Grupy i Algebry Liego — egzamin pisemny

Proszę podpisać kartki i podać rozwiązania z krótkimi uzasadnieniami.

Zad. 1 Niech $G \subset GL_6(\mathbb{C})$ będzie grupą zachowującą formę $dz_1 \wedge dz_6 + dz_2 \wedge dz_5 + dz_3 \wedge dz_4$. Wskazać torus maksymalny.

Odpowiedź: Przekształcenie

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \mapsto (t_1 z_1, t_2 z_2, t_3 z_3, t_3^{-1} z_4, t_2^{-1} z_5, t_1^{-1} z_6)$$

zachowuje formę. Jako torus maksymalny można wybrać macierze diagonalne

$$diag(t_1, t_2, t_3, t_3^{-1}, t_2^{-1}, t_1^{-1})\,.$$

Zad. 2 Rozważmy odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \to G$ i odwzorowanie odwrotne $\log : U \to \mathfrak{g}$ określone na otoczeniu $1 \in G$. Napisać rozwinięcie $\log\big(\exp(tX)\exp(-t(X+Y))\exp(tY)\big)$ do wyrazów kwadratowych.

Odpowiedź: $-t^2 \frac{1}{2}[X, Y]$**.**
Ze wzoru $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots)$**:**
$\exp(tX) \cdot \exp(-t(X + Y)) \cdot \exp(tY) =$
$\exp(tX - t(X + Y) + \frac{1}{2}[tX, -t(X + Y)] + \dots) \cdot \exp(tY) =$
$\exp(-tY - t^2 \frac{1}{2}[X, Y] + \dots) \cdot \exp(tY) =$
$\exp(-tY - t^2 \frac{1}{2}[X, Y] + tY + \frac{1}{2}[-tY - t^2 \frac{1}{2}[X, Y], tY] + \dots) =$
$\exp(-t^2 \frac{1}{2}[X, Y] + \dots)$

Zad. 3 Niech $\varphi : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją grupy zwartej, oraz ψ indukowaną reprezentacją G na $V \otimes V \otimes V$. Wyrazić charakter ψ za pomocą charakteru φ.

Odpowiedź: $\chi_{V \otimes V \otimes V} = \chi_V^3$

Zad. 4 Wskazać przykład grupy Lie oraz jej reprezentacji zespolonej, takiej że $\dim(V) = \dim(V \otimes V)$ ale $V \not\simeq V \otimes V$.

Odpowiedź:
$\dim(V) = \dim(V \otimes V)$**, więc** $\dim V = 1$**. Jako** G **weźmy** $\mathbb{C}^*$ **z działaniem na** $V = \mathbb{C}$ **przez mnożenie** $t \cdot z = tz$

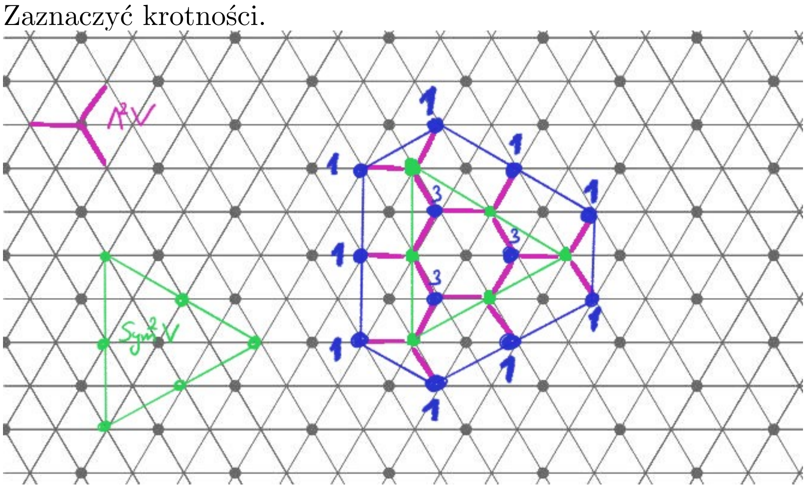
Zad. 5 Przypuśćmy, że $f(t) = t^{-3} + 2t^2$ jest charakterem pewnej reprezentacji $\mathbb{C}^* \to GL(V)$. Znaleźć charakter indukowanej reprezentacji $\wedge^3 V$.

Odpowiedź: $\dim V = f(1) = 3$ **zatem** $\dim \wedge^3 V = 1$ **oraz** $\chi_{\wedge^3 V} = t^{-3} \cdot t^2 \cdot t^2 = t$

Zad. 6 Niech V będzie reprezentacją definiującą $SL_{1410}(\mathbb{C})$. Rozłożyć reprezentację $V^* \otimes V$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

Odpowiedź: Niech $n = 1410$**. Zatem** $V^* \otimes V = End(\mathbb{C}^n) = \mathfrak{sl}_n \oplus \underbrace{\{\text{ macierze skalarne }\}}_{\simeq \mathbb{C}}$**. To jest rozkład na nieprzywiedlne składniki.**

Zad. 7 Zaznaczyć wagi reprezentacji $Sym^2 V \otimes \Lambda^2 V$ grupy $SL_3(\mathbb{C})$, gdzie V jest reprezentacją definiującą. Zaznaczyć krotności.



Odpowiedź:
Sprawdzamy
$\dim(Sym^2 V) = 6$, $\dim(\Lambda^2 V) = 3$, **więc** $\dim(Sym^2 V \otimes \Lambda^2 V) = 6 \times 3 = 18$
Krotność κ **wewnętrznych wag musi spełniać**

$$3\kappa + 9 = 18$$

Zad. 8 Rozważmy torus maksymalny $\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix}$ w $SL_3(\mathbb{C})$, $(t_1 t_2 t_3 = 1)$. Czy funkcja

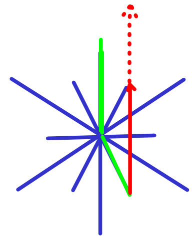
$$t_1 t_2^{-1} + t_1 t_3^{-1} + t_2 t_1^{-1} + t_2 t_3^{-1} + t_3 t_1^{-1} + t_3 t_2^{-1} + 1$$

jest charakterem pewnej reprezentacji $SL_3(\mathbb{C})$? Czy jest różnicą dwóch charakterów?

Odpowiedź:
Gdyby to był charakter reprezentacji, to zawierałaby one reprezentację najwyższej wagi $L_1 - L_3 = 2L_1 + L_2$**, czyli reprezentację dołączoną. Wtedy krotność wagi trywialnej byłaby co najmniej 2. Powyższa funkcja jest różnicą** $\chi_{ad} - \chi_{triv}$**.**

Zad. 9 Niech α, β będą pierwiastkami prostymi grupy G_2, $|\alpha| < |\beta|$. Oraz niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Wskazać jak najmniejsze $n > 0$ takie, że $(ad_Y)^n(X) = 0$.

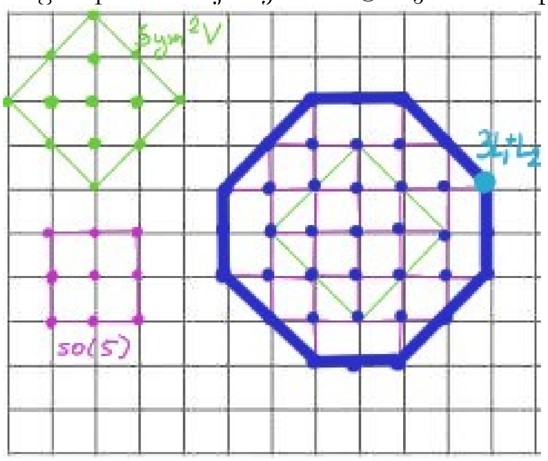
Odpowiedź:
$n = 2$**, co widać, jak się narysuje system pierwiastków.**



Zad. 10 Opisać grupę Weyla $SO(6)$ przez generatory i relacje. Ile ma ona elementów? Czy jest to jedna z dobrze znanych grup badanych na podstawowym kursie algebry?

Odpowiedź:
System pierwiastków $SO(6)$ **jest taki sam jak** $SU(4)$**. Zatem grupa Weyla jest izomorficzna z grupą permutacji** Σ_4**. Inny opis** $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \Sigma_3$**. Ma** $4! = 4 \times 3!$ **elementów.**

Zad. 11 Rozważmy reprezentacje grupy $SO_5(\mathbb{C})$: reprezentację definiującą V i dołączoną. Zaznaczyć wagi reprezentacji $Sym^2V^* \otimes \mathfrak{so}_5$. Można pominąć krotności.



Odpowiedź: Najwyższa waga jest równa $\underbrace{2L_1}_{Sym^2V^*} + \underbrace{(L_1 + L_2)}_{\mathfrak{so}_5} = 3L_1 + L_2$**.**

Zad. 12 Przedstawić reprezentacje $\mathrm{Hom}(Sym^3(\mathbb{C}^2), Sym^3(\mathbb{C}^2))$ grupy $SL_2(C)$ jako sumę reprezentacji nieprzywiedlnych.

Odpowiedź:
$\mathrm{Hom}(Sym^3(\mathbb{C}^2), Sym^3(\mathbb{C}^2)) \simeq (Sym^3(\mathbb{C}^2) \otimes Sym^3(\mathbb{C}^2))$
$\chi_{Sym^3} = t^{-3} + t^{-1} + t + t^3$
$\chi_{Sym^3 \otimes Sym^3} = (t^{-3} + t^{-1} + t + t^3)^2 = t^{-6} + 2t^{-4} + 3t^{-2} + 4 + 3t^2 + 2t^4 + t^6$
$Sym^3 \otimes Sym^3 = Sym^6 \oplus Sym^4 \oplus Sym^2 \oplus Sym^0$

Zad. 13 Rozważamy grupę $SO_8(\mathbb{C})$. Niech $Q^\vee \subset \mathfrak{t}$ będzie kratą dualną do pierwiastków. Znaleźć iloraz $Q^\vee/\mathfrak{t}_\mathbb{Z}$.

Odpowiedź:
$Q^\vee/\mathfrak{t}_\mathbb{Z} \simeq Z(SO_8) \simeq \{Id, -Id\} \simeq \mathbb{Z}_2$
lub bezpośredni rachunek: $\mathfrak{t}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^4$**,** $Q^\vee = lin\{e_1, e_2, e_3, e_4, \frac{1}{2}(e_1, +e_2 + e_3 + e_4)\}$**.**

Zad. 14 Wypisać rezolwentę Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda dla reprezentacji $Sym^3(\mathbb{C}^2)$ algebry $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Odpowiedź: Najwyższą wagą reprezentacji $Sym^3(\mathbb{C}^2)$ **jest** $\lambda = 3L_1$**. Odbicie w** $-\rho = -L_1$ **jest równe** $s_1.3L_1 = s_1(3L_1 + L_1) - L_1 = -5L_1$**.**

$$0 \to V_{-5L_1} \to V_{3L_1} \to Sym^3(\mathbb{C}^2) \to 0$$

Zad. 15 Wypisać charakter reprezentacji $Sym^k(\mathbb{C}^2)$ grupy $SL_2(\mathbb{C})$. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że jest on równy funkcji Schura dla odpowiedniej $\lambda \in \mathbb{N}^2$ i podstawienia $t_1 = t$, $t_2 = t^{-1}$.

Odpowiedź:
Dla $\lambda = (k, 0)$ **funkcja Schura jest równa**

$$\frac{\det \begin{pmatrix} t_1^{k+1} & 1 \\ t_2^{k+1} & 1 \end{pmatrix}}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^{k+1} - t_2^{k+1}}{t_1 - t_2} = \sum_{a+b=k} t_1^a t_2^b$$

Po podstawieniu

$$t^{-k} + t^{-k+2} + \cdots + t^{k-2} + t^k = \chi_{Sym^k}.$$

Zad. 16 Wskazać niezerowy element algebry Clifforda (dla odpowiednio dużego n), który nie jest odwracalny.

Odpowiedź:
Niech $x = e_1e_2e_3$**. Mamy** $x^2 = 1$**. Ponadto** $x \neq \pm 1$**.** $(1 + x)(1 - x) = 1^2 - x^2 = 0$**. Zatem elementy** $(1 + x)$ **oraz** $(1 - x)$ **nie są odwracalne.**