

Zagadnienia na seminarium
„Klasyczne struktury algebraiczne i ich zastosowania”, rok 2025/2026

Zasadnicza część seminarium oparta będzie o wybrane rozdziały książki J. C. McConnella i J. C. Robsona *Noncommutative Noetherian Rings* [MR]. Ogólnym źródłem wprowadzającym w klasyczną teorię pierścieni nieprzemiennych jest podręcznik T. Y. Lamy *A First Course in Noncommutative Rings* [L].

Przykładowa struktura referatu

1. Przedstawienie planu referatu. Podstawowe definicje.
2. Przykłady motywujące (warto mieć „running example”), proste własności.
3. Zapowiedź głównych wyników referatu i ich ilustracja na ważnych przykładach.
4. Prezentacja dowodów głównych rezultatów.
5. Wnioski, zastosowania, pytania otwarte (jeśli są).

Tematy wprowadzające z rozdziału 1 [MR]

1. Noetherowskość i artinowskość. Pierścienie macierzowe
— [MR] §1 oraz [L], 1.12-1.24
2. Konstrukcje i przykłady pierścieni noetherowskich I
 - (a) Pierścienie skośnych wielomianów
— [MR] §2 oraz [L] 1.9, 1.25-1.26
 - (b) Algebry Weyla
— [MR] §3
3. Konstrukcje i przykłady pierścieni noetherowskich II
 - (a) Szeregi i wielomiany Laureanta
— [MR] §4 oraz [L] §1, 1.5-1.8
 - (b) Algebry grupowe i pokrewne konstrukcje
— [MR] §5 oraz [L] 1.11
4. Konstrukcje i przykłady pierścieni noetherowskich III
 - (a) Skośne wielomiany wielu zmiennych
— [MR] §6

- (b) Algebry obwiednie, twierdzenie Poincare-Birkhoffa-Witta (sformułowanie oraz dowód noetherowskości algebr obwiednich skończenie wymiarowych algebr Liego — [MR] §7 oraz [L] 1.10
- 5. Pierścienie proste noetherowskie i nienoetherowskie
— [MR] §8 oraz [L] §2, str. 39-45.

Tematy dodatkowe

1 Odwracalność macierzy nad pierścieniami nieprzemiennymi

- 1 T.Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, ed 2, Springer 2001.
- 2 N. Cohen, S. de Leo, *Quaternionic matrices: inversion and determinant*, Electronic Journal of Linear Algebra.
- 3 R.N. Gupta a, A. Khurana, D. Khurana, T.Y. Lam, *Rings over which the transpose of every invertible matrix is invertible*, *Journal of Algebra* 322 (2009).

2 Orbity działania grupy macierzy górnotrójkątnych

- (1) A. Melnikov, *B-Orbits in Solutions to the Equation $X^2 = 0$ in Triangular Matrices*, *J. Algebra* 223 (2000), 101-108.
- (2) D.Ž. Djoković, J. Malzan, *Orbits of Nilpotent Matrices*, *Linear Algebra and its Applications*, 32 (1980), 157-158.
- (3) M. Boos, M. Reineke, *B-orbits of 2-nilpotent matrices and generalizations*, *Highlights in Lie Algebraic Methods*, Birkhauser 2012.

3 Prime avoidance lemma

- (1) M. F. Atiyah, I.G. MacDonald *Introduction To Commutative Algebra*, CRC Press 1994.
- (2) O. A. Karamzadeh, *The prime avoidance lemma revisited*, *Kyungpook Math. J.* 52 (2012) 149-153.
- (3) J. Chen, *Infinite prime avoidance*.
- (4) A. Tarizadeh, J. Chen, *Avoidance and absorbance*, *J. Algebra* 582 (2021), 88-99.

4 Miara modułu i twierdzenia o pierścieniach i modułach artinowskich

- (1) Leyba D., Mesyan Z., Oman G., *Unifying some classical results on Artinian rings and modules*, <https://arxiv.org/abs/2407.20488>