

## Uzasadnianie podzielności

Podczas poniższego seminarium rozwiążemy szereg nietrudnych zadań, wymagających od rozwiązującego przedstawienia uzasadnienia. Forma prezentacji zadań nie jest typowa, ale zwrócić ma uwagę na strukturę zadania i sprawić, żeby nawet na znane motywy zadaniowe (ze zbiorów czy zawodów) spojrzeć z nieco innej perspektywy.

**Zadanie 1** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

**Podaj najmniejszą**

liczbę 10-cyfrową  
zapisaną różnymi cyframi,  
która dzieli się przez 36.

Komentarz. Wprawdzie zadanie wymaga jedynie wskazania liczby spełniającej warunki, to odpowiedź wymaga przedstawienia uzasadnienia, **dlaczego** wskazana liczba jest **najmniejsza**. Czy w rozwiązaniu powyższego zadania będziemy w stanie przedstawić formalne uzasadnienie? Warto się nad tym zatrzymać i przedyskutować dopuszczalność kroku, który na użytek tego seminarium nazywam *argumentem oczywistym w kontekście zadania*.

ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że każda liczba 10-cyfrowa zapisana różnymi cyframi jest podzielna przez 9, ponieważ suma jej cyfr to

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Wystarczy zatem znaleźć najmniejszą taką liczbę 10-cyfrową zapisaną różnymi cyframi, która jest podzielna przez 4. Istotnie, podzielność przez 36 jest równoważna podzielności przez 4 i przez 9. Tego argumentu na OMJ nie trzeba uzasadniać. Jest on traktowany, jako *oczywisty w kontekście tego zadania*, choć łatwo przedstawić formalny dowód choćby za pomocą argumentów algebraicznych. Uczestnik zapewne nie widziałby takiej potrzeby.

Zauważmy, że najmniejsza liczba 10-cyfrowa, którą można zapisać różnymi cyframi jest równa

$$1023456789.$$

Ten argument nie wymaga dowodu. Również traktujemy go jako *oczywisty w kontekście tego zadania*, choć powód jest nieco inny, niż powyżej, gdzie bez żadnego problemu umiemy przedstawić formalne uzasadnienie. Również teraz jest to możliwe, ale bardziej pracochłonne (proszę spróbować zapytać chatu GPT).

Widzimy zatem, że poszukiwana przez nas liczba jest większa od powyższej. Twierdzimy, że najmniejszą liczbą podzielną przez 4 większą od powyższej liczby, jest liczba

$$1023457896.$$

Korzystamy z cechy podzielności, która mówi, że liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z jej dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 4. Gdyby jakkolwiek liczba podzielna przez 4 była mniejsza od powyższej, wówczas musielibyśmy ją utworzyć z cyfr różnych od 0, 1, 2, 3, 4, 5, ponieważ wykorzystanie którejkolwiek z nich utworzyłoby większą liczbę, niż wskazana 1023457896.

Po raz kolejny zatrzymujemy się przy *argumentcie oczywistym w kontekście zadania*. Tak wysłowny argument przekonuje nas, że rozwiązujący rzeczywiście widzi, dlaczego wykorzystanie jednej z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5 do użyskania końcówki podzielnej przez 4 nie poprawi uzyskanej wcześniej liczby podzielnej przez 4. Uczeń wskazuje, że widzi jak ograniczyć dużą liczbę przypadków i potrafi nas przekonać, że pozostaje ich niewiele.

Zatem pozostają do rozważenia liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone z cyfr 6, 7, 8, 9 i podzielne przez 4, czyli — poza 96 — jedynie 68 oraz 76. Wtedy jednak uzyskujemy liczby większe niż 1023457896:

$$1023458796, \quad 1023458976, \quad 1023459876, \quad 1023457968 \quad 1023459768.$$

Uzasadnienie jest zakończone. ■

A gdyby uczeń napisał tylko: *Odpowiedź to 1023457896, bo suma cyfr jest podzielna przez 9, a końcówka to 96. Jeśli zamienimy cyfry, to musimy dostać większą liczbę*. Jak to ocenimy? Czy jest to poprawne rozwiązanie? Czy rozwiązujący **przekonał** nas, że rozumie? Jest to dylemat przy wyborze i ocenie zadań konkursowych.

**Zadanie 2** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

*Ile jest takich*

*100-cyfrowych liczb*

*których iloczyn cyfr*

*jest równy 6*

*i które są parzyste?*

Komentarz. Po raz kolejny należy przedstawić odpowiedź liczbową, popartą jednak uzasadnieniem. Jest to zadanie, w którym mamy zliczać obiekty mające pewne cechy. Podstawowym sposobem postępowania w takiej sytuacji jest podzielenie zbioru wszystkich tych obiektów na rozłączne podzbiory, które łatwo policzyć. Innymi słowy — to klasyczne zadanie, w którym rozpatrujemy przypadki (należy też sprawdzić, czy się nie wykluczają).

ROZWIĄZANIE. Jeśli liczba naturalna ma iloczyn cyfr równy 6, to cyfry te należą do zbioru  $\{1, 2, 3, 6\}$ .

Na mocy cechy podzielności przez 2, cyfra jedności liczby parzystej jest równa 0, 2, 4, 6 lub 8. Zatem cyfra jedności każdej z rozważanych liczb jest równa 2 lub 6. Przypadki te oczywiście wykluczają się wzajemnie.

Jeśli cyfra jedności jest równa 6, to liczba 100-cyfrowa o iloczynie cyfr równym 6 ma postać

$$\underbrace{111 \dots 1}_{99 \text{ cyfr}} 6.$$

Zatem jest tylko jedna liczba spełniająca warunki zadania z cyfrą jedności 6.

Mamy też 99 liczb spełniających warunki zadania, których cyfrą jedności jest 2. Każda z tych liczb ma w zapisie dziesiętnym jedną cyfrę 2 (na końcu), jedną cyfrę 3 — na jednej z 99 pozycji oraz 98 cyfr równych 1.

Odpowiedź. Jest dokładnie 100 liczb spełniających warunki zadania. ■

**Zadanie 3** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

*Czy z liczb*

*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10*

*można ułożyć*

*kwadrat magiczny?*

Sformułowanie tego zadania można przetłumaczyć na język matematyczny pytając: czy istnieje rozwiązanie układu równań liniowych o 9 zmiennych  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  postaci

$$a + b + c = d + e + f = g + h + i = a + d + g = b + e + h = c + f + i = a + e + i = c + e + g,$$

takie, że liczby  $a, \dots, i$  są w pewnej kolejności równe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

W matematyce, w szczególności w Olimpiadzie, występuje wiele obiektów i działań typu tabele, grafy, kolorowania, przedstawiania, które są w istocie *reprezentacjami* pewnych precyzyjnie określonych obiektów czy operacji. Nie zawsze w zadaniu są one definiowane precyzyjnie — choćby pojęcia rzędu czy kolumny tabeli nie wprowadzamy jako definicji szkolnej. Stwierdzenie, że prostokątna tabela z wpisanymi w nią obiektami jest w istocie reprezentacją funkcji ze zbioru par liczb naturalnych do zbioru obiektów jest bezcelowe. Zakładamy tym samym, że i uczestnik rozwiązujący zadanie tworzyć może własne reprezentacje, korespondujące z przedstawioną w treści. Istotne jest jednak, by nie stały one w sprzeczności z kontekstem zadania, na przykład — za błędne uznane będzie zwykle w naturalnym kontekście (gdy nie ma precyzyjnego wskazania odstępstwa od normalnego rozumienia) rozpatrywanie tablicy 10 obiektów, w której pierwszy rząd ma 6 obiektów, a drugi — 4.

W poniższym rozumowaniu używamy schematu dowodu nie wprost.

ROZWIĄZANIE. Przypuśćmy nie wprost, że taki kwadrat istnieje. Wówczas suma wyrazów tego kwadratu jest równa 46. Tymczasem sumy wyrazów w każdym wierszu rozważanego kwadratu magicznego muszą być całkowite i równe  $1/3$  całej sumy, co w rozważanym przypadku jest niemożliwe, ponieważ  $46/3$  nie jest liczbą całkowitą. Sprzeczność. Kwadrat magiczny o własnościach opisanych w zadaniu nie istnieje. ■

**Zadanie 4** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

**Czy cyfry**

1, 2, 3, 4, 5, 6

**można** ustawić

w takiej kolejności,

aby otrzymać 6-cyfrową

liczbę pierwszą?

ROZWIĄZANIE. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje liczba 6-cyfrowa spełniająca warunki zadania. Wówczas suma cyfr tej liczby równa jest 21. Liczba ta jest zatem podzielna przez 3, zgodnie z cechą podzielności. Jedyną liczbą pierwszą podzielną przez 3 jest jednak liczba 3, która jest jednocyfrowa. Rozważana liczba ma natomiast sześć cyfr. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba spełniająca warunki opisane w treści zadania. ■

Warto przyjrzeć się modyfikacji tego zadania.

**Czy cyfry**

1, 2, 3, 4, 5, 6

**można** ustawić

w takiej kolejności,

aby otrzymać 6-cyfrową

liczbę podzielną przez 11?

W tym przypadku przydatna jest notacja liczby w zapisie dziesiętnym postaci  $\overline{abcdef}$ , gdzie  $a, b, c, d, e, f$  są cyframi. Zgodnie z cechą podzielności przez 11 oczekujemy, że spełniony będzie warunek

$$11 \mid a - b + c - d + e - f.$$

Ten argument na OMJ nie wymaga uzasadnienia, choć cecha podzielności przez 11 rzadko występuje w szkole. Dowód jest prosty. Mamy bowiem:

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f = 100001a + 9999b + 1001c + 99d + 11e + f - (a - b + c - d + e).$$

Zauważmy jednak, że

$$-9 = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 \leq a - b + c - d + e - f \leq 4 + 5 + 6 - 1 - 2 - 3 = 9.$$

Zatem aby liczba  $a - b + c - d + e - f$  była podzielna przez 11, musi być równa 0. To jest jednak niemożliwe. Parzystość tej liczby jest bowiem taka sama, jak parzystość liczby

$$a + b + c + d + e + f = (a - b + c - d + e - f) + 2b + 2d + 2f.$$

Natomiast suma  $a + b + c + d + e + f$  równa jest 21, czyli jest liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że również w rozważanej modyfikacji liczba spełniająca warunki zadania nie istnieje.

**Zadanie 5** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

**Każda spośród** pewnych

sześciu różnych cyfr

jest niezerowa.

**Czy można** te cyfry

zapisać w takiej kolejności,

aby otrzymać 6-cyfrową liczbę

podzielną przez 4?

Komentarz. Zadanie to można uznać z formalnego punktu widzenia za niezbyt fortunnie sformułowane. Przecież nie wiemy jakie to są owe *pewne* różne cyfry. Jeśli są to cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, to oczywiście odpowiedź brzmi: można — bierzemy liczbę 654312. Treść zadania jest jednak specjalnie napisana w ten sposób, aby sprawdzić, czy rozwiązujący umie dostrzec, że w istocie należy rozstrzygnąć, czy dla każdych sześciu różnych niezerowych cyfr istnieje taka liczba 6-cyfrowa zapisana tymi cyframi, która jest podzielna przez 4. Formalne sformułowanie ma więc posmak znany choćby z elementów analizy. Taki język stosowany w szkole podstawowej nie jest jeszcze zrozumiały. Stąd sformułowanie naraża się być może na wątpliwości, ale jest uzasadnione od strony dydaktycznej.

ROZWIĄZANIE. Odpowiedź jest negatywna. Istnieje bowiem taka szóstka różnych niezerowych cyfr 1, 3, 4, 5, 7, 9, że z tych konkretnych sześciu cyfr nie można ułożyć liczby podzielnej przez 4.

Przypuśćmy przeciwnie, że liczbę 6-cyfrową  $n$  podzielną przez 4 można ułożyć z różnych cyfr 1, 3, 4, 5, 7, 9. Wówczas na mocy cechy podzielności przez 4, liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr liczby  $n$  musi być podzielna przez 4. Jednak z różnych cyfr 1, 3, 4, 5, 7, 9 nie można ułożyć liczby dwucyfrowej podzielnej przez 4. Liczba taka musiałaby być parzysta, a więc równa jednej z liczb 14, 34, 54, 74, 94. Żadna z tych liczb nie jest jednak podzielna przez 4. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że odpowiedź postawiona na pytanie w zadaniu jest negatywna. ■

**Zadanie 6** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

**Dane są**

*liczby naturalne  $a, b, c$*

*spełniające warunek*

$$a \cdot b \cdot c = 71286.$$

**Uzasadnij, że**

*co najmniej jedna*

*z sum  $a + b, b + c$*

*nie jest podzielna przez 3.*

Komentarz. Zadanie to stanowi prosty przykład sytuacji, gdy interesują nas warunki podzielności sum liczb.

ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że suma cyfr liczby 71286 jest równa 24, czyli jest to liczba podzielna przez 3, ale nie przez 9. Stąd iloczyn  $abc$  jest liczbą podzielną przez 3, ale nie przez 9. Wynika stąd, że dokładnie jedna z liczb  $a, b, c$  jest podzielna przez 3.

Gdyby każda z liczb  $a + b, b + c$  była podzielna przez 3, wówczas:

- gdyby  $a$  była podzielna przez 3, to również  $(a + b) - a = b$ , byłaby podzielna przez 3,
- gdyby  $b$  była podzielna przez 3, to również  $(b + c) - b = c$ , byłaby podzielna przez 3,
- gdyby  $c$  była podzielna przez 3, to również  $(b + c) - c = b$ , byłaby podzielna przez 3.

Wymienione wyżej przypadki są wszystkimi możliwymi realizacjami zdania „dokładnie jedna z liczb  $a, b, c$  jest podzielna przez 3.” Z drugiej strony w każdy z tych przypadków wnioskujemy, że zdanie to nie zachodzi, co prowadzi do sprzeczności ze stwierdzeniem, że każda z liczb  $a + b, b + c$  jest podzielna przez 3. Zatem co najmniej jedna z tych sum nie jest podzielna przez 3. ■

**Zadanie 7** (*Matematyczne Gwiazdki*, Joanna i Jerzy Bednarczuk).

*Z cyfr 1, 2, ..., 8 utworzono*

*dwie liczby 4-cyfrowe,*

*wykorzystując każdą cyfrę*

*dokładnie raz.*

**Wykaż, że**

*suma uzyskanych liczb*

*jest podzielna przez 9.*

Komentarz. W tym zadaniu korzystamy z tak zwanej uogólnionej cechy podzielności przez 9. Nie jest to fakt z podstawy programowej czy większości programów matematyki w szkole podstawowej, ale jest to fakt, który bezpośrednio z podstawy wynika i uzasadniany jest tak samo, jak cecha podzielności przez 9. Oto on.

*Reszta z dzielenia liczby naturalnej  $n$  przez 9 równa jest reszcie z dzielenia przez 9 sumy cyfr liczby  $n$ .*

W przypadku liczby czterocyfrowej  $\overline{abcd}$  uzasadnienie jest natychmiastowe:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d).$$

Korzystamy również z tego, że jeśli znamy resztę  $r$  z dzielenia przez liczbę 9 liczby  $a$  oraz resztę  $s$  z dzielenia przez 9 liczby  $b$ , to reszta z dzielenia liczby  $a + b$  przez 9 jest równa reszcie z dzielenia liczby  $r + s$  przez 9. Istotnie, jeśli  $a = 9k + r$  oraz  $b = 9l + s$ , to  $a + b = 9(k + l) + (r + s)$ . Reszty z dzielenia przez 9 liczb różniących się o pewną wielokrotność 9 są natomiast równe.

Tego typu dowodów nie trzeba na OMJ przedstawiać, choć trafiają one czasem do oficjalnych rozwiązań w ramach uzupełnienia. Rezultaty te traktujemy jako zawarte w pozycji z programu merytorycznego OMJ:

*Związek pomiędzy resztami z dzielenia sumy  
(odpowiednio: iloczynu) liczb całkowitych przez daną liczbę,  
a resztami z dzielenia przez tę liczbę poszczególnych składników tej sumy  
(odpowiednio: czynników tego iloczynu).*

ROZWIĄZANIE. Korzystając z uogólnionej cechy podzielności przez 9 stwierdzamy, że jeśli utworzone liczby 4-cyfrowe są równe  $\overline{abcd}, \overline{efgh}$ , to reszta z dzielenia liczby  $\overline{abcd} + \overline{efgh}$  przez 9 równa jest reszcie z dzielenia przez 9 liczby:

$$(a + b + c + d) + (e + f + g + h) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 45.$$

Reszta z dzielenia liczby 45 przez 9 jest oczywiście równa 0. Zatem liczba  $\overline{abcd} + \overline{efgh}$  jest podzielna przez 9. ■

### Zadanie 8 (Obóz Naukowy OMJ).

*Na tablicy napisano  
trzy liczby trzycyfrowe  
o sumie równej 1000.*

*Wszystkie użyte cyfry były różne.  
Jakiej cyfry nie użyto?*

**Odpowiedź uzasadnij.**

ROZWIĄZANIE. Ponownie korzystamy z uogólnionej cechy podzielności przez 9, tym razem dla dowolnych liczb naturalnych. Oznaczmy zapisane liczby jako

$$\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi} &= 100a + 10b + c + 100d + 10e + f + 100g + 10h + i = \\ &= 9(11a + b + 11d + e + 11g + h) + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 1000.\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że liczby

$$\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}, \quad a + b + c + d + e + f + g + h + i, \quad 1000$$

dają tę samą resztę z dzielenia przez 9, czyli 1. Jeśli przez  $x$  oznaczymy cyfrę, której nie użyto w zapisie liczb  $\overline{abc}, \overline{def}, \overline{ghi}$  to możemy zapisać warunek

$$45 - x = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 - x = a + b + c + d + e + f + g + h + i.$$

Liczba  $45 - x$  daje przy dzieleniu przez 9 liczbę 1 wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 8$ . Jest to zatem szukana cyfra. ■

### Zadanie 9 (Test OMJ).

*Na tablicy napisano  
siedem różnych liczb całkowitych.*

**Uzasadnij, że**  
*suma pewnych czterech spośród nich  
jest podzielna przez 2.*

Komentarz. W rozwiązaniu tego zadania po raz kolejny wykorzystamy *argument egzystencjalny*, czyli uzasadnimy istnienie pewnego obiektu bez wskazywania go ani bez rozważania różnego typu przypadków. Korzystać będziemy z argumentu zwanego czasem *zasadą szufladkową*. Mówi on, że jeśli mamy więcej niż  $km$  obiektów o  $m$  różnych własnościach, gdzie  $k \geq 1$ , to pewne  $k + 1$  z tych obiektów mają tę samą własność (jedną z  $m$ ). Dla przykładu: wśród  $7 > 3 \cdot 2$  liczb naturalnych pewne  $3 + 1 = 4$  są parzyste lub nieparzyste (tu  $k = 3, m = 2$ ).

ROZWIĄZANIE. Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej cztery liczby parzyste lub co najmniej cztery liczby nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby zarówno liczb parzystych, jak i nieparzystych było co najwyżej trzy, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma czterech liczb parzystych oraz suma czterech liczb nieparzystych są liczbami parzystymi. ■

**Zadanie 10** (*Test OMJ*).

**Rozstrzygnij, czy istnieje**  
dodatnia liczba całkowita  $n$   
o następującej własności:

można tak przestawić cyfry  
zapisu dziesiętnego liczby  $2^n$ ,  
aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby 3.

ROZWIĄZANIE. Jeżeli  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba  $2^n$  nie jest podzielna przez 3. Wobec tego także suma cyfr zapisu dziesiętnego liczby  $2^n$  nie jest podzielna przez 3. Tymczasem liczba będąca dodatnią całkowitą potęgą liczby 3 jest podzielna przez 3, a więc suma cyfr jej zapisu dziesiętnego jest liczbą podzielną przez 3. ■

**Zadanie 11** (*Test OMJ*).

**Każda cyfra**  
pewnej 9-cyfrowej liczby  $n$   
jest równa 2 lub 5.

**Uzasadnij, że**  
liczba  $n$  jest podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE. Każda z liczb  $2 = 3 - 1$ ,  $5 = 6 - 1$  jest o 1 mniejsza od liczby podzielnej przez 3. Wobec tego suma dziewięciu liczb, z których każda jest równa 2 lub 5, jest o 9 mniejsza od sumy dziewięciu liczb podzielnych przez 3. To oznacza, że suma cyfr liczby  $n$  jest podzielna przez 3 i w konsekwencji — również liczba  $n$  jest podzielna przez 3. ■

**Zadanie 12** (*Test OMJ*).

**Rozstrzygnij, czy istnieją**  
cztery kolejne liczby całkowite,  
których suma jest  
podzielna przez 20.

ROZWIĄZANIE. Suma czterech kolejnych liczb całkowitych, najmniejszą z których jest  $n$ , wynosi

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3).$$

Dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $2n + 3$  jest nieparzysta, więc liczba  $2(2n + 3)$  nie jest podzielna przez 4. Nie jest to więc także liczba podzielna przez  $4 \cdot 5 = 20$ . ■

**Zadanie 13** (*Test OMJ*).

**Wykaż, że**  
z każdych pięciu  
dodatnich liczb całkowitych  
można wybrać takie trzy,  
których suma jest  
podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE. Rozważmy dowolne pięć liczb całkowitych i obliczmy reszty z dzielenia tych liczb przez 3. Są dwa możliwe przypadki.

- Pewna reszta  $r$  pojawia się co najmniej trzykrotnie. Wybierzmy dowolne trzy liczby dające tę resztę z dzielenia przez 3, tzn. liczby postaci  $3a + r$ ,  $3b + r$ ,  $3c + r$  dla pewnych liczb całkowitych  $a, b, c$ . Suma wybranych liczb jest równa  $(3a + r) + (3b + r) + (3c + r) = 3(a + b + c + r)$ , więc jest to liczba podzielna przez 3.
- Każda z reszt 0, 1, 2 pojawia się co najwyżej dwukrotnie. Skoro liczb jest pięć, to każda z tych reszt pojawia się co najmniej raz. Wybierzmy po jednej liczbie dla każdej z tych reszt, tzn. liczby postaci  $3a$ ,  $3b + 1$ ,  $3c + 2$  dla pewnych liczb całkowitych  $a, b, c$ . Suma tych trzech liczb jest równa  $3a + (3b + 1) + (3c + 2) = 3(a + b + c + 1)$ , więc jest liczbą podzielną przez 3. ■

**Zadanie 14** (207 dowodów matematycznych w dwóch krokach, Maria Mędrzycka).

**Wykaż, że 5 jest**  
jedyną liczbą pierwszą  $p$ ,  
dla której liczba  $3p + 1$   
jest kwadratem liczby naturalnej.

ROZWIĄZANIE. Rozważmy dowolną liczbę pierwszą  $p$  i przypuśćmy, że  $3p + 1 = n^2$ , dla pewnej liczby naturalnej  $n$ . Mamy zatem ze wzoru na różnicę kwadratów  $3p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ . Liczba  $p$  jest pierwsza, więc mamy tylko cztery przypadki do rozważenia:

- $n - 1 = 3$  i  $n + 1 = p$ ,
- $n - 1 = p$  i  $n + 1 = 3$ ,
- $n - 1 = 1$  i  $n + 1 = 3p$ ,
- $n - 1 = 3p$  i  $n + 1 = 1$ .

W pierwszym przypadku  $n = 4$  i  $p = 5$ . W drugim —  $n = 2$  i  $p = 1$ , która to nie jest liczbą pierwszą. Również w przypadkach trzecim i czwartym łatwo sprawdzamy, że  $p$  nie jest liczbą pierwszą. Dowód jest zakończony. ■

**Zadanie 15** (207 dowodów matematycznych w dwóch krokach, Maria Mędrzycka).

**Wykaż, że**  
istnieje tylko jedna  
liczba pierwsza  $p$ ,  
taka że obie liczby  
 $p + 8$  oraz  $p + 10$   
są pierwsze.

ROZWIĄZANIE. Oczywiście liczba  $p = 2$  nie spełnia warunków zadania. Spełnia je natomiast liczba  $p = 3$ , gdyż  $p + 8 = 11$  oraz  $p + 10 = 13$  są liczbami pierwszymi.

Przypuśćmy, że dla liczby pierwszej  $p > 3$  liczby  $p + 8$  oraz  $p + 10$  są pierwsze. Skoro  $p$  nie jest podzielna przez 3, to  $p = 3k + 1$  lub  $p = 3k + 2$ . W pierwszym przypadku jednak liczba  $p + 8 = 3k + 1 + 8 = 3(k + 3)$  jest liczbą złożoną, jako liczba podzielna przez 3 i większa od 3. W drugim natomiast przypadku liczba  $p + 10 = 3k + 2 + 10 = 3(k + 4)$  jest liczbą podzielną przez 3 i złożoną. Uzyskujemy sprzeczność. ■

**Zadanie 16** (OMJ, zawody II stopnia).

**Wyznacz wszystkie takie**  
dodatnie liczby całkowite  $n$ ,  
dla których obie liczby  
 $n^2 + n + 1$  oraz  $n^2 + n + 3$   
są pierwsze.

ROZWIĄZANIE. Dla  $n = 1$  obie liczby są pierwsze: wynoszą odpowiednio 3 i 5. Dla  $n = 2$  mamy  $n^2 + n + 3 = 9$ . Wykażemy, że dla  $n > 2$  co najmniej jedna z liczb  $n^2 + n + 1$ ,  $n^2 + n + 3$  jest złożona. Jeśli liczba  $n$  jest podzielna przez 3 lub przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba  $n^2 + n + 3 = n(n + 1) + 3$  jest podzielna przez 3. Ponieważ liczba  $n^2 + n + 3$  jest większa od 3, więc jest złożona. Jeśli zaś liczba  $n$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to liczba  $n^2 + n + 1$  jest podzielna przez 3. Dla  $n > 2$  liczba  $n^2 + n + 1$  jest większa od 3, a więc jest złożona. ■

**Zadanie 17** (OMJ, zawody I stopnia).

**Wyznacz wszystkie takie**  
liczby naturalne  $n$ , że liczba  $\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{99 \dots 9}_n$  jest pierwsza.

ROZWIĄZANIE. Jedyną taką liczbą jest  $n = 1$ , gdy otrzymujemy liczbę 19. Jeśli  $n \geq 2$ , to poniższa liczba jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1, więc jest liczbą złożoną.

$$\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{99 \dots 9}_n = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{100 \dots 0}_n + \underbrace{99 \dots 9}_n = \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{n-1} 9.$$

■

**Zadanie 18** (*Obóz Naukowy OMJ*).

**Znajdź wszystkie**

*liczby sześciocyfrowe*

*postaci  $\overline{aaabbb}$ ,*

*które są kwadratami liczby całkowitej.*

ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że

$$\overline{aaabbb} = 111 \cdot \overline{a00b} = 111(1000a + b).$$

Zapiszmy 111 jako iloczyn liczb pierwszych  $3 \cdot 37$ . Obie te liczby dzielą  $\overline{aaabbb}$ , więc aby była ona kwadratem, zachodzić musi podzielność

$$3^2 \cdot 37^2 \mid \overline{aaabbb}; \quad \text{czyli} \quad 111 \mid 1000a + b.$$

Skoro

$$1000a + b = 9 \cdot 111a + a + b,$$

to z powyższej podzielności wynikałoby również, że liczba 111 jest dzielnikiem liczby  $a + b$ , co nie jest możliwe, gdyż  $1 \leq a + b \leq 18$ . Zatem żadna liczba postaci  $\overline{aaabbb}$  nie jest kwadratem liczby całkowitej. ■

**Zadanie 19** (*OMJ, zawody I stopnia*).

*Do pewnej dodatniej liczby całkowitej  $n$*

*dopisano na końcu pewną cyfrę,*

*uzyskując w ten sposób liczbę*

*13 razy większą od liczby  $n$ .*

**Wyznacz wszystkie**

*liczby  $n$  o tej własności.*

ROZWIĄZANIE. Jeżeli na końcu liczby  $n$  dopiszemy cyfrę  $c$ , to otrzymamy liczbę  $10n + c$ . Wobec tego warunek zadania można zapisać jako  $10n + c = 13n$ , czyli  $c = 3n$ . Jednak  $c$  jest cyfrą, więc  $c \leq 9$ . W związku z tym  $3n \leq 9$ , czyli  $n \leq 3$ . Zatem liczba  $n$  może przyjmować jedynie wartości 1, 2 lub 3.

Z drugiej strony, dopisując po prawej stronie każdej z liczb 1, 2, 3 odpowiednio cyfry 3, 6, 9, uzyskujemy kolejno 13, 26, 39, a więc liczby 13 razy większe od wyjściowych. Zatem wszystkie liczby  $n$  o opisanej własności to 1, 2, 3. ■

**Zadanie 20** (*Folklor*).

*Dana jest prostokątna*

*tablica liczb*

*o wymiarach  $20 \times 19$ .*

**Rozstrzygnij, czy**

*w każdej komórce tej tablicy*

*można wpisać*

*dodatnią liczbę całkowitą*

*tak, aby suma liczb*

*w każdym wierszu*

*oraz suma liczb*

*w każdej kolumnie*

*była liczbą pierwszą.*

ROZWIĄZANIE. Przypuśćmy nie wprost, że teza jest prawdziwa. Każda z sum liczb wpisanych w wiersze i kolumny jest liczbą nieparzystą, gdyż jest to liczba pierwsza większa od 2.

Zauważmy, że suma liczb wpisanych w wiersze (wszystkie) równa jest sumie liczb wpisanych w kolumny — jest to po prostu suma liczb wpisanych w całą tablicę. Z jednej strony mamy 20 wierszy, więc suma liczb w tablicy jest sumą 20 liczb nieparzystych — czyli liczbą parzystą, a z drugiej strony — mamy 19 kolumn, więc suma liczb w całej tablicy jest sumą 19 liczb nieparzystych, czyli liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem, że sumy wyrazów wpisanych w każdy wiersz i w każdą kolumnę są pierwsze. ■

**Uwaga.** Rozwiązania zadań z testu oraz zawodów OMJ zostały przeze mnie zacytowane ze strony Olimpiady.