

UKRYTE OBLICZE ZADAŃ

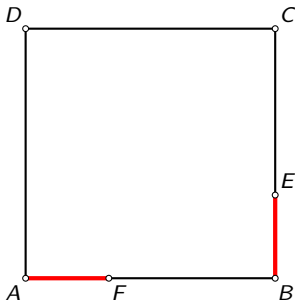


Arkadiusz Męcel

Konferencja SEM „Oblicza Matematyki”, 17-19.10.2025 r.

Oto zadanie

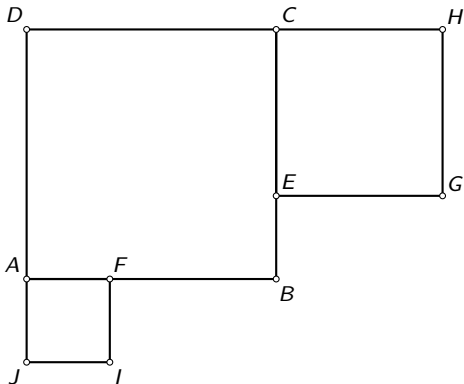
Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$
leżą takie punkty, odpowiednio, F i E ,
że $AF = BE$.



Oto zadanie

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ leżą takie punkty, odpowiednio, F i E , że $AF = BE$.

Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudowano kwadraty $AFIJ$ oraz $CEGH$.

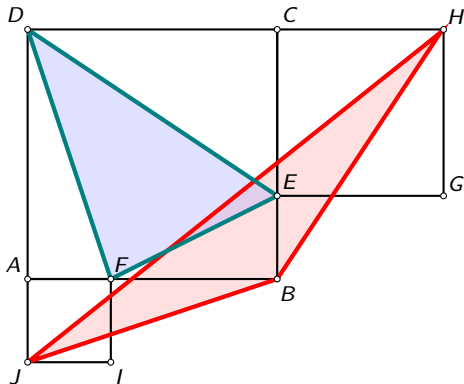


Oto zadanie

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ leżą takie punkty, odpowiednio, F i E , że $AF = BE$.

Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudowano kwadraty $AFIJ$ oraz $CEGH$.

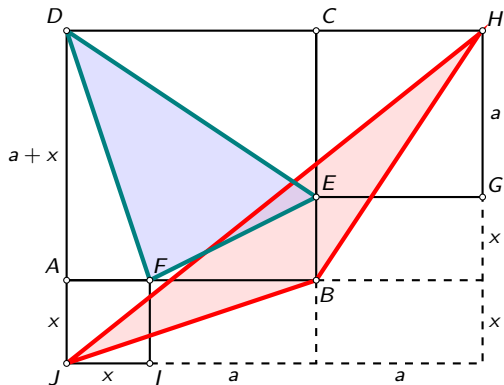
Wykaż, że trójkąty DEF i BHJ mają równe pola.



CO WIDZISZ?

Podejście pierwsze — liczymy!

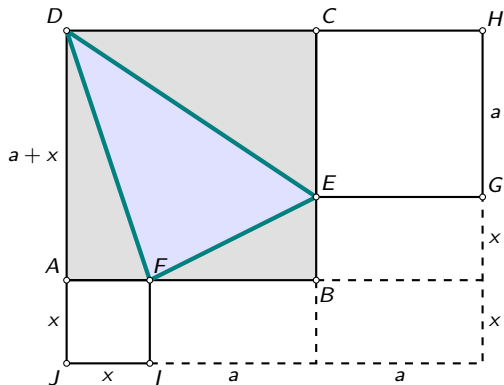
Niech $x = AF = BE$ oraz $a = FB = CE$.



Podejście pierwsze — liczymy!

Niech $x = AF = BE$ oraz $a = FB = CE$.

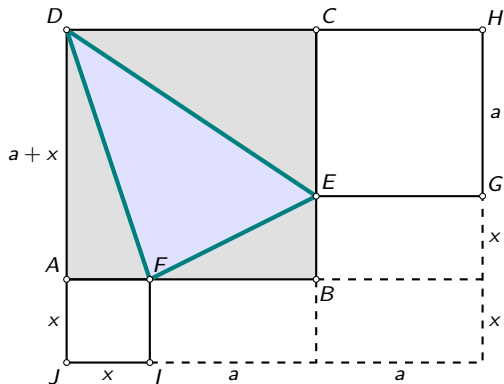
$$[DEF] = [ABCD] - [AFD] - [BEF] - [CDE].$$



Podejście pierwsze — liczymy!

Niech $x = AF = BE$ oraz $a = FB = CE$.

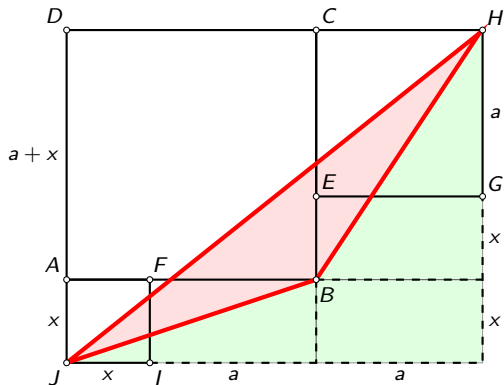
$$[DEF] = (a+x)^2 - \frac{1}{2}(a(a+x)) - \frac{1}{2}(x(a+x)) - ax = \frac{1}{2}(a^2 + x^2 + ax).$$



Podejście pierwsze — liczymy!

Niech $x = AF = BE$ oraz $a = FB = CE$.

$$[BHJ] = \frac{1}{2}((a + 2x)(2a + x) - a(a + x) - x(a + x) - 2ax)$$



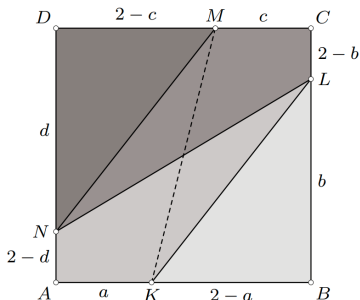
Morał 1. Tak można rozwiązywać wiele zadań! Warto ich poszukać...

XIX OMJ, II etap, Zadanie 4.

Punkty K , L , M , N leżą odpowiednio na bokach AB , BC , CD , DA kwadratu $ABCD$.

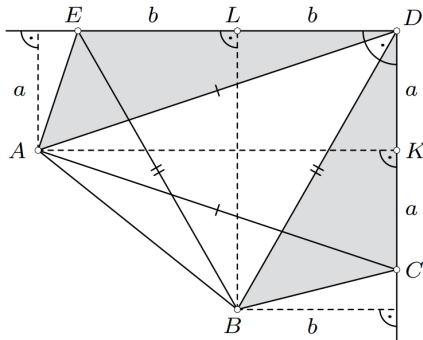
Odcinki KL , MN , LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

Udowodnij, że odcinki KL , MN , KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.



XVII OMJ, II etap, Zadanie 4.

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

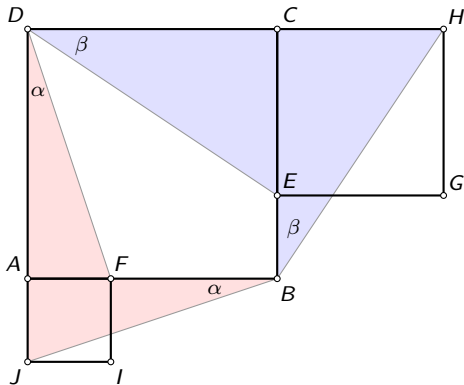


CZEGO NIE WIDZISZ?

Podejście drugie – ukryty punkt!

Zauważamy, że

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABJ = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CBH = \beta.$$

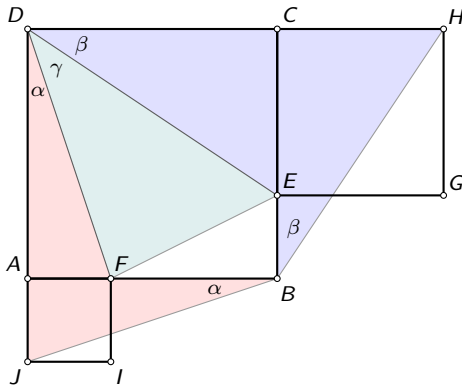


Podejście drugie – ukryty punkt!

Zauważamy, że

$$\angle ADF = \angle ABJ = \alpha \quad \text{oraz} \quad \angle CDE = \angle CBH = \beta.$$

Gdzie jest jeszcze kąt o mierze $\gamma = \angle EDF$?

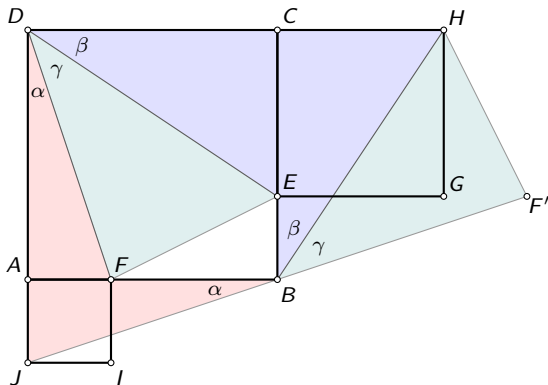


Podejście drugie – ukryty punkt!

Zauważamy, że

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABJ = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CBH = \beta.$$

Niech F' będzie punktem na prostej JB , takim że B jest środkiem JF' .



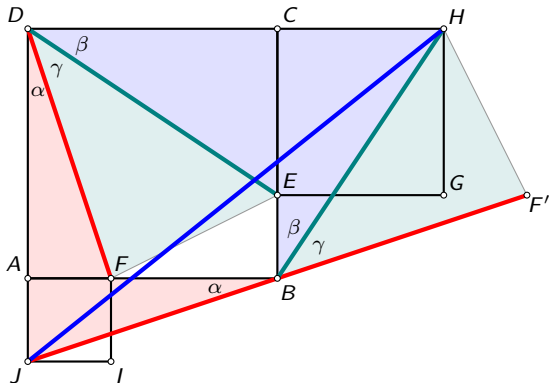
Podejście drugie – ukryty punkt!

Zauważamy, że

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABJ = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CBH = \beta.$$

Niech F' będzie punktem na prostej JB , takim że B jest środkiem JF' .

Wówczas $[DFE] = [BF'H] = [JBH]$.



I ten sam morał — szukajmy podobnych zadań

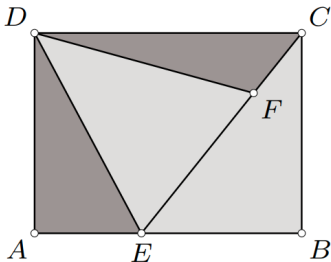
XVIII OMJ, I etap, Zadanie 3.

Dany jest prostokąt $ABCD$.

Punkt E leży na boku AB ,

a punkt F leży na odcinku CE .

Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola,
to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



I ten sam morał — szukajmy podobnych zadań

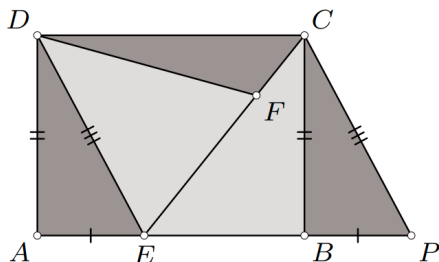
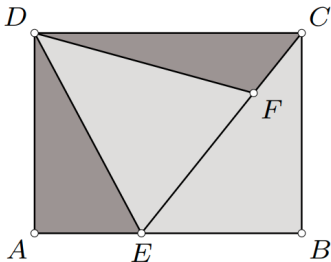
XVIII OMJ, I etap, Zadanie 3.

Dany jest prostokąt $ABCD$.

Punkt E leży na boku AB ,

a punkt F leży na odcinku CE .

Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola,
to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



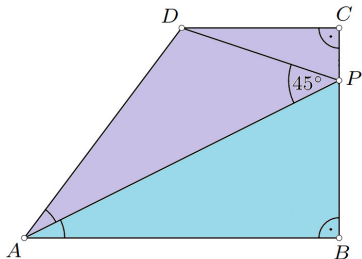
I ten sam morał — szukajmy podobnych zadań

XIV OMJ, II etap, Zadanie 2.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD ,
w którym $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

Dwusieczna kąta BAD
przecina odcinek BC w punkcie P .

Wykaż, że jeśli $\sphericalangle APD = 45^\circ$,
to pole czworokąta $APCD$
jest równe polu trójkąta ABP .



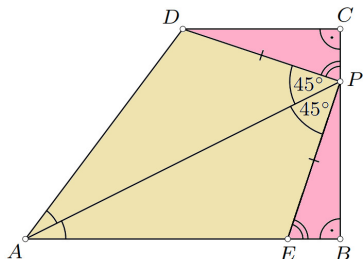
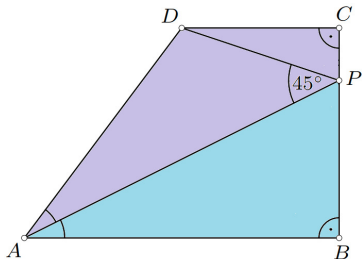
I ten sam morał — szukajmy podobnych zadań

XIV OMJ, II etap, Zadanie 2.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD ,
w którym $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

Dwusieczna kąta BAD
przecina odcinek BC w punkcie P .

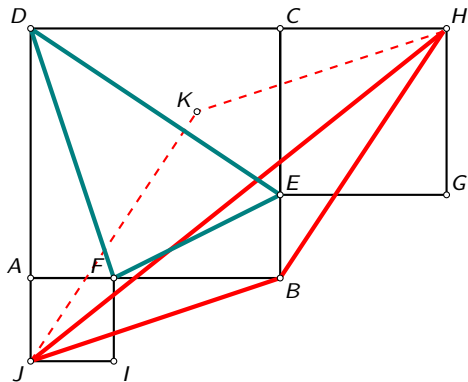
Wykaż, że jeśli $\sphericalangle APD = 45^\circ$,
to pole czworokąta $APCD$
jest równe polu trójkąta ABP .



RUSZ COŚ!

Podejście trzecie — przesun!

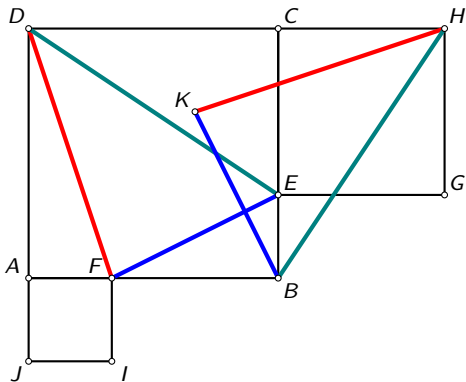
Niech K będzie takim punktem wewnątrz kwadratu $ABCD$,
że czworokąt $JBHK$ jest **równoległobokiem**.



Podejście trzecie — przesun!

Niech K będzie takim punktem wewnątrz kwadratu $ABCD$,
że czworokąt $JBHK$ jest **równoległobokiem**.

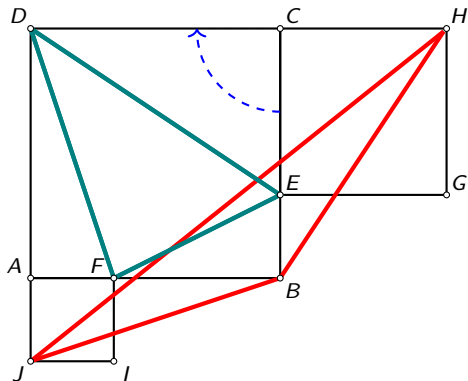
Zatem $[BHJ] = [BHK]$. Natomiast $\triangle BHK \equiv \triangle EDF$.



Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót wokół punktu C o kąt -90° .

Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczać będziemy X' .

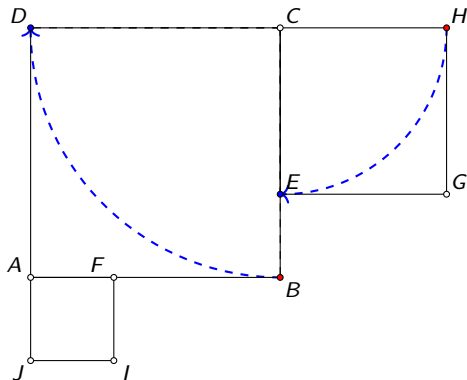


Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót wokół punktu C o kąt -90° .

Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczamy będziemy X' .

Mamy $B' = D$, $H' = E$.

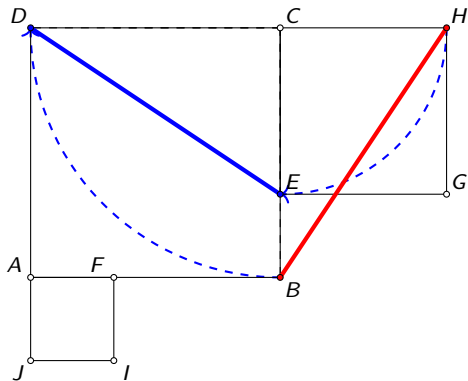


Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót wokół punktu C o kąt -90° .

Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczać będziemy X' .

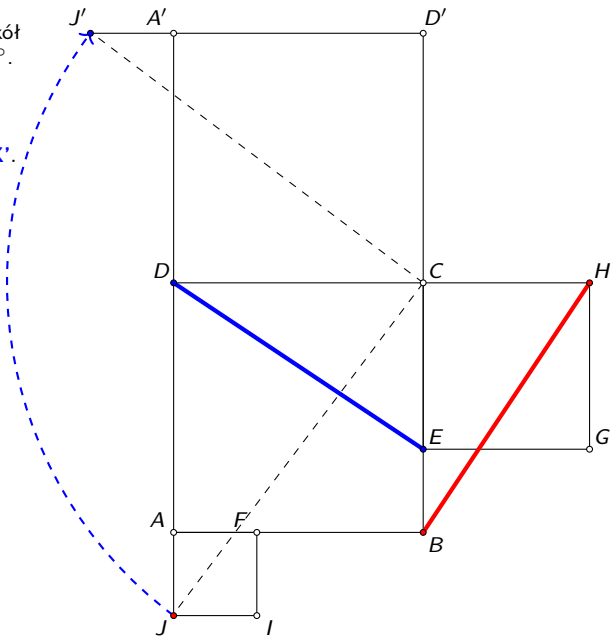
Mamy $B' = D$, $H' = E$.



Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót wokół punktu C o kąt -90° .

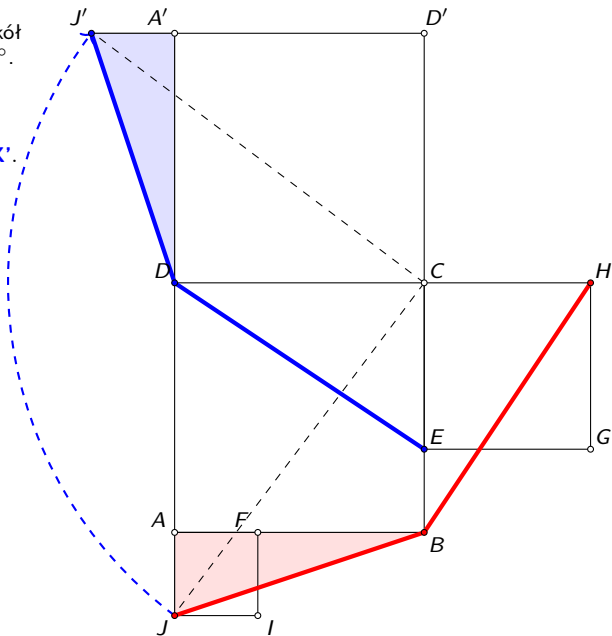
Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczać będziemy X' .



Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót wokół punktu C o kąt -90° .

Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczać będziemy X' .



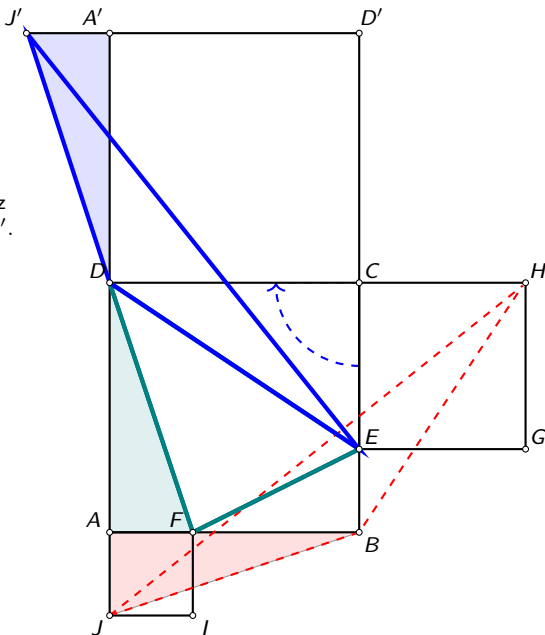
Podejście czwarte — ukryty obrót!

Rozważmy obrót dookoła punktu C o kąt -90° .

Obraz punktu X przy tym obrocie oznaczać będziemy X' .

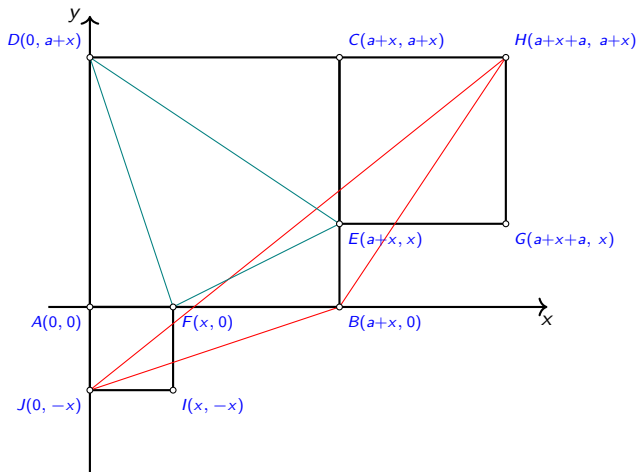
Mamy $B' = D$, $H' = E$ oraz $\triangle ABJ \equiv \triangle ADF \equiv \triangle A'DH'$.

W rezultacie
 $[JBH] = [J'DE] = [DFE]$.



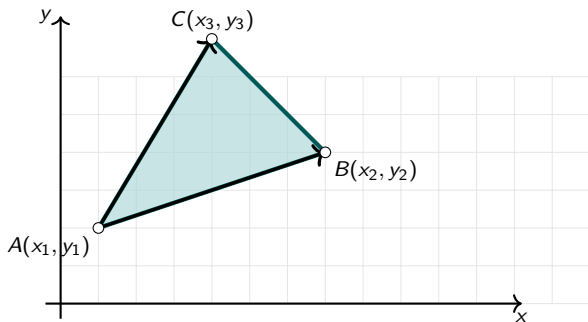
UŻYJ WZORU!

Podejście piąte — wzór!



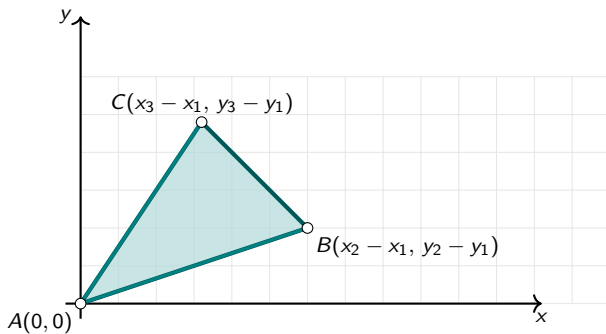
Podejście piąte — wzór!

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$?



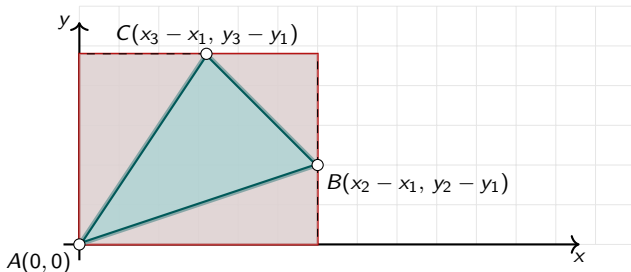
Podejście piąte — wzór!

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $C(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$?



Podejście piąte — wzór: **pochodzi z podejścia pierwszego!**

Pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $C(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$?



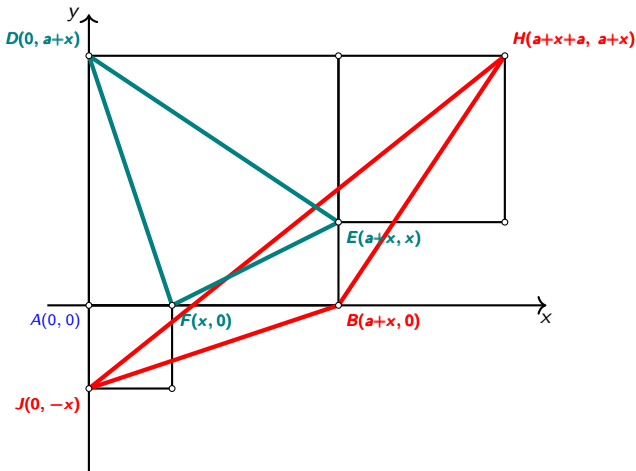
Idea: pole prostokąta $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$ minus trzy trójkąty prostokątne:

$$[ABC] = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$- \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Podejście piąte — wzór: **pochodzi z podejścia pierwszego!**

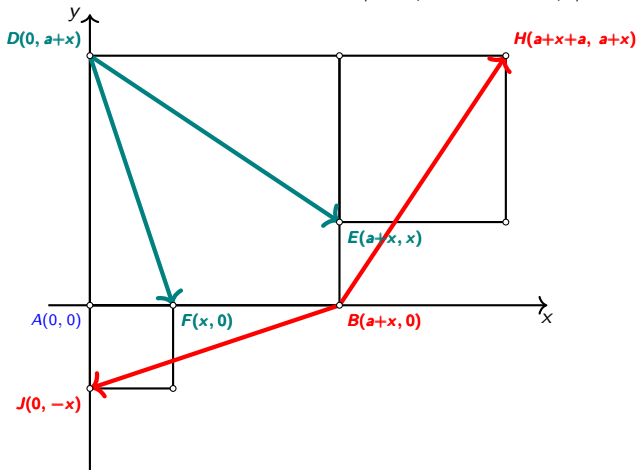
$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 0 & a+x & 1 \\ a+x & x & 1 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a+x & 0 & 1 \\ 2a+x & a+x & 1 \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} (a^2 + ax + x^2).$$



Podejście piąte — mamy przecież także inny wzór!

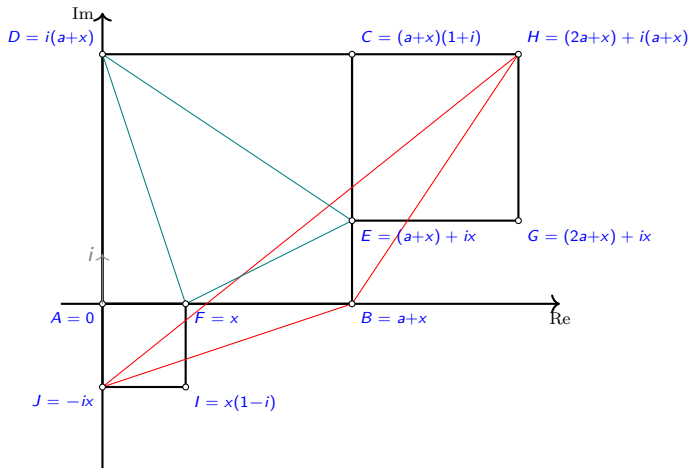
$$\overrightarrow{BH} = (a, a+x), \quad \overrightarrow{BJ} = (-a-x, -x), \quad \text{więc } [BHJ] = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a & -a-x \\ a+x & -x \end{pmatrix} \right|.$$

$$\overrightarrow{DE} = (a+x, -a), \quad \overrightarrow{DF} = (x, -a-x), \quad \text{więc } [DEF] = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a+x & x \\ -a & -a-x \end{pmatrix} \right|.$$



Szóste podejście — popularne na OM **liczby zespolone!**

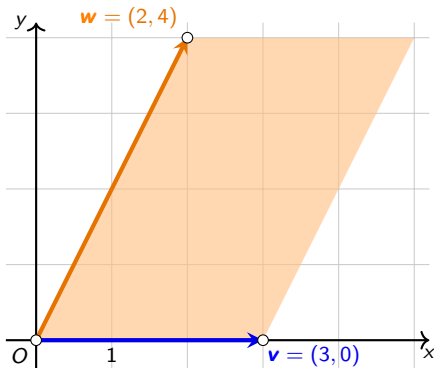
$$[xyz] = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}((y - x) \overline{(z - x)}) \right|.$$



STRUKTURY!

Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Niech $R(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ — równoległobok rozpięty na wektorach $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Rozważamy **pole skierowane** $R(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, oznaczając je za pomocą **dwuwektora** $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. Ten zapis jednak nie oznacza liczby, ale funkcję zależności od pola równoległoboku jednostkowego.



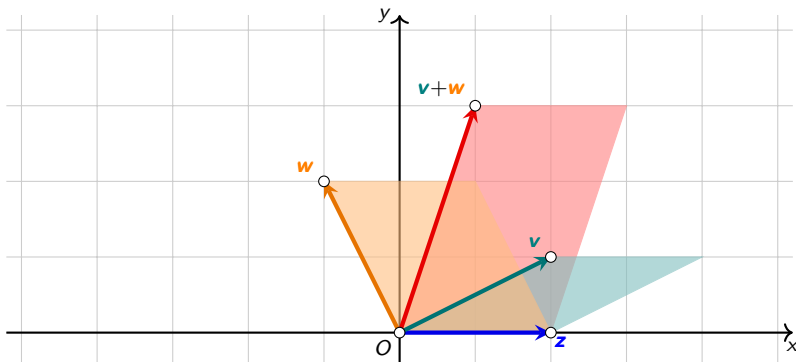
Gdy $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1$ oraz $\mathbf{w} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$, gdzie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — wektory bazowe. Najczęściej przyjmujemy $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = 1$. Wtedy $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 12$ oraz $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v} = -12$. A ogólnie?

Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Własności dwuwektorów

(1) Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ mamy

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge \mathbf{z} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{z}) + (\mathbf{w} \wedge \mathbf{z})$$

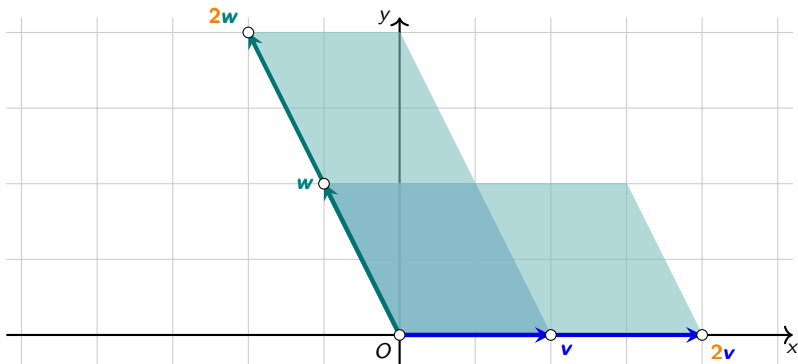


Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Własności dwuwektorów

(2) Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej a

$$a\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge a\mathbf{w} = a \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

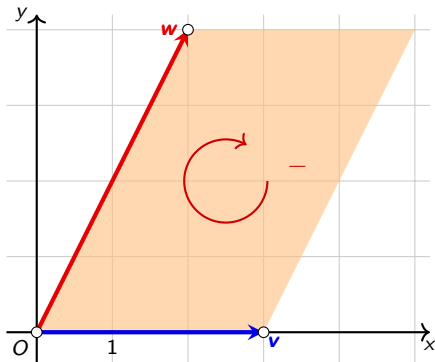
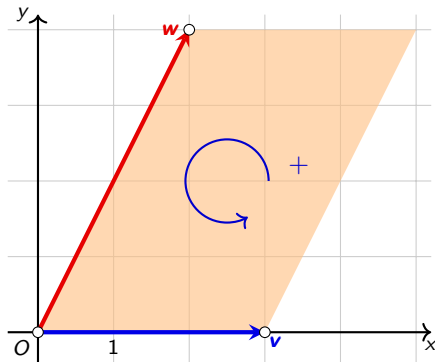


Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Własności dwuwektorów

(3) Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})$$



Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Wprowadzając współrzędne wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

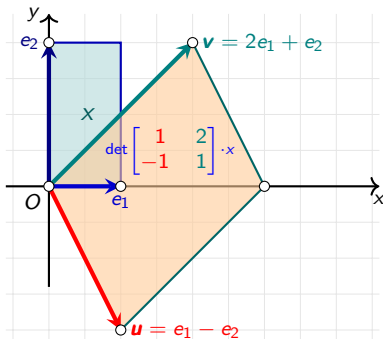
$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$$

mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= u_1 v_1 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + u_1 v_2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + u_2 v_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + u_2 v_2 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) = \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2), \end{aligned}$$

czyli

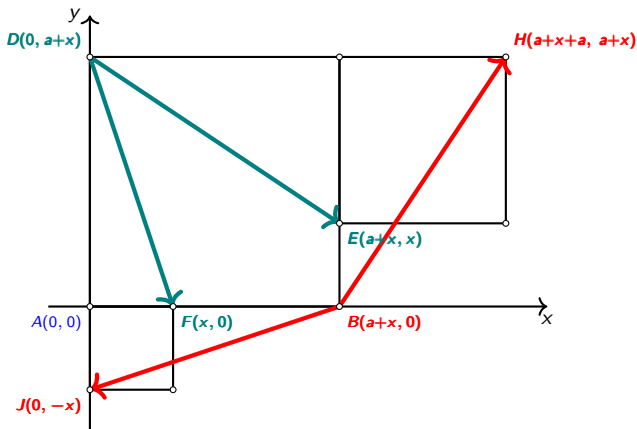
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2), \quad [\triangle PQR] = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR})|.$$



Podejście siódme — rachunek dwuwektorów, czyli „zalgabraizowane pole”

Mamy $\overrightarrow{DE} = (a+x)e_1 - ae_2$ oraz $\overrightarrow{DF} = xe_1 - (a+x)e_2$, a stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF} &= (a+x)(-(a+x))(e_1 \wedge e_2) + (-a)x(e_2 \wedge e_1) \\ &= \left(-(a+x)^2 + ax\right)(e_1 \wedge e_2) = -(a^2 + ax + x^2)(e_1 \wedge e_2),\end{aligned}$$



Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech $\mathbb{R}^2$ będzie przestrzenią afiniczną. Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = 0.$$

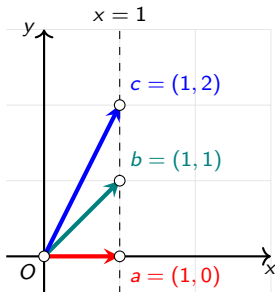
Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech $\mathbb{R}^2$ będzie przestrzenią afiniczną. Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = 0.$$

Czy to ma sens? Tak — **nieważne, ile wynosi** $e_1 \wedge e_2$!

Niech na przykład $(1, 0) \wedge (0, 1) = 1$.



Mamy $a \wedge b = 1$, $b \wedge c = 1$ $c \wedge a = -2$.

Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech $\mathbb{R}^2$ będzie przestrzenią afiniczną. Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = 0.$$

Dowód. Jeśli

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad b = y_1 e_1 + y_2 e_2, \quad c = z_1 e_1 + z_2 e_2,$$

wówczas wektor $a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a$ to:

$$[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 x_2 - z_2 x_1)](e_1 \wedge e_2) = 0.$$

Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech $\mathbb{R}^2$ będzie przestrzenią afiniczną. Punkty a, b, c są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a = 0.$$

Dowód. Jeśli

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad b = y_1 e_1 + y_2 e_2, \quad c = z_1 e_1 + z_2 e_2,$$

wówczas wektor $a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a$ to:

$$[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 z_2 - y_2 z_1) + (z_1 x_2 - z_2 x_1)](e_1 \wedge e_2) = 0.$$

A zatem wektor powyższy równy jest zero wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

który to wyznacznik jest jak wiemy polem trójkąta o wierzchołkach a, b, c .

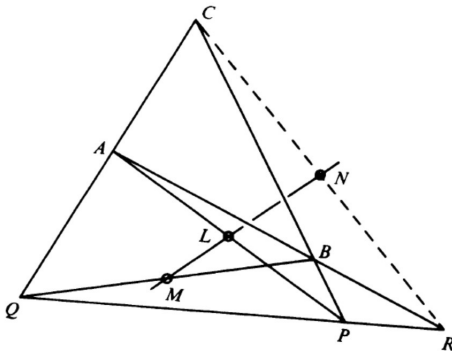
Wiemy to z podejścia pierwszego!

Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech A, B, P, Q będą takimi punktami na płaszczyźnie, że żadne trzy z prostych AB, BP, PQ, QA nie są współliniowe.

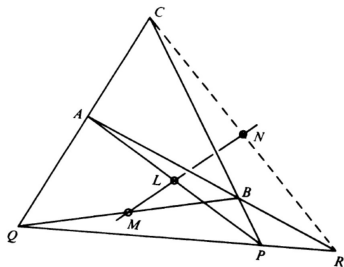
Proste AQ oraz BP przecinają się w punkcie C ,
zaś proste AB, PQ przecinają się w punkcie R .

Wykaż, że środki odcinków AP, BQ, CR są współliniowe.



Współliniowość w języku dwuwektorów — jedno równanie

Niech A, B, P, Q będą takimi punktami na płaszczyźnie, że żadne trzy z prostych AB, BP, PQ, QA nie są współliniowe. Niech $C = AQ \cap BP$, zaś proste $R = AB \cap PQ$. Wykaż, że środki odcinków AP, BQ, CR są współliniowe.



Niech L, M, N będą środkami odcinków AP, BQ, CR . Wówczas mamy:

$$2L = A + P, \quad 2M = B + Q, \quad 2N = C + R.$$

Wówczas:

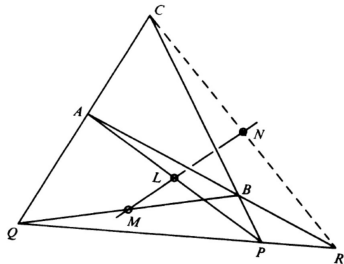
$$4L \wedge M = (A + P) \wedge (B + Q) = A \wedge B + A \wedge Q + P \wedge B + P \wedge Q,$$

$$4M \wedge N = (B + Q) \wedge (C + R) = B \wedge C + B \wedge R + Q \wedge C + Q \wedge R$$

$$4N \wedge L = (C + R) \wedge (A + P) = C \wedge A + C \wedge P + R \wedge A + R \wedge P.$$

Twierdzenie Newtona w języku dwuwektorów

Niech A, B, P, Q będą takimi punktami na płaszczyźnie, że żadne trzy z prostych AB, BP, PQ, QA nie są współliniowe. Niech $C = AQ \cap BP$, zaś proste $R = AB \cap PQ$. Wykaż, że środki odcinków AP, BQ, CR są współliniowe.



Widzimy, że skoro punkty A, B, R są współliniowe, podobnie trójki A, Q, C, P, B, C oraz P, Q, R są odpowiednio współliniowe, czyli

$$A \wedge B + B \wedge R + R \wedge A = 0,$$

$$A \wedge Q + Q \wedge C + C \wedge A = 0,$$

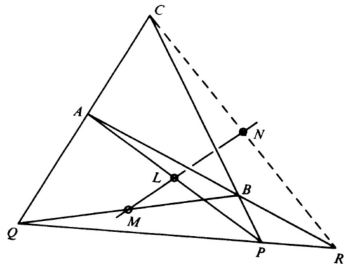
$$P \wedge B + B \wedge C + C \wedge P = 0,$$

$$P \wedge Q + Q \wedge R + R \wedge P = 0.$$

Stąd po dodaniu równań po prawej stronie nic nie zostaje, a na lewej...

Twierdzenie Newtona w języku dwuwektorów

Niech A, B, P, Q będą takimi punktami na płaszczyźnie, że żadne trzy z prostych AB, BP, PQ, QA nie są współliniowe. Niech $C = AQ \cap BP$, zaś proste $R = AB \cap PQ$. Wykaż, że środki odcinków AP, BQ, CR są współliniowe.



Stąd po dodaniu równań po prawej stronie nic nie zostaje, czyli uzyskujemy

$$4L \wedge M + 4M \wedge N + 4N \wedge L = 0$$

co po uproszczeniu daje równość

$$L \wedge M + M \wedge N + N \wedge L = 0.$$

Zatem punkty L, M, N leżą na jednej prostej.

Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

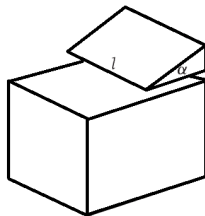
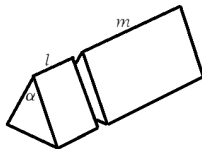
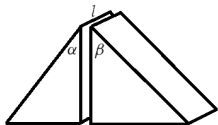
Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

Trzy zasady krojenia wielościanów:

- (1) $l \otimes (\alpha + \beta) = l \otimes \alpha + l \otimes \beta$,
- (2) $(l + m) \otimes \alpha = l \otimes \alpha + m \otimes \alpha$,
- (3) $l \otimes \pi = 0$, przy czym to nie jest zwykłe zero, ale zero w $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$.



Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

Przykład. Dla sześcianu S o krawędzi l mamy

$$D(S) = 12 \cdot (l \otimes \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (l \otimes \pi) = 0.$$

Dla czworościanu foremego C o krawędzi l jest to

$$D(C) = 6 \cdot (l \otimes \alpha), \text{ gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

Przykład. Dla sześcianu S o krawędzi l mamy

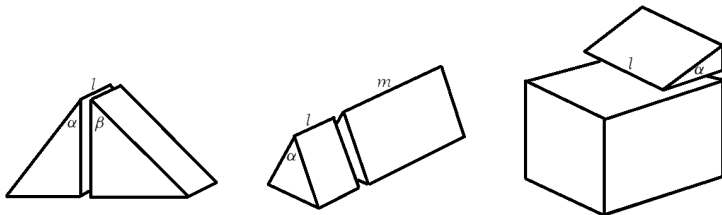
$$D(S) = 12 \cdot (l \otimes \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (l \otimes \pi) = 0.$$

Dla czworościanu foremnego C o krawędzi l jest to

$$D(C) = 6 \cdot (l \otimes \alpha), \text{ gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Definicja. Wielościany S i S' są **równoważne przez podział**, jeśli S może być **pocięty** na skończenie wiele wielościanów tak, by możliwe było **sklejenie** z nich wielościanu S' .

Uwaga. Warunkiem koniecznym jest $D(S) = D(S')$.



Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

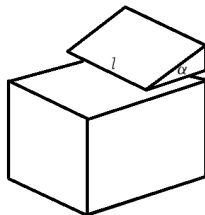
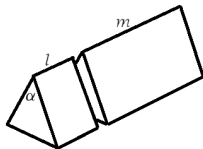
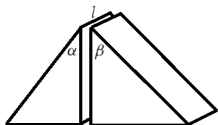
Przykład. Dla sześcianu S o krawędzi l mamy

$$D(S) = 12 \cdot (l \otimes \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (l \otimes \pi) = 0.$$

Dla czworościanu foremnego C o krawędzi l jest to

$$D(C) = 6 \cdot (l \otimes \alpha), \text{ gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Twierdzenie. Dwa wielokąty (bez samoprzecięć) są równoważne przez podział wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe pola. **III Problem Hilberta (1900):** Czy wielościany o równej objętości są równoważne przez podział?



Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

Przykład. Dla sześcianu S o krawędzi l mamy

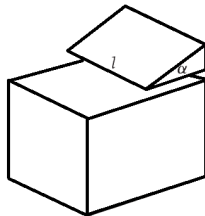
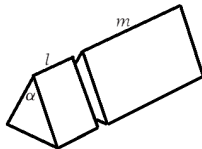
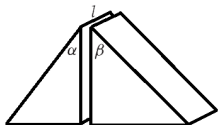
$$D(S) = 12 \cdot (l \otimes \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (l \otimes \pi) = 0.$$

Dla czworościanu foremnego C o krawędzi l jest to

$$D(C) = 6 \cdot (l \otimes \alpha), \text{ gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Zaskakująco trudna rzecz, do której potrzebny jest aksjomat wyboru.

Warunek $l \otimes \alpha \neq 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $l \neq 0$ oraz α jest kątem niewspółmiernym z π , czyli $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$.



Epilog — niezmiennik Dehna. Jak mnożyć obiekty różnej natury?

Rozważmy wielościan wypukły S o krawędziach $l_1, \dots, l_k$ oraz kątach dwuściennych (przy tych krawędziach) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Rozważamy wyrażenie

$$D(S) = l_1 \otimes \alpha_1 + l_2 \otimes \alpha_2 + \dots + l_k \otimes \alpha_k.$$

Przykład. Dla sześcianu S o krawędzi l mamy

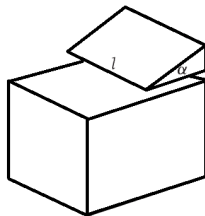
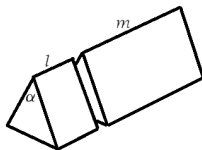
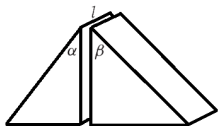
$$D(S) = 12 \cdot (l \otimes \frac{\pi}{2}) = 6 \cdot (l \otimes \pi) = 0.$$

Dla czworościanu foremnego C o krawędzi l jest to

$$D(C) = 6 \cdot (l \otimes \alpha), \text{ gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Wniosek — Twierdzenie Dehna

Czworościan foremny i sześcian **nie są** równoważne przez podział.





DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ