

# Półgrupa klas sprzężoności ideałów lewostronnych algebry łącznej

**Arkadiusz Męcel**  
Uniwersytet Warszawski

Promotor:

Prof. dr hab. **Jan Okniński**

Recenzenci:

Prof. dr hab. **Jan Krempa**  
Prof. dr hab. **Daniel Simson**

Warszawa, 20.11.2014r.





- **półgrupa** – zbiór z dwuargumentowym działaniem łącznym (może nie posiadać elementu neutralnego),
- **algebra** nad ciałem  $\mathbb{K}$  – przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{K}$  z kompatybilną strukturą pierścienia z jedyneką,
- **ideał lewostronny** algebry  $A$ : podprzestrzeń  $V \subseteq A$  taka, że  $AV \subseteq V$ .





- **półgrupa** – zbiór z dwuargumentowym działaniem łącznym (może nie posiadać elementu neutralnego),
- **algebra** nad ciałem  $\mathbb{K}$  – przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{K}$  z kompatybilną strukturą pierścienia z jedyneką,
- **ideał lewostronny** algebry  $A$ : podprzestrzeń  $V \subseteq A$  taka, że  $AV \subseteq V$ .
- $A$  – skończenie wymiarowa algebra z jedyneką nad ciałem  $\mathbb{K}$ .
- $U(A)$  – grupa elementów odwracalnych w  $A$ ,
- $L(A)$  – zbiór ideałów lewostronnych w  $A$ ,
- $I(A)$  – zbiór ideałów dwustronnych w  $A$ ,
- $J(A)$  – maksymalny ideał nilpotentny w  $A$ .





## Definicja

Rozważmy działanie  $U(A) \times A \rightarrow A$  grupy  $U(A)$  na algebrę  $A$  zadane wzorem:

$$(u, a) \mapsto uau^{-1}, \quad \text{dla } u \in U(A), a \in A.$$

Orbity tego działania nazywamy **klasami sprzężoności** w  $A$ .

Przyjmujemy przy tym następujące oznaczenia:

- $[L]$  – klasa sprzężoności ideału lewostronnego  $L$  w  $A$ ,
- $C(A)$  – zbiór wszystkich klas sprzężoności ideałów lewostronnych w  $A$ .





## Definicja

Na  $C(A)$  określić można następujące mnożenie półgrupowe:

$$[L_1][L_2] := [L_1 L_2], \quad \text{gdzie } L_1, L_2 \in L(A).$$

Przykład:  $A = M_n(\mathbb{K})$

- każdy ideał lewostronny jest generowany przez idempotent,
- jest  $n + 1$  klas sprzężoności ideałów lewostronnych,
- $[M][N] = [N]$ , dla niezerowych elementów  $C(M_n(\mathbb{K}))$ .





## Definicja

Na  $C(A)$  określić można następujące mnożenie półgrupowe:

$$[L_1][L_2] := [L_1 L_2], \quad \text{gdzie } L_1, L_2 \in L(A).$$

## Przykład: $A = M_n(\mathbb{K})$

- każdy ideał lewostronny jest generowany przez idempotent,
- jest  $n + 1$  klas sprzężoności ideałów lewostronnych,
- $[M][N] = [N]$ , dla niezerowych elementów  $C(M_n(\mathbb{K}))$ .





- 1 Zbadać strukturę półgrupy  $C(A)$ .
- 2 Zbadać warunki, przy których  $C(A)$  jest półgrupą skończoną.
- 3 Zbadać związki między własnościami  $A$  i  $C(A)$ .



## Twierdzenie

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą z jedyneką nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Wówczas istnieje skończony łańcuch ideałów półgrupy  $C(A)$ :

$$0 = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n = C(A)$$

taki, że każdy jego faktor  $I_{k+1}/I_k$  jest albo półgrupą **nilpotentną**, albo **całkowicie 0-prostą**, dla  $0 \leq k \leq n-1$ .



# Twierdzenie strukturalne dla $C(A)$



Półgrupy posiadające skończony łańcuch ideałów z faktorem nilpotentnymi i całkowicie 0-prostymi:

- ❶ każda **półgrupa skończona**,
- ❷ **półgrupa mnożeniowa**  $(A, \cdot)$ .

Półgrupa  $C(A)$  ma związki z konstrukcjami półgrupowymi na podzbiorach  $(A, \cdot)$ , między innymi:

- półgrupą  $L(A)$  **ideałów lewostronnych** algebry  $A$ ,
- półgrupą  $\mathcal{D}(A)$  **podzbiorów domkniętych** w  $(A, \cdot)$ ,
- półgrupą  $\mathcal{S}(A)$  **podprzestrzeni liniowych** w  $(A, \cdot)$ .



## Definicja

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Powiemy, że  $A$  jest **skończonego typu (reprezentacyjnego)** jeśli istnieje jedynie skończenie wiele klas izomorfizmu skończenie wymiarowych nierozkładalnych  $A$ -modułów lewostronnych.



## Definicja

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Powiemy, że  $A$  jest **skończonego typu (reprezentacyjnego)** jeśli istnieje jedynie skończenie wiele klas izomorfizmu skończenie wymiarowych nierozkładalnych  $A$ -modułów lewostronnych.

## Twierdzenie (Okniński, Renner)

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem  $\mathbb{K}$ . Wówczas:

- jeśli  $A$  jest skończonego typu, to  $C(A)$  jest skończona,
- jeśli  $\mathbb{K}$  jest algebraicznie domknięte i  $C(M_n(A))$  jest skończona, dla wszystkich  $n > 1$ , to  $A$  jest skończonego typu.





## Twierdzenie

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą z jedynką nad dowolnym ciałem  $\mathbb{K}$ . Następujące warunki są równoważne:

- $C(A)$  jest skończona,
- liczba klas sprzężoności ideałów lewostronnych nilpotentnych w  $A$  jest skończona.





## Problem

Niech  $A$  będzie algebrą skończone wymiarową nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym:

- ciało  $\mathbb{K}$  jest algebraicznie domknięte,
- zbiór ideałów dwustronnych  $I(A)$  algebry  $A$  jest skończony,
- $J(A)^2 = 0$ .

**Kiedy półgrupa  $C(A)$  jest skończona?**





Niech  $A$  będzie algebrą skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ , przy czym  $|I(A)| < \infty$  oraz  $J(A)^2 = 0$ . Niech:

$$J(A) = \begin{bmatrix} e_1 J(A) e_1 & e_1 J(A) e_2 & \dots & e_1 J(A) e_t \\ e_2 J(A) e_1 & e_2 J(A) e_2 & \dots & e_2 J(A) e_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_t J(A) e_1 & e_t J(A) e_2 & \dots & e_t J(A) e_t \end{bmatrix},$$

Wówczas jeśli  $e_i J(A) e_j \neq 0$ , dla pewnych  $1 \leq i, j \leq t$ , to:

$$e_i J(A) e_j \simeq M_{n_i \times n_j}(\mathbb{K}).$$





Niech  $A$  będzie algebrą spełniającą założenia Problemu, oraz:

$$A/J(A) \simeq M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{K}) \oplus \dots \oplus M_{n_t}(\mathbb{K}).$$

Rozważmy zbiór  $\mathcal{M}_A$  macierzy blokowych postaci:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tt} \end{bmatrix},$$

gdzie:

- $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow e_i J(A) e_j \neq 0$ ,
- $a_{ij} \in M_{k_i \times n_j}(\mathbb{K})$ , przy czym  $k_i = \sum_{j: e_i J(A) e_j \neq 0} n_j$ .





Rozważmy działanie  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}^o$  na  $\mathcal{M}_A$  grup

$$\mathfrak{H} := \mathrm{Gl}_{k_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{k_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Gl}_{k_t}(\mathbb{K}),$$

$$\mathfrak{G} := \mathrm{Gl}_{n_1}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Gl}_{n_2}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Gl}_{n_t}(\mathbb{K}) :$$

$$\mathfrak{h} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathfrak{g} = \begin{bmatrix} h_1 a_{11} g_1^{-1} & h_1 a_{12} g_2^{-1} & \dots & h_1 a_{1t} g_t^{-1} \\ h_2 a_{21} g_1^{-1} & h_2 a_{22} g_2^{-1} & \dots & h_2 a_{2t} g_t^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_t a_{t1} g_1^{-1} & h_t a_{t2} g_2^{-1} & \dots & h_t a_{tt} g_t^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\star)$$

gdzie:

$$\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \dots, h_t), \quad \mathfrak{g} = (g_1, g_2, \dots, g_t).$$





## Lemat

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ , przy czym  $|I(A)| < \infty$  oraz  $J(A)^2 = 0$ .

Następujące warunki są równoważne:

- półgrupa  $C(A)$  jest skończona,
- zbiór orbit działania  $(\star)$  na  $\mathcal{M}_A$  jest skończony.





## Twierdzenie

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ , niech  $|I(A)| < \infty$  i  $J(A)^2 = 0$ , przy czym

$$A/J(A) \simeq M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \dots \oplus M_{n_t}(\mathbb{K}), \text{ dla } n_i \geq 6.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

- półgrupa  $C(A)$  jest skończona,
- algebra  $A$  jest skończonego typu reprezentacyjnego.



## Twierdzenie

Niech  $A$  będzie skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ , niech  $|I(A)| < \infty$  i  $J(A)^2 = 0$ , przy czym

$$A/J(A) \simeq M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \dots \oplus M_{n_t}(\mathbb{K}), \text{ dla } n_i \leq 2.$$

Wówczas półgrupa  $C(A)$  jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy szkielet  $\mathcal{S}_A$  jest acykliczny i spełnia następujące warunki:

- (i)  $\mathcal{S}_A$  nie zawiera wierszowej czwórki,
- (ii)  $\mathcal{S}_A$  nie zawiera grubej kolumnowej czwórki,
- (iii)  $\mathcal{S}_A$  nie zawiera grubego szkieletu wierszowo trójschodkowego,
- (iv) graf rozdzielony szkieletu  $\mathcal{S}_A$  nie zawiera grubej drogi węzłowej.



## Pytanie

Rozważmy algebry  $A, B$  – skończenie wymiarowe nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$  takie, że  $C(A)$  oraz  $C(B)$  są skończone i izomorficzne jako półgrupy. Czy  $A \simeq B$ ?



## Pytanie

Rozważmy algebry  $A, B$  – skończenie wymiarowe nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$  takie, że  $C(A)$  oraz  $C(B)$  są skończone i izomorficzne jako półgrupy. Czy  $A \simeq B$ ?

## Twierdzenie

- Niech  $A, B$  będą skończenie wymiarowymi algebrami nad ciałem algebraicznie domkniętym  $\mathbb{K}$ . Jeśli  $|C(A)| < \infty$  to

$$C(A) \simeq C(B) \Rightarrow A/J(A) \simeq B/J(B).$$

- Jeśli dodatkowo  $J(A)^2 = 0$ , to:

$$C(A) \simeq C(B) \Rightarrow A \simeq B.$$





- ❶ Męcel A., Okniński J.: *Conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra*, Publ. Mat. 57 (2013), 477–496.
- ❷ Męcel A., Okniński J.: *Algebras with finitely many conjugacy classes of left ideals versus algebras of finite representation type*. Złożone do publikacji (2014).
- ❸ Męcel A.: *Conjugacy classes of left ideals in algebras of width two*. Preprint (2014).



# DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

