

Zagadnienia na seminarium
„Klasyczne struktury algebraiczne i ich zastosowania”, rok 2024/2025

Podstawowym źródłem zagadnień wprowadzających w klasyczną teorię pierścieni nieprze-
miennych będzie podręcznik [P] Donalda S. Passmana *A Course in Ring Theory*. Materiał
rozszerzają podręczniki [L1, L2] T. Y. Lama *A First Course in Noncommutative Rings* oraz
Lectures of Modules and Rings. Druga część seminarium oparta będzie o wybrane rozdziały
książki [ASS] I. Assema, D. Simsona i A. Skowrońskiego *Elements of the Representation
Theory of Associative Algebras. Volume 1 Techniques of Representation Theory*.

Przykładowa struktura referatu

1. Przedstawienie planu referatu. Podstawowe definicje.
2. Przykłady motywujące (warto mieć „running example”), proste własności.
3. Zapowiedź głównych wyników referatu i ich ilustracja na ważnych przykładach.
4. Prezentacja dowodów głównych rezultatów.
5. Wnioski, zastosowania, pytania otwarte (jeśli są).

Tematy wprowadzające

1. Moduły wolne i projektywne. Pierścienie z IBN. ([P], I.2)
2. Moduły półproste. Twierdzenie Jordana-Höldera. Moduły artinowskie. ([P], I.3)
3. Pierścienie artinowskie. Nil-ideały i nilradykał. Radykał Jacobsona ([P] I.5)
4. Rozkłady na sumy proste, idempotenty, twierdzenie Krulla-Schmidta ([ASS], I. 4)
5. Pierścienie lokalne. Twierdzenie Kaplansky’ego ([P] I.10)
6. Iloczyn tensorowy modułów ([P] I.9)

Tematy z teorii reprezentacji

1. Algebry bazowe, równoważność kategorii modułów (ASS, I.6)
2. Kołczany i algebry dróg (ASS. II.1).
3. Ideał dopuszczalny i ilorazy algebr dróg (ASS II.2)
4. Kołczan algebry skończenie wymiarowej (ASS II.3)
5. Reprezentacje kołczanów ograniczonych (ASS III.1)
6. Algebry skończonego typu reprezentacyjnego*

Tematy dodatkowe

1 Odwracalność macierzy nad pierścieniami nieprzemiennymi

- 1 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.
- 2 N. Cohen, S. de Leo, *Quaternionic matrices: inversion and determinant*, Electronic Journal of Linear Algebra.
- 3 R.N. Gupta a, A. Khurana, D. Khurana, T.Y. Lam, *Rings over which the transpose of every invertible matrix is invertible*, *Journal of Algebra* 322 (2009).

2 Orbity działania grupy macierzy górnotrójkątnych

- (1) A. Melnikov, *B-Orbits in Solutions to the Equation $X^2 = 0$ in Triangular Matrices*, *J. Algebra* 223 (2000), 101-108.
- (2) D.Ž. Djoković, J. Malzan, *Orbits of Nilpotent Matrices*, *Linear Algebra and its Applications*, 32 (1980), 157-158.
- (3) M. Boos, M. Reineke, *B-orbits of 2-nilpotent matrices and generalizations*, Highlights in Lie Algebraic Methods, Birkhauser 2012.

3 Prime avoidance lemma

- (1) M. F. Atiyah, I.G. MacDonald *Introduction To Commutative Algebra*, CRC Press 1994.
- (2) O. A. Karamzadeh, *The prime avoidance lemma revisited*, *Kyungpook Math. J.* 52 (2012) 149-153.
- (3) J. Chen, *Infinite prime avoidance*.
- (4) A. Tarizadeh, J. Chen, *Avoidance and absorbance*, *J. Algebra* 582 (2021), 88-99.

4 Kombinatoryczne Nullstellensatz

- (1) A. Noga, *Combinatorial Nullstellensatz*, *Combinatorics, Probability and Computing* 8 (1999), str. 7–29.
- (2) Y. Alexandr, *Combinatorial Nullstellensatz: Various Proofs, Extensions and Applications*, praca dyplomowa.
- (3) M. Michałek, *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, *American Mathematical Monthly* 117 (2010), 821–823.
- (4) J. Dymel, O zastosowaniach Combinatorial Nullstellensatz, *Delta* 7/2017.

5 Miara modułu i twierdzenia o pierścieniach i modułach artinowskich

- (1) Leyba D., Mesyan Z., Oman G., *Unifying some classical results on Artinian rings and modules*, <https://arxiv.org/abs/2407.20488>