Grupy i Algebry Liego — egzamin pisemny

Proszę podpisać kartki i podać rozwiązania z krótkimi uzasadnieniami.

Zad. 1 W zwartej grupie $SO(7) \subset GL_7(\mathbb{R})$ wskazać torus maksymalny.

$$\begin{pmatrix} \boxed{R_1} & & & 0 \\ & \boxed{R_2} & & \\ & & \boxed{R_3} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad R_i = \begin{pmatrix} \cos t_i & -\sin t_i \\ \sin t_i & \cos t_i \end{pmatrix}$$

Zad. 2 Rozważmy odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Wyrazić $\exp(tX) exp(-tY) \exp(-tX) exp(tY) + \mathcal{O}(t^3)$ za pomocą $[X, Y]$.

Odp: $t^2[X,-Y] + \mathcal{O}(t^3) = -t^2[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)$

Zad. 3 Niech $\varphi : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją grupy zwartej, oraz ψ indukowaną reprezentacją G na $End(V)$. Wyrazić charakter ψ za pomocą charakteru φ.

$$End(V) = V^* \otimes V$$

$$\chi_{V^* \otimes V} = \chi_{V^*} \cdot \chi_V = \overline{\chi_V} \cdot \chi_V = |\chi_V|^2$$

Zad. 4 Wskazać przykład spójnej grupy Lie oraz jej reprezentacji, która nie jest półprosta (zawiera podreprezentację, która nie jest składnikiem prostym).

$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad V = \mathbb{R}^2$ naturalnie

$W \subset V \qquad W = \mathrm{lin}\{(1,0)\}$

Zad. 5 Przypuśćmy, że $f(t) = t^{-2} + 2t + t^5$ jest charakterem pewnej reprezentacji $\mathbb{C}^* \xrightarrow{g} GL(V)$. Znaleźć charakter indukowanej reprezentacji $\wedge^2 V$.

$\dim V = f(1) = 4$

W pewnej bazie $g(t)$ ma wartości własne t^{-2}, t, t, t^5.

Wartości własne na $\Lambda^2 V$:

$e_1\wedge e_2$	$e_1\wedge e_3$	$e_1\wedge e_4$	$e_2\wedge e_3$	$e_2\wedge e_4$	$e_3\wedge e_4$
t^{-1}	t^{-1}	t^3	t^2	t^6	t^6

$$\chi_{\Lambda^2 V} = 2t^{-1} + t^2 + t^3 + 2t^6$$

Zad. 6 Rozważmy torus maksymalny $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ w $SL_2(\mathbb{C})$. Czy funkcja

$$f(t) = t^{-3} + 2t^{-2} + t^{-1} + 1 + t + 2t^2 + t^3$$

jest charakterem pewnej reprezentacji $SL_2(\mathbb{C})$? Czy jest różnicą dwóch charakterów.

Charaktery reprezentacji SL_2 mają własności:

Jeśli $\chi(t) = \sum a_i t^i$, to $a_i = a_{-i}$ oraz dla $i \geq 0$ $a_i \geq a_{i+2}$. Zatem f nie jest charakterem. Natomiast jest różnicą charakterów: $\chi_{Sym^3} + \chi_{Sym^2} - \chi_{Sym^0}$.

Zad. 7 Wskazać epimorfizm $Sp_2(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$

Niech $\mathbb{C}^4$ będzie reprezentacją definiującą $Sp_2(\mathbb{C})$, ω - forma symplektyczna, $\omega: \Lambda^2\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$.

Niech $V = \ker(\omega: \Lambda^2\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C})$. $\dim V = 5$, $Sp_2(\mathbb{C})$ działa na V. W przestrzeni V jest forma dwuliniowa symetryczna

$\phi(\alpha,\beta) = \alpha\wedge\beta \in \Lambda^4\mathbb{C}^4 \underset{\uparrow}{\simeq} \mathbb{C}$. Forma ϕ jest niezdegenerowana i zachowywana przez $Sp_2(\mathbb{C})$.

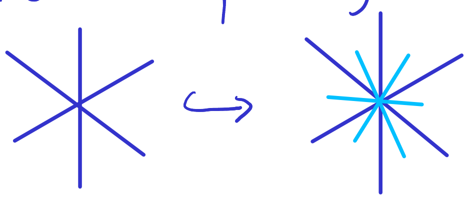
izo zadane przez ω: $\omega\wedge\omega \longleftrightarrow 1$

$(V, \phi) \simeq (\mathbb{C}^5, \text{standard. forma})$

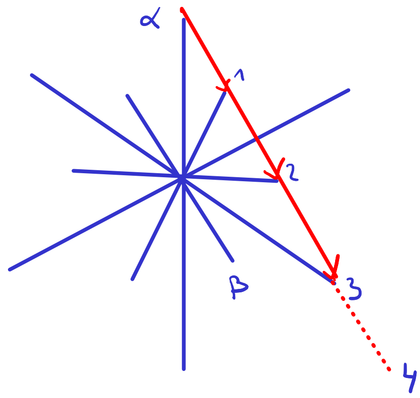
Zad. 8 Znaleźć największe $n \in \mathbb{Z}$ takie, że G_2 zawiera podgrupę izomorficzną z $SU(n)$.

$n \leq 3$ bo torus maksymalny G_2 jest wymiaru 2.

Algebra $\mathfrak{g}_2$ zawiera podalgebrę rozpiętą przez przestrzenie pierwiastkowe odpowiadające dłuższym pierwiastkom

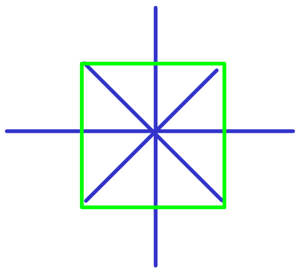


Zad. 9 Niech α, β będą pierwiastkami prostymi grupy G_2, $|\alpha| > |\beta|$. Oraz niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Wskazać jak najmniejsze $n > 0$ takie, że $(ad_Y)^n(X) = 0$.



$n=4$

Zad. 10 Opisać grupę Weyla $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ przez generatory i relacje. Ile ma ona elementów. Czy jest to jedna z dobrze znanych grup badanych na podstawowym kursie algebry?



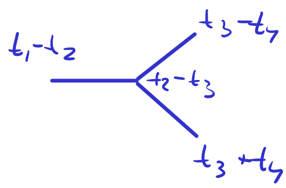
$\langle s_1, s_2 \mid s_1^2=1, s_2^2=1, (s_1s_2)^4=1 \rangle$

To jest grupa dihedralna, izometrie kwadratu. Ma 8 elementów.

Zad. 11 Obliczyć $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{R}_+} \alpha$ za pomocą pierwiastków prostych dla $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$.

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{(t_1-t_2)+(t_1+t_2)}^{2t_1}+(t_1-t_3)+(t_1+t_3)+\ldots+(t_3-t_4)+(t_3+t_4)\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\left(3\cdot 2t_1+2\cdot 2t_2+2t_3\right) = 3t_1+2t_2+t_3$$



Zapisane za pomocą pierwiastków prostych:

$$3(t_1-t_2)+3(t_3-t_4)+3(t_3+t_4)+5(t_2-t_3)$$

ten współczynnik musi być 3 — 3 przez symetrię — to trzeba wyliczyć

Zad. 12 Z aksjomatów systemu pierwiastków wywnioskować jakie mogą być kąty pomiędzy pierwiastkami.

$$n_{\alpha\beta}\cdot n_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$$

$$n_{\alpha\beta}\cdot n_{\beta\alpha} = 4\frac{\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2\,|\beta|^2} = 4\cos(\alpha,\beta)^2 \in \mathbb{Z}$$

$$|\cos\sphericalangle(\alpha,\beta)| \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$$

$$\sphericalangle(\alpha,\beta) \in \{0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ\}$$

Zad. 13 Rozważamy reprezentacje $\mathfrak{sp}_7(\mathbb{C})$. Wskazać reprezentację zawierającą V_λ o najwyższej wadze $\lambda = 3L_1 + L_2$.

$\lambda = 2L_1 + (L_1 + L_2)$ suma wag reprezentacji $Sym^2(\mathbb{C}^{14})$ i $\Lambda^2\mathbb{C}^{14}$, gdzie $\mathbb{C}^{14}$ to reprezentacja definiująca Sp_7. Reprezentacja $Sym^2(\mathbb{C}^{14}) \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^{14}$ ma wektor najwyższej wagi $2L_1 + (L_1 + L_2)$. Ta reprezentacja nie jest nieprzywiedlna, ale zawiera $V_{3L_1+L_2}$.

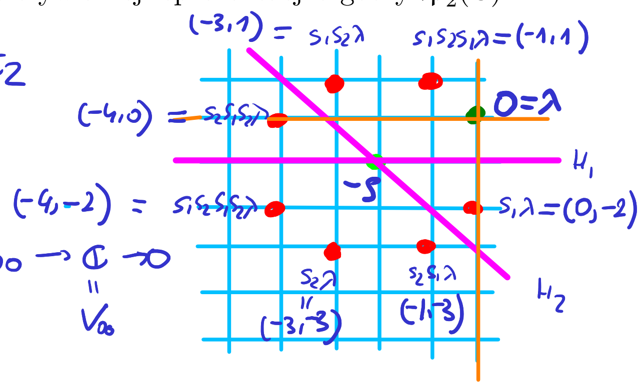
Zad. 14 Rozważamy grupę $SL_4(\mathbb{C})$. Niech $Q \subset \mathfrak{t}^*$ będzie kratą rozpiętą przez pierwiastki, a P kratą wag. Znaleźć iloraz P/Q.

$Q^\vee / P^\vee$ = Centrum $SL_4(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}_4$, zatem $P/Q \simeq \mathbb{Z}_4$.

(centrum $SL_n(\mathbb{C})$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix}$ t.ż. $t^n = 1$)

Zad. 15 Wypisać rezolwentę Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda dla trywialnej reprezentacji algebry $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$.

$\rho = \frac{1}{2}((t_1 - t_2) + (t_1 + t_2) + 2t_1 + 2t_2) = 2t_1 + t_2$



$$0 \to M_{-4,-2} \to M_{-4,0} \oplus M_{1,1} \to M_{-3,1} \oplus M_{-1,-3} \to M_{0,-2} \oplus M_{-3,-3} \to M_{00} \to \underset{\underset{V_{00}}{\parallel}}{\mathbb{C}} \to 0$$

Zad. 16 Dla $\lambda = 5L_1 + 3L_2 + L_3$ obliczyć charakter reprezentacji $SL_3(\mathbb{C})$.

$$\chi(V_\lambda) = S_\lambda = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{5+2}, & t_1^{3+1}, & t_1 \\ t_2^{5+2}, & t_2^{3+1}, & t_2 \\ t_3^{5+2}, & t_3^{3+1}, & t_3 \end{vmatrix}}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = t_1 t_2 t_3 \frac{\begin{vmatrix} t_1^4 & t_1^2 & 1 \\ t_2^4 & t_2^2 & 1 \\ t_3^4 & t_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = t_1 t_2 t_3 \frac{(t_1^2-t_2^2)(t_1^2-t_3^2)(t_2^2-t_3^2)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)}$$

$$= t_1 t_2 t_3 (t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_2+t_3) \underset{\substack{\text{w } SL_3 \\ t_1 t_2 t_3 = 1}}{=} (t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_2+t_3)$$