\times i\mathfrak{u}(n)}$ jest dodatnio określona.

Zadanie 4 Forma Killinga: Niech G będzie grupą Lie. Różniczka reprezentacji dołączonej

$$Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

jest oznaczana przez

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\,,$$
$$X \mapsto ad_X\,.$$

Definiujemy symetryczną formę 2-liniową

$$\varphi(X, Y) = tr(ad_X \circ ad_Y)\,.$$

Udowodnić, że jeśli G jest zwarta i centrum G jest skończone, to φ jest ujemnie określona.

Zadanie 5 Wskazać nietrywialne przekształcenia
a) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$
b) $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$
c) $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$
d) $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$
(powyższe przekształcenia indukują izomorfizmy algebr Lie)

Wskazówki:
a) $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$
b) Utożsamić $\mathbb{C}^4 = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ z formą kwadratową $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$
c) Utożsamić $\mathbb{C}^6 \simeq \wedge^2\mathbb{C}^4$ z formą kwadratową ...
d) Niech $\omega \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)^*$ będzie antysymplektyczną 2-formą w $\mathbb{C}^4$, $ker\Big(\wedge^2 (\mathbb{C}^4)^* \overset{\wedge\omega}{\to} \wedge^4(\mathbb{C}^4)^*\Big) \simeq \mathbb{C}^5$ ...

Grupy i Algebry Liego — zadania na 18 kwietnia

Zadanie 0. z zeszłego tygodnia. Wskazać nietrywialne przekształcenia
a) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$
d) $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$
Opisać te odwzorowania w obcięciu do torusa maksymalnego

Wskazówki:
a) $\mathbb{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$
d) Niech $\omega \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)^*$ będzie symplektyczną 2-formą w $\mathbb{C}^4$, $ker\Big(\wedge^2(\mathbb{C}^4)^* \stackrel{\wedge\omega}{\to} \wedge^4(\mathbb{C}^4)^*\Big) \simeq \mathbb{C}^5 \dots$

Zadanie 1 Niech $\rho_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ and $\rho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami algebry Liego $\mathfrak{g}$. Definiujemy przekształcenie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ na tensorach prostych wzorem

$$\rho(X)(v \otimes w) = \rho_1(X)v \otimes w + v \otimes \rho_2(X)w\,.$$

Sprawdzić, że tak określone przekształcenie liniowe jest przekształceniem algebr Liego.

Zadanie 2 Mówimy, że iloczyn skalarny w $\mathfrak{g}$ jest ad-niezmienniczy gdy $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$(ad_X Y, Z) + (Y, ad_X Y) = 0\,.$$

a) Przy założeniu, że $\mathfrak{g}$ jest algebrą Lie grupy G wykazać, że jeśli iloczyn skalarny jest Ad niezmienniczy, to jest ad-niezmienniczy
b) Mówimy, że $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{g}$ jest ideałem, jeśli dla każdego $X \in \mathfrak{I}$ i dla każdego $Y \in \mathfrak{g}$ mamy $[X, Y] \in \mathfrak{I}$. (W szczególności $\mathfrak{I}$ jest podalgebrą Lie.) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{g}$ dopuszcza ad-niezmienniczy iloczyn skalarny, to $\mathfrak{I}^\perp$ jest podalgebrą Liego.

Zadanie 3 Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{g}$ dopuszcza ad-niezmenniczy iloczyn skalarny $(-,-)$ oraz nie zawiera właściwych ideałów, to z dokładnością do proporcjonalności $(-,-)$ jest równy formie Killinga.

Zadanie 4 Które z reprezentacji $Sym_k V$ grupy $SU(2)$ pochodzą od reprezentacji $SO(3)$?
(Tzn dla jakich k homomorfizm $SU(2) \to \mathrm{GL}(Sym^k V)$ faktoryzuje się przez $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm I\}$?)

Zadanie 5 Niech $V \simeq \mathbb{C}^2$ będzie definiującą reprezentacją dla $SL_2(\mathbb{C})$. Niech $W = Sym^3 V \otimes V$. Wiemy, że $W \simeq Sym^4 V \oplus Sym^2 V$. Wskazać ten izomorfizm znajdując wektory najwyższej wagi dla podreprezentacji.

Zadanie 6 (Ciąg dalszy dla reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$.) Wykazać, że

$$Sym^3(Sym^3(V)) \simeq Sym^9 V \oplus Sym^5 V \oplus Sym^3 V\,.$$

Więcej ciekawych ćwiczeń jest w [Fulton-Harris, roz. 11].

Grupy i Algebry Liego — zadania na 25 kwietnia

Zadanie 1 Znaleźć jawny wzór na formę Killinga dla $\mathfrak{gl}_n$ za pomocą wyrazów macierzy.
Wskazówka (którą trzeba udowodnić): dla $\mathfrak{sl}_n$ forma Killinga jest równa $(x, y) \mapsto 2n\mathrm{tr}(x, y)$.

Zadanie 2 Wykazać, że h_α nie zależy od wyboru iloczynu skalarnego. (Patrz definicja 8.7 z wykładu.)
Wskazówka: najpierw wykazać w przypadku, gdy $\mathfrak{g}$ jest prosta (nie zawiera właściwych ideałów).

Zadanie 3 Niech V będzie reprezentacją definiującą dla $SL_3(\mathbb{C})$.
Roważyć reprezentację $Sym^2(V) \otimes V^*$. Wskazać nietrywialne przekształcenie do V. Czy jądro jest nieprzywiedlną reprezentacją?

Zadanie 4 Rozważamy reprezentacje $SL_3(\mathbb{C})$. Wiemy, że $V \otimes V \simeq Sym^2 V \oplus \wedge^2 V$. Rozłożyć $V \otimes V \otimes V$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

Następujące zadania są krokami prowadzącymi do opisu wszystkich możliwych systemów pierwiastków. Chodzi o wykluczenie pewnych konfiguracji.

Zadanie 5 Niechv_1, v_2,$\ldots v_n$ będą liniowo niezależnymi wektorami o tej samej długości. Załóżmy, że dla $i \neq j$ albo $v_i \perp v_j$, albo kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120°. Tworzymy graf o n wierzchołkach. Rysujemy krawędź, jeśli między wierzchołkami, jeśli kąt pomiędzy odpowiadającymi im wektorami jest 120°. Udowodnić, że ten gaf ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi. Udowodnić, że ten graf nie ma cykli.
Wskazówka: Obliczyć $(\sum v_i, \sum v_i)$.

Zadanie 6 a) Rozważmy graf

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & | & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 \\ & & | & & \\ & & 5 & & \end{array}$$

Udowodnić, że nie istnieje system pierwiastków zawierający liniowo niezależne wektory równej długości v_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, o tej własności, że kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120° jeśli jest krawędź w diagramie pomiędzy i a j, a w przeciwnym przypadku są prostopadłe.

b) Rozważmy graf

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 7 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 6 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 \end{array}$$

Udowodnić, że nie istnieje system pierwiastków zawierający liniowo niezależne wektory równej długości v_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, o tej własności, że kąt pomiędzy v_i a v_j jest równy 120° jeśli jest krawędź w diagramie, a w przeciwnym przypadku są prostopadłe.

Grupy i Algebry Liego — zadania na 9go maja

Zadanie 1 Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla zwartej grupy Lie o skończonym centrum:
(1) algebra Liego nie zawiera właściwego ideału
(2) reprezentacja dołączona jest prosta
(3) diagram Dynkina jest spójny

Zadanie 2 Udowodnić, że jeśli diagram Dynkina jest spójny i zawiera potrójną krawędź, to test typu G_2.

Zadanie 3 Niech W będzie grupą Weyla dla $Sp(n)$ (lub $SO(2n+1)$). Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \Sigma_n$. Tu Σ_n jest grupą permutacji. Bycie produktem półprostym oznacza, że mamy ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}_2^n \to W \to \Sigma_n \to 0$$

oraz rozszczepienie $\Sigma_n \hookrightarrow W$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 4 Niech W będzie grupą Weyla dla $SO(2n)$. Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \Sigma_n$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 5 Dany system pierwiastków $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \sqcup \mathcal{R}_-$. Niech

$$\rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \alpha \,.$$

Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in \mathcal{R}$

$$2 \frac{(\alpha, \rho)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \,.$$

Ponadto ρ należy do dodatniej komnaty Weyla.

- Dla $SU(n)$ wyrazić ρ za pomocą charakterów bazowych $L_i \in \mathfrak{t}^*$.

Grupy i Algebry Liego — zadania na 16go maja

(zadania zaległe)

Zadanie 1 Niech W będzie grupą Weyla dla $Sp(n)$ (lub $SO(2n+1)$). Wykazać, że W jest produktem półprostym $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \Sigma_n$. Tu Σ_n jest grupą permutacji. Bycie produktem półprostym oznacza, że mamy ciąg dokładny

$$0 \to \mathbb{Z}_2^n \to W \to \Sigma_n \to 0$$

oraz rozszczepienie $\Sigma_n \hookrightarrow W$. Wskazać zanurzenie W do $GL_n(\mathbb{Z})$. Wskazać generatory odpowiadające wierzchołkom diagramu Dynkina.

Zadanie 2 Dany system pierwiastków $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \sqcup \mathcal{R}_-$. Niech

$$\rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \alpha \,.$$

Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in \mathcal{R}$

$$2\frac{(\alpha,\rho)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}\,.$$

Ponadto ρ należy do dodatniej komnaty Weyla.

- Dla $SL_n(\mathbb{C})$ (równoważnie dla $SU(n)$) wyrazić ρ za pomocą charakterów bazowych $L_i \in \mathfrak{t}^*$.

(Zadania nowe)

Zadanie 3 Opisać kraty P, Q i $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ dla grupy $SO(n)$.

Zadanie 4 Niech $X_i,\ Y_i \in \mathfrak{g}_2,\ i = 1, \ldots 6$ będą takie jak na wykładzie lub w podręczniku Fultona-Harrisa. Obliczyć $[X_5, Y_4]$.

Zadanie 5 Ustalamy $n \geqslant 2$. (Dla wygody można przyjąć $n = 2$.) Niech A będzie macierzą $n \times n$ z jedynkami na antydiagonali i zerami w pozostałych miejscach oraz niech Q będzie macierzą $2n \times 2n$ blokowej postaci $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$. Niech $T \subset SL_{2n}(\mathbb{C})$ będzie standardowym torusem składającym się z macierzy diagonalnych. Definiujemy automorfizm grupy $SL_{2n}(\mathbb{C})$ wzorem $\psi(X) = J(X^T)^{-1}J^{-1}$.
(a) Opisać wzorem indukowany automorfizm algebr Liego i zauważyć, że zachowuje on macierze diagonalne (czyli $\mathfrak{t}$ przy standardowy wyborze).
(b) Zauważyć, że standardowe pierwiastki proste są permutowane.
(c) Niech $G = SL_{2n}(\mathbb{C})^\psi$ będzie podgrupą punktów stałych automorfizmu ψ. Sprawdzić, że $T_G = T \cap G$ jest torusem maksymalnym w G. Znaleźć pierwiastki.
(d) Mamy $\mathfrak{t}_G \subset \mathfrak{t}$ i surjekcję $\mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*_G$. Porównać obrazy pierwiastków SL_{2n} z pierwiastkami G.
(e) Obliczyć kopierwiastki $\alpha^\vee = 2\frac{(\alpha,-)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathfrak{t}_G$ i wyrazić je za pomocą kopierwiastków SL_{2n}.

Zadanie 6 (a) Dany jest system pierwiastków D_4

$$\begin{array}{ccc} & & \alpha_3 = L_3 - L_4 \\ & & / \\ \alpha_1 = L_1 - L_2 & \text{---} & \alpha_2 = L_2 - L_3 \\ & & \backslash \\ & & \alpha_4 = L_3 + L_4 \end{array}$$

Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad \beta_2 = \alpha_2$. Obliczyć kąt $\angle(\beta_1, \beta_2)$.

(b) Dany jest diagram Dynkina E_6

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \alpha_6 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \alpha_1 & \text{---} & \alpha_2 & \text{---} & \alpha_3 & \text{---} & \alpha_4 & \text{---} & \alpha_5 \end{array}$$

Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_5, \quad \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_4, \quad \beta_3 = \alpha_3, \quad \beta_4 = \alpha_6$. Obliczyć kąty między tymi wektorami i skonstatować, że wektory $\{\beta_i\}_{i=1,\ldots 4}$ mają kąty i proporcje długości takie, jak pierwiastki proste z systemu F_4.

Grupy i Algebry Liego — zadania na 23go maja

(zadania zaległe)
Z zeszłego tygodnia druga połowa 5, zad 6.

(zadania nowe)

Zadanie 1 Dla funkcji n zmiennych $t_1, t_2, \ldots, t_n$ udowodnić, że
a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k = \prod_{i=1}^{n} \tfrac{1}{1-t_i x} \in \mathbb{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_n][[x]]$$

b) Dla $k > 0$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i e_i h_{k-i} = 0$$

Zadanie 2 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ znaleźć ogólną postać wag dominujących. Znaleźć tzw wagi fundamentalne $w_1,\ w_2 \in P$ o tej własności, że każda waga $\lambda \in P_+$ jest nieujemną kombinacją wag w_1 i w_2. Znaleźć reprezentacje o wagach najwyższych w_1 i w_2. Obliczyć ich charaktery.

Zadanie 3 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ oraz wagi $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ opisać wszystkie podmoduły modułu Vermy M_λ.

Zadanie 4 Dla $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ oraz wag $\lambda, \mu \in \mathfrak{t}^*$ znaleźć wymiar przestrzeni wagowej $M_\lambda[\mu]$ w module Vermy.

Zadanie 5 Filtracja algebry tensorowej $T(\mathfrak{g})$ długością tensorów indukuje filtrację w $U(\mathfrak{g})$, oznaczaną $F_i U(\mathfrak{g})$. Niech

$$Gr_F U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} F_i U(\mathfrak{g}) / F_{i-1} U(\mathfrak{g})\,.$$

Pokazać, że produkt w $U(\mathfrak{g})$ zadaje mnożenie w $Gr_F U(\mathfrak{g})$. Udowodnić, że

$$Gr_F U(\mathfrak{g}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} Sym^i(\mathfrak{g})$$

jako algebry z gradacją.

Zadanie 6 Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Lie. Wskazać algebrę łączną $\mathcal{A}$ nad pierścieniem[1] $\mathbb{C}[\hbar]$, taką że dla specjalizacji $\hbar = 0$ algebra $\mathcal{A}_{\hbar:=0}$ jest przemienna i jest algebrą wielomianów, a dla $a \neq 0$ mamy $\mathcal{A}_{\hbar:=a} \simeq U(\mathfrak{g})$.

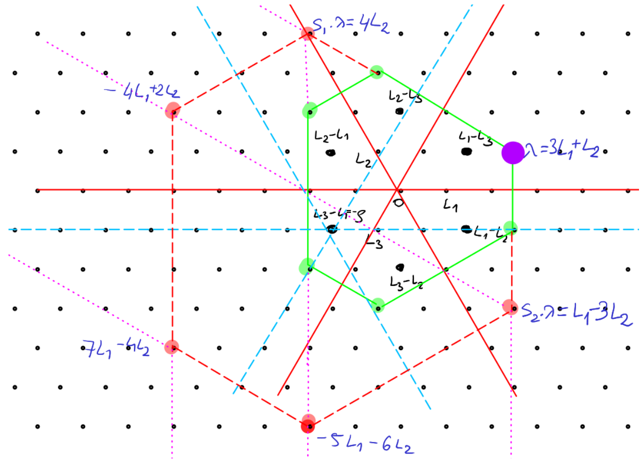
[1] Równoważnie: Mnożenie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zależy wielomianowo od $\hbar$.

Grupy i Algebry Liego — zadania na 6go czerwca

(zadania zaległe)
Z zeszłego tygodnia: zadania 2 i 3.

(zadania nowe)

Zadanie 1 Rozważmy reprezentacje nieprzywiedlną V_λ algebry $\mathfrak{sl}_3$ dla $\lambda = 3L_1+L_2$. Istotne informacje o tej reprezentacji można wyczytać z rysunku (patrz wyjaśnienia w streszczeniu wykładu).



(a) Wypisać rezolwentę Bernstein-Gelfanda-Gelfanda.
(b) Dla $\mu = -L_1 - L_2$ wyliczyć wymiary $M_{w.\lambda}[\mu]$, $w \in \Sigma_3$.
(c) Dla $\mu = -3L_1 - L_2$ wyliczyć wymiary $M_{w.\lambda}[\mu]$, $w \in \Sigma_3$.
(d) Dla $\mu = -7L_1 - 4L_2$ wyliczyć wymiary $M_{w.\lambda}[\mu]$, $w \in \Sigma_3$.
(e) Obliczyć $\dim(V_\lambda[\mu])$ dla powyższych μ.

Zadanie 2 Powtórzyć powyższe rachunki dla $\lambda = 2L_1$, $\mu = -2L_1 - 2L_2$ oraz $\mu = -6L_1 - 4L_2$

Zadanie 3 **Proszę zrobić i oddać mi do sprawdzenia próbny egzamin pisemny.**

((2, 0), (-1, 3), (1, -2), (-5, -5), (-3, 2), (-6, -4))

```
In[1]:= (* działanie grupy Weyla *)
s1[f_] := f /. {L1 → L2, L2 → L1}
s2[f_] := f /. {L2 → L3, L3 → L2}

(* skręcone działanie grupy Weyla *)
rho = 2 L1 + L2;
r1[f_] := Expand[s1[f + rho] - rho /. L3 → -L1 - L2]
r2[f_] := Expand[s2[f + rho] - rho /. L3 → -L1 - L2]

In[6]:= lambda = 3 L1 + L2;

In[7]:= (* Orbita lambdy przy skręconym działaniu *)
lambda1 = r1[lambda]
lambda2 = r2[lambda]
lambda21 = r2[lambda1]
lambda12 = r1[lambda2]
lambda121 = r2[lambda12]

Out[7]= 4 L2

Out[8]= L1 - 3 L2

Out[9]= -5 L1 - 6 L2

Out[10]=
-4 L1 + 2 L2

Out[11]=
-7 L1 - 4 L2
```

In[12]:=
```
(* Rozwinięcie charakteru Un_-=M_0
   -pierwiastki proste w zapisie multiplikatywnym: α=t2/t1, β=t3/t2,
   trzeci pierwiastek ujemny: αβ=t3/t1 *)

maxdeg = 15;
Unminus = Expand[Normal[Series[1 / ((1 - h α) (1 - h β) (1 - h ^ 2 α β)), {h, 0, maxdeg}]]];
Do[Print[TraditionalForm[Coefficient[Unminus, h, i]]], {i, 0, maxdeg}];
Unminus = Unminus /. {h → 1, α → t2 / t1, β → t3 / t2} /. t3 → 1 / (t1 t2);
```

$$1$$

$$\alpha + \beta$$

$$\alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta + \beta^2$$

$$\alpha^3 + 2\,\alpha^2\,\beta + 2\,\alpha\,\beta^2 + \beta^3$$

$$\alpha^4 + 2\,\alpha^3\,\beta + 3\,\alpha^2\,\beta^2 + 2\,\alpha\,\beta^3 + \beta^4$$

$$\alpha^5 + 2\,\alpha^4\,\beta + 3\,\alpha^3\,\beta^2 + 3\,\alpha^2\,\beta^3 + 2\,\alpha\,\beta^4 + \beta^5$$

$$\alpha^6 + 2\,\alpha^5\,\beta + 3\,\alpha^4\,\beta^2 + 4\,\alpha^3\,\beta^3 + 3\,\alpha^2\,\beta^4 + 2\,\alpha\,\beta^5 + \beta^6$$

$$\alpha^7 + 2\,\alpha^6\,\beta + 3\,\alpha^5\,\beta^2 + 4\,\alpha^4\,\beta^3 + 4\,\alpha^3\,\beta^4 + 3\,\alpha^2\,\beta^5 + 2\,\alpha\,\beta^6 + \beta^7$$

$$\alpha^8 + 2\,\alpha^7\,\beta + 3\,\alpha^6\,\beta^2 + 4\,\alpha^5\,\beta^3 + 5\,\alpha^4\,\beta^4 + 4\,\alpha^3\,\beta^5 + 3\,\alpha^2\,\beta^6 + 2\,\alpha\,\beta^7 + \beta^8$$

$$\alpha^9 + 2\,\alpha^8\,\beta + 3\,\alpha^7\,\beta^2 + 4\,\alpha^6\,\beta^3 + 5\,\alpha^5\,\beta^4 + 5\,\alpha^4\,\beta^5 + 4\,\alpha^3\,\beta^6 + 3\,\alpha^2\,\beta^7 + 2\,\alpha\,\beta^8 + \beta^9$$

$$\alpha^{10} + 2\,\alpha^9\,\beta + 3\,\alpha^8\,\beta^2 + 4\,\alpha^7\,\beta^3 + 5\,\alpha^6\,\beta^4 + 6\,\alpha^5\,\beta^5 + 5\,\alpha^4\,\beta^6 + 4\,\alpha^3\,\beta^7 + 3\,\alpha^2\,\beta^8 + 2\,\alpha\,\beta^9 + \beta^{10}$$

$$\alpha^{11} + 2\,\alpha^{10}\,\beta + 3\,\alpha^9\,\beta^2 + 4\,\alpha^8\,\beta^3 + 5\,\alpha^7\,\beta^4 + 6\,\alpha^6\,\beta^5 + 6\,\alpha^5\,\beta^6 + 5\,\alpha^4\,\beta^7 + 4\,\alpha^3\,\beta^8 + 3\,\alpha^2\,\beta^9 + 2\,\alpha\,\beta^{10} + \beta^{11}$$

$$\alpha^{12} + 2\,\alpha^{11}\,\beta + 3\,\alpha^{10}\,\beta^2 + 4\,\alpha^9\,\beta^3 + 5\,\alpha^8\,\beta^4 + 6\,\alpha^7\,\beta^5 + 7\,\alpha^6\,\beta^6 + 6\,\alpha^5\,\beta^7 + 5\,\alpha^4\,\beta^8 + 4\,\alpha^3\,\beta^9 + 3\,\alpha^2\,\beta^{10} + 2\,\alpha\,\beta^{11} + \beta^{12}$$

$$\alpha^{13} + 2\,\alpha^{12}\,\beta + 3\,\alpha^{11}\,\beta^2 + 4\,\alpha^{10}\,\beta^3 + 5\,\alpha^9\,\beta^4 + 6\,\alpha^8\,\beta^5 + 7\,\alpha^7\,\beta^6 + 7\,\alpha^6\,\beta^7 + 6\,\alpha^5\,\beta^8 + 5\,\alpha^4\,\beta^9 + 4\,\alpha^3\,\beta^{10} + 3\,\alpha^2\,\beta^{11} + 2\,\alpha\,\beta^{12} + \beta^{13}$$

$$\alpha^{14} + 2\,\alpha^{13}\,\beta + 3\,\alpha^{12}\,\beta^2 + 4\,\alpha^{11}\,\beta^3 + 5\,\alpha^{10}\,\beta^4 + 6\,\alpha^9\,\beta^5 + 7\,\alpha^8\,\beta^6 + 8\,\alpha^7\,\beta^7 + 7\,\alpha^6\,\beta^8 + 6\,\alpha^5\,\beta^9 + 5\,\alpha^4\,\beta^{10} + 4\,\alpha^3\,\beta^{11} + 3\,\alpha^2\,\beta^{12} + 2\,\alpha\,\beta^{13} + \beta^{14}$$

$$\alpha^{15} + 2\,\alpha^{14}\,\beta + 3\,\alpha^{13}\,\beta^2 + 4\,\alpha^{12}\,\beta^3 + 5\,\alpha^{11}\,\beta^4 + 6\,\alpha^{10}\,\beta^5 + 7\,\alpha^9\,\beta^6 + 8\,\alpha^8\,\beta^7 + 8\,\alpha^7\,\beta^8 + 7\,\alpha^6\,\beta^9 + 6\,\alpha^5\,\beta^{10} + 5\,\alpha^4\,\beta^{11} + 4\,\alpha^3\,\beta^{12} + 3\,\alpha^2\,\beta^{13} + 2\,\alpha\,\beta^{14} + \beta^{15}$$

In[15]:=
```
(* fukcja obliczająca współczynnik M_λ przy t^μ *)
coef[lambda_, mu_] := Coefficient[Coefficient[t1 ^ lambda[[1]] t2 ^ lambda[[2]] Unminus, t1, mu[[1]]], t2, mu[[2]]]
```

In[16]:=
```
(* dla lambda =3L1+L2 , mu=-L1-L2 *)
mu = {-1, -1};
{coef[{3, 1}, mu], coef[{0, 4}, mu], coef[{1, -3}, mu], coef[{-5, -6}, mu], coef[{-4, 2}, mu], coef[{-7, -4}, mu]}
```
Out[17]=
```
{3, 0, 1, 0, 0, 0}
```
In[18]:=
```
(* krotność w Vλ *)
%.{1, -1, -1, 1, 1, -1}
```
Out[18]=
```
2
```
In[19]:=
```
(* Schur function = charakter reprezentacji Vλ *)
tt = {t1, t2, t3};
S[lambda_] := Expand[Factor[Det[Table[tt[[i]]^(lambda + {2, 1, 0})[[j]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]] / ((t1 - t2) (t1 - t3) (t2 - t3))]]
S[{3, 1, 0}]
```
Out[21]=

$$t1^3\,t2 + t1^2\,t2^2 + t1\,t2^3 + t1^3\,t3 + 2\,t1^2\,t2\,t3 + 2\,t1\,t2^2\,t3 + t2^3\,t3 + t1^2\,t3^2 + 2\,t1\,t2\,t3^2 + t2^2\,t3^2 + t1\,t3^3 + t2\,t3^3$$

In[22]:=
```
(* w zmiennych t1,t2 *)
```
In[23]:=
```
S[{3, 1, 0}] /. {t3 → 1 / (t1 t2)}
```
Out[23]=

$$\frac{1}{t1^2} + 2\,t1 + \frac{1}{t1^2\,t2^3} + \frac{1}{t2^2} + \frac{1}{t1^3\,t2^2} + \frac{2}{t1\,t2} + \frac{t1^2}{t2} + 2\,t2 + t1^3\,t2 + \frac{t2^2}{t1} + t1^2\,t2^2 + t1\,t2^3$$

In[24]:=
```
Coefficient[Coefficient[%, t1, -1], t2, -1]
```
Out[24]=
```
2
```

In[25]:=
```
(* ----------------------------------------------------*)
(* dla lambda =3L1+L2 , mu=-3L1-L2 *)
mu = {-3, -1};
{coef[{3, 1}, mu], coef[{0, 4}, mu], coef[{1, -3}, mu], coef[{-5, -6}, mu], coef[{-4, 2}, mu], coef[{-7, -4}, mu]}
%.{1, -1, -1, 1, 1, -1}
```

Out[26]=
```
{0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Out[27]=
```
0
```

In[28]:=
```
S[{3, 1, 0}] /. {t3 → 1/(t1 t2)}
Coefficient[Coefficient[%, t1, -3], t2, -1]
```

Out[28]=

$$\frac{1}{t1^2} + 2\,t1 + \frac{1}{t1^2\,t2^3} + \frac{1}{t2^2} + \frac{1}{t1^3\,t2^2} + \frac{2}{t1\,t2} + \frac{t1^2}{t2} + 2\,t2 + t1^3\,t2 + \frac{t2^2}{t1} + t1^2\,t2^2 + t1\,t2^3$$

Out[29]=
```
0
```

In[30]:=
```
(* ----------------------------------------------------*)
(* dla lambda =3L1+L2 , mu=-3L1-L2 *)
mu = {-7, -4};
{coef[{3, 1}, mu], coef[{0, 4}, mu], coef[{1, -3}, mu], coef[{-5, -6}, mu], coef[{-4, 2}, mu], coef[{-7, -4}, mu]}
%.{1, -1, -1, 1, 1, -1}
```

Out[31]=
```
{6, 3, 4, 1, 1, 1}
```

Out[32]=
```
0
```

In[33]:=
```
S[{3, 1, 0}] /. {t3 → 1/(t1 t2)}
Coefficient[Coefficient[%, t1, -7], t2, -4]
```

Out[33]=

$$\frac{1}{t1^2} + 2\,t1 + \frac{1}{t1^2\,t2^3} + \frac{1}{t2^2} + \frac{1}{t1^3\,t2^2} + \frac{2}{t1\,t2} + \frac{t1^2}{t2} + 2\,t2 + t1^3\,t2 + \frac{t2^2}{t1} + t1^2\,t2^2 + t1\,t2^3$$

Out[34]=

0

Grupy i Algebry Liego — zadania na 13-go czerwca

(ostatnia szansa na punkty za ćwiczenia)

Notacja dotycząca algebr Clifforfa jest taka jak w moich notatkach, tzn jak w podręczniku Bröcker-tom Dieck §I.6

Zadanie 1 Niech $x \in \Gamma_n$ będzie elementem grupy Clifforda. Udowodnić, że $\alpha(x)$ i $t(x)$ też należą do grupy Γ_n.

Zadanie 2 Niech $\bar{x} = t(\alpha(x))$. Udowodnić, że dla $x \in \Gamma_n$ mamy $\bar{x}x = x\bar{x}$.

Zadanie 3 Udowodnić, że norma $N(x) = \bar{x}x$ zadaje homomorfizm $N : \Gamma_n \to \mathbb{R}^*$.

Zadanie 4 Udowodnić, że algebra Clifforda $C(3) = C(\mathbb{R}^3, -standard)$ jest izomorficzna z $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (z mnożeniem po współrzędnych).

Zadanie 5 [2-periodyczność nad $\mathbb{C}$] Niech $C_{\mathbb{C}}(n) = C(\mathbb{C}^n, -standard)$ będzie algebrą Clifforda nad ciałem $\mathbb{C}$. Dla algebry A przez $M_{2\times 2}(A)$ oznaczamy algebrę macierzy 2×2 o współczynnikach z A. Udowodnić

$$C_{\mathbb{C}}(1) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,,$$

$$C_{\mathbb{C}}(n+2) \simeq M_{2\times 2}(C_{\mathbb{C}}(n))\,.$$

Zadanie 6 Niech $V = W \oplus W^* \simeq \mathbb{C}^{2n}$. Rozważamy reprezentacje spinorowe $\wedge^{ev}W$ i $\wedge^{odd}W$ algebry $\mathfrak{so}(n,n) \simeq \mathfrak{so}(2n)$. Znaleźć wagi tych reprezentacji. Patrz [Fulton-Harris] Proposition 20.15.

Zadanie 7 Skonstruować reprezentację algebry $\mathfrak{so}(2n+1)$ o najwyższej wadze $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 + \cdots + L_n)$. Patrz [Fulton-Harris] Proposition 20.16.

Grupy i Algebry Liego — egzamin pisemny

Proszę podpisać kartki i podać rozwiązania z krótkimi uzasadnieniami.

Zad. 1 W zwartej grupie $SO(6) \subset GL_6(\mathbb{R})$ wskazać torus maksymalny.

Zad. 2 Rozważmy odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \to G$ i odwzorowanie odwrotne $\log : U \to \mathfrak{g}$ określone na otoczeniu $1 \in G$. Napisać rozwinięcie $\log(\exp(tX)\exp(tY)\exp(tZ))$ do wyrazów kwadratowych.

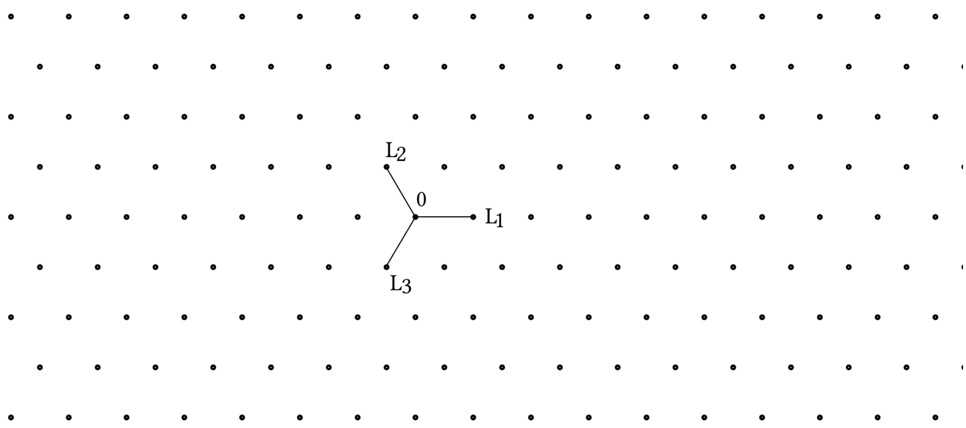
Zad. 3 Niech $\varphi : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją grupy zwartej, oraz ψ indukowaną reprezentacją G na $V \oplus V^*$. Wyrazić charakter ψ za pomocą charakteru φ.

Zad. 4 Wskazać przykład spójnej grupy Lie oraz jej reprezentacji zespolonej, takiej że $V \not\simeq V^*$.

Zad. 5 Przypuśćmy, że $f(t) = t^{-3} + 2t^2$ jest charakterem pewnej reprezentacji $\mathbb{C}^* \to GL(V)$. Znaleźć charakter indukowanej reprezentacji $Sym^2 V$.

Zad. 6 Rozważmy torus maksymalny $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ w $SL_2(\mathbb{C})$. Czy funkcja $f(t) = t^{-2} + 2t^{-1} + 3 + 4t + 3t^2 + 2t^3 + t^4$ jest charakterem pewnej reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$? Czy jest różnicą dwóch charakterów?

Zad. 7 Na siatce heksagonalnej zaznaczyć wagi reprezentacji algebry $\mathfrak{sl}_3$ będącej iloczynem tensorowym reprezentacji definiującej i dołączonej $W = \mathbb{C}^3 \otimes \mathfrak{sl}_3$.



Zad. 8 Wskazać epimorfizm $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$.

Zad. 9 Niech α, β będą pierwiastkami prostymi grupy $Sp_2(\mathbb{C}) \subset GL_4(\mathbb{C})$, $|\alpha| > |\beta|$. Oraz niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Wskazać jak najmniejsze $n > 0$ takie, że $(ad_Y)^n(X) = 0$.

Zad. 10 Opisać grupę Weyla $\mathfrak{g}_2$ przez generatory i relacje. Ile ma ona elementów? Czy jest to jedna z dobrze znanych grup badanych na podstawowym kursie algebry?

Zad. 11 Obliczyć $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} \alpha$ za pomocą pierwiastków prostych dla $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$.

Zad. 12 Rozważamy reprezentacje $\mathfrak{so}_9(\mathbb{C})$. Wskazać reprezentację zawierającą V_λ o najwyższej wadze $\lambda = 5L_1 + 2L_2$.

Zad. 13 Rozważamy grupę $SO_9(\mathbb{C})$. Niech $Q \subset \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ będzie kratą rozpiętą przez pierwiastki. Znaleźć iloraz $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}/Q$.

Zad. 14 Wypisać rezolwentę Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda dla definiującej reprezentacji $\mathbb{C}^3$ algebry $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

Zad. 15 Dla $\lambda = 6L_1 + 4L_2 + 2L_3$ obliczyć charakter reprezentacji $SL_3(\mathbb{C})$.

Zad. 16 Niech $V = \mathbb{R}^2$, $Q(x, y) = x^2 + y^2$. Czy algebra Clifforda $C(V, Q)$ jest przemienna, czy każdy element niezerowy jest odwracalny?

Grupy i Algebry Liego — egzamin pisemny

Proszę podpisać kartki i podać rozwiązania z krótkimi uzasadnieniami.

Zad. 1 W zwartej grupie $SO(7) \subset GL_7(\mathbb{R})$ wskazać torus maksymalny.

Zad. 2 Rozważmy odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Wyrazić $\exp(tX) exp(-tY) \exp(-tX) exp(tY) + \mathcal{O}(t^3)$ za pomocą $[X, Y]$.

Zad. 3 Niech $\varphi : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją grupy zwartej, oraz ψ indukowaną reprezentacją G na $End(V)$. Wyrazić charakter ψ za pomocą charakteru φ.

Zad. 4 Wskazać przykład spójnej grupy Lie oraz jej reprezentacji, która nie jest półprosta (zawiera podreprezentację, która nie jest składnikiem prostym).

Zad. 5 Przypuśćmy, że $f(t) = t^{-2} + 2t + t^5$ jest charakterem pewnej reprezentacji $\mathbb{C}^* \to GL(V)$. Znaleźć charakter indukowanej reprezentacji $\wedge^2 V$.

Zad. 6 Rozważmy torus maksymalny $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ w $SL_2(\mathbb{C})$. Czy funkcja

$$f(t) = t^{-3} + 2t^{-2} + t^{-1} + 1 + t + 2t^2 + t^3$$

jest charakterem pewnej reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$? Czy jest różnicą dwóch charakterów.

Zad. 7 Wskazać epimorfizm $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$

Zad. 8 Znaleźć największe $n \in \mathbb{Z}$ takie, że G_2 zawiera podgrupę izomorficzną z $SU(n)$.

Zad. 9 Niech α, β będą pierwiastkami prostymi grupy G_2, $|\alpha| > |\beta|$. Oraz niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Wskazać jak najmniejsze $n > 0$ takie, że $(ad_Y)^n(X) = 0$.

Zad. 10 Opisać grupę Weyla $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ przez generatory i relacje. Ile ma ona elementów. Czy jest to jedna z dobrze znanych grup badanych na podstawowym kursie algebry?

Zad. 11 Obliczyć $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+}\alpha$ za pomocą pierwiastków prostych dla $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$.

Zad. 12 Z aksjomatów systemu pierwiastków wywnioskować jakie mogą być kąty pomiędzy pierwiastkami.

Zad. 13 Rozważamy reprezentacje $\mathfrak{sp}_7(\mathbb{C})$. Wskazać reprezentację zawierającą V_λ o najwyższej wadze $\lambda = 3L_1 + L_2$.

Zad. 14 Rozważamy grupę $SL_4(\mathbb{C})$. Niech $Q \subset \mathfrak{t}^*$ będzie kratą rozpiętą przez pierwiastki, a P kratą wag. Znaleźć iloraz P/Q.

Zad. 15 Wypisać rezolwentę Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda dla trywialnej reprezentacji algebry $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$.

Zad. 16 Dla $\lambda = 5L_1 + 3L_2 + L_3$ obliczyć charakter reprezentacji $SL_3(\mathbb{C})$.