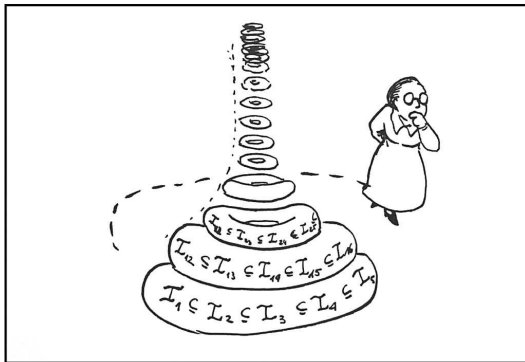


JERZY MATCZUK, ARKADIUSZ MĘCEL

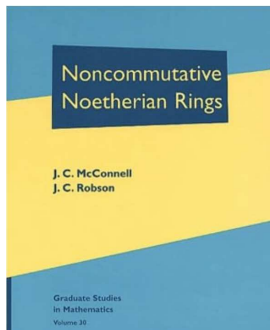


Emmy Noether (1882–1935). Źródło: Constanza Rojas-Molina.

KLASYCZNE STRUKTURY ALGEBRAICZNE I ICH ZASTOSOWANIA
SEMINARIUM MAGISTERSKIE W ROKU AKADEMICKIM 2025/26

Temat przewodni:

NIEPRZEMIENNE PIERŚCIEŃE NOETHEROWSKIE



Czym są pierścienie noetherowskie?

Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym).
Zwykle zakładamy, że ma jedynekę. Mówimy, że R jest

Czym są pierścienie noetherowskie?

Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym).

Zwykle zakładamy, że ma jedynkę. Mówimy, że R jest

❶ **lewostronnie Noetherowski**, jeśli każdy wstępujący ciąg lewostronnych ideałów

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \cdots$$

stabilizuje się, tzn. istnieje N takie, że dla $n \geq N$ mamy $L_n = L_{n+1}$.

Czym są pierścienie noetherowskie?

Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym).

Zwykle zakładamy, że ma jedynekę. Mówimy, że R jest

- 1 **lewostronnie Noetherowski**, jeśli każdy wstępujący ciąg lewostronnych ideałów

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \cdots$$

stabilizuje się, tzn. istnieje N takie, że dla $n \geq N$ mamy $L_n = L_{n+1}$.

- 2 **prawostronnie Noetherowski**, jeśli analogicznie każdy wstępujący ciąg prawostronnych ideałów stabilizuje się.

Czym są pierścienie noetherowskie?

Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym).

Zwykle zakładamy, że ma jedynkę. Mówimy, że R jest

- 1 **lewostronnie Noetherowski**, jeśli każdy wstępujący ciąg lewostronnych ideałów

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \dots$$

stabilizuje się, tzn. istnieje N takie, że dla $n \geq N$ mamy $L_n = L_{n+1}$.

- 2 **prawostronnie Noetherowski**, jeśli analogicznie każdy wstępujący ciąg prawostronnych ideałów stabilizuje się.

- 3 **dwustronnie Noetherowski**, jeśli jest lewo- i prawostronnie noetherowski.

Znamy wiele pierścieni noetherowskich!

Znamy wiele pierścieni noetherowskich!

- pierścienie przemienne
 - algebra — ciała, pierścienie skończone, pierścienie ideałów głównych, wielomiany przemienne $K[x_1, \dots, x_n]$ i ich ilorazy,
 - geometria — lokalne noetherowskie, np. $K[x, y]_{(x, y)}$
 - teoria liczb — dziedziny Dedekinda (rozkład na ideały pierwsze), np. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
 - inne — regularne lokalne, Gorensteina, Cohena–Macaulaya, itd.

Znamy wiele pierścieni noetherowskich!

- pierścienie przemienne
 - algebra — ciała, pierścienie skończone, pierścienie ideałów głównych, wielomiany przemienne $K[x_1, \dots, x_n]$ i ich ilorazy,
 - geometria — lokalne noetherowskie, np. $K[x, y]_{(x, y)}$
 - teoria liczb — dziedziny Dedekinda (rozkład na ideały pierwsze), np. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
 - inne — regularne lokalne, Gorensteina, Cohena–Macaulaya, itd.
- pierścienie nieprzemienne:
 - macierze nad pierścieniami noetherowskimi, np. $M_2(k[x])$
 - algebry Weyla, np. $A_1(K) = K\langle x, \partial \mid [\partial, x] = 1 \rangle$
 - algebry obwiednie skończenie wymiarowych algebr Liego, np. $U(\mathfrak{sl}_2)$
 - rozszerzenia Ore typu $R[x; \sigma, \delta]$, np. $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}[y; \sigma]/(y^2 + 1)$, $\sigma(a + bi) = a - bi$,
 - algebry kwantowe, np. $K\langle x, y \rangle/(xy - qyx)$
 - szczególne klasy: PI (tożsamości wielomianowe), FBN, niektóre algebry grupowe...

Noetherowskie pierścienie przemienne vs nieprzemienne

struktura	przemienne	nieprzemienne
rodzaje ideałów	maksymalne, pierwsze, półpierwsze, prymarne	nieprzemienne odmiany, ideały jednostronne!
rozkład prymarny	zawsze, jednoznaczny (dla dowolnego ideału)	FBN, PI, AS, artinowski (dwustronnie noether.)
lokalizacja	dowolny zbiór multiplikatywny	wymaga warunku Ore ułamki Ore'go
pierścień ułamków	ciało (dla dziedzin)	półproste artinowskie (półpierwsze pr. Goldie)
rozszerzenia	R -noetherowski $R[x]$ — też	rozszerzenia Ore'go $R[x; \sigma, \delta]$ — kiedy?
wymiar	Krulla (skończony)	GK-wymiar, gl.dim
algorytmy	$I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$, skończ. baza Gröbnera	$I \triangleleft K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ nieskończona baza?

Strona internetowa seminarium:

`https://mimuw.edu.pl/~amecel/semalg.html`.

Przykładowe tematy z poprzednich lat:

- Pierwiastki wielomianów nad pierścieniami nieprzemiennymi
- Rozpoznawanie pierścieni macierzy
- Iloczyn tensorowy, algebry centralne proste i grupa Brauera
- Spektralna teoria grafów
- Reprezentacje kołczanów

Ścieżka naukowa — prace prezentowane na seminarium badawczym **Algebra**

- Rozpoznawanie pierścieni macierzy
- O zanurzaniu dziedzin w pierścienie z dzieleniem
- Podpierścienie generowane przez elementy odwracalne
- Produkty wolne w grupach jedności pierścieni grupowych
- Algebry automatowe i algebry ze skończoną bazą Gröbnera
- Algebraiczne własności monoidu plaktycznego i algebry plaktycznej
- Struktura i własności monoidów oraz algebr Hecke-Kiselman