Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
13 września 2024 r.

Potęgi dwójki

Ciąg potęg liczby 2 o wykładnikach naturalnych występuje w rozważaniach z niemal każdego działu matematyki. Podczas seminarium przyjrzymy się kiku zadaniom dotyczącym podzielności, gdzie wykorzystujemy te liczby.

* * *

Cechy podzielności

Zaczniemy od cech podzielności przez potęgi liczby 2. Dana jest liczba naturalna N, która ma co najmniej k cyfr. Niech x, y będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$N = x \cdot 10^k + y.$$

Pierwszy składnik jest podzielny przez 2^k i przez 5^k, stąd:

- liczba $2^k \mid N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid y$,
- liczba $5^k \mid N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $5^k \mid y$,

gdzie zapis $m \mid n$ oznacza, że liczba m jest podzielna przez n. Wnioskujemy stąd następującą cechę podzielności.

Wniosek. Niech k będzie liczbą naturalną. Liczba naturalna N jest podzielna przez liczbę 2^k wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z ostatniej k-tki cyfr liczby N jest podzielna przez 2^k.

Przykład: jeśli $N = 23448$ oraz $k = 3$, to
$$N = 23 \cdot 10^3 + 448.$$
Liczba N jest podzielna przez $2^3 = 8$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 448 jest podzielna przez 8, gdyż składnik $23 \cdot 10^3$ jest podzielny przez 8.

Zadanie 1. *Czy dowolne sześć parami różnych niezerowych cyfr można zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę podzielną przez 4?*

Rozwiązanie. Zadanie pochodzi z części testowej XV OMJ. Odpowiedź jest negatywna. Wprawdzie biorąc cyfry $3, 4, 5, 6, 1, 2$, możemy bez trudu (nawet bez zmiany kolejności) zapisać za ich pomocą liczbę podzielną przez 4, to pozytywna odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu wymagałaby, aby potwierdzić możliwość utworzenia liczby podzielnej przez 6 przy wyborze *dowolnych* sześciu parami różnych niezerowych cyfr.

Istnieje natomiast taki układ cyfr, dla którego otrzymanie liczby podzielnej przez 6 nie jest możliwe. Wystarczy wziąć cyfry $1, 3, 5, 7, 9, 4$. Aby utworzyć z tych cyfr liczbę podzielną przez 4 (czyli parzystą) należy umieścić 4 na końcu, czyli na miejscu cyfry jedności. Jednakże dwucyfrowa końcówka liczby sześciocyfrowej utworzonej w ten sposób może być równa jedynie jednej z liczb $14, 34, 54, 74$ lub 94, które to liczby nie są podzielne przez 4. ■

Zadanie 2. *Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, m, że liczba $n + m$-cyfrowa postaci*

$$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$$

a) jest podzielna przez 8*,*

b) jest podzielna przez 16*,*

c) jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. To zadanie powstało przez rozbicie na podpunkty pytania postawionego w zawodach finałowych XVIII OMJ. W pierwszych dwóch podpunktach stosujemy cechy podzielności. Zauważmy najpierw, że liczba 66 nie jest podzielna przez 4. Rozważana liczba jest więc podzielna przez 4, gdy $n = 1$ oraz $m \geqslant 1$. Liczba $336 = 21 \cdot 16$ jest podzielna przez 16, zaś liczba 36 — nie. Zatem odpowiedź w punkcie (a) brzmi $n = 1$ oraz $m \geqslant 2$. Liczby 36 oraz 3336 nie są podzielne przez 16, więc w punkcie (b) odpowiedź brzmi: $n = 1$ oraz $m = 2$.

Aby udzielić odpowiedzi w punkcie (c) zauważmy, że jeśli kwadrat liczby całkowitej jest podzielny przez 8, to musi być podzielny przez 16. Inaczej liczba dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsza byłaby równa 3. W kwadracie natomiast liczba ta jest parzysta. Zatem odpowiedź z punkcie (c) brzmi: $n = 1$, $m = 1$. ■

Zadanie 3. *Czy istnieje taka liczba naturalna $n > 0$, że liczba 2^n kończy się czterema jednakowymi cyframi?*

Rozwiązanie. Dla $n = 1, 2, 3$ nie jest to możliwe. Jest też jasne, że liczba 2^n nie kończy się czterema zerami (musiałaby być podzielna przez 5). Dla $n > 3$ liczba 2^n jest podzielna przez 16. Zauważmy natomiast, że liczba czterocyfrowa o czterech jednakowych cyfrach nie jest podzielna przez 16. Liczby 2222 oraz 6666 są wykluczone, gdyż nie są nawet podzielne przez 4. Mamy też $16 \cdot 5 = 80$, więc liczba 8888 daje przy dzieleniu przez 16 resztę 8. Natomiast $16 \cdot 25 = 400$, więc 4444 daje przy dzieleniu przez 16 taką samą resztę, jak 44, która to podzielna przez 16 nie jest. ■

Zadanie 4. *Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^n każda z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.*

Rozwiązanie. Zadanie pochodzi z I etapu LXX OM. Rozwiązanie jest bezpośrednim zastosowaniem cechy podzielności przez 3. Gdyby bowiem taka liczba n istniała, wówczas suma cyfr liczby 2^n byłaby wielokrotnością liczby $1 + 2 + \ldots + 9$, czyli 45. W szczególności, liczba 2^n byłaby podzielna przez 3, co jest niemożliwe. ■

Zadanie 5. *Dana jest 2024-cyfrowa liczba naturalna n o tej własności, że każde kolejne 5 cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby tworzy liczbę podzielną przez 32. Wykaż, że liczba n podzielna jest przez 2^{2024}.*

Rozwiązanie. Uzasadnimy, że ostatnie 2019 cyfr rozważanej liczby musi być zerami. Istotnie, rozważmy ostatnie 6 cyfr rozwinięcia liczby n, oznaczając je od lewej jako f, e, d, c, b, a. Z założenia wiemy, że liczby

$$\overline{fecdb} \quad \text{oraz } \overline{edcba}$$

są podzielne przez 32. Rozważmy liczbę

$$\overline{fecdb0} - \overline{edcba} = f \cdot 10^5 - a.$$

Oczywiście ona również jest podzielna przez 32, co jest możliwe tylko, gdy $a = 0$, gdyż liczba 10^5 jest podzielna przez 32. Analogicznie pokazujemy, że kolejne 2018 cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby n jest równe 0. Zatem rozważana liczba jest postaci

$$n = \overline{pqrst\underbrace{0\ldots0}_{2019}} = \overline{pqrst} \cdot 10^{2019}.$$

Pierwszy czynnik jest zgodnie z założeniem podzielny przez $2^5 = 32$. Drugi natomiast jest podzielny przez 2^{2019}. Liczba n jest zatem podzielna przez 2^{2024}.

■

Zapis dziesiętny

W poniższych zadaniach korzystamy z dwóch obserwacji.

Obserwacja 1. *Jeśli do dodatniej k-cyfrowej liczby całkowitej n dopiszemy z lewej strony cyfrę c, wówczas uzyskamy liczbę*

$$c \cdot 10^k + n$$

Przykład: aby dopisać cyfrę 2 z przodu liczby 5301, należy dodać do tej liczby $2 \cdot 10^4 = 20000$, uzyskując 25301.

Obserwacja 2. *Dodatnia liczba całkowita daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, jak suma jej cyfr.*

Dowód. Liczba 10^k daje przy dzieleniu przez 9 resztę 1. Stąd dla dowolnej cyfry c liczba $c \cdot 10^k$ daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, co c. Zatem każda liczba postaci $c \cdot 10^k$ ma własność opisaną w zadaniu. Teza wynika stąd, że każda liczba całkowita jest sumą liczb tej postaci.

Rozważmy liczbę $2135 = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$. Składniki powyższej sumy dają odpowiednio reszty $2, 1, 3, 5$ z dzielenia przez 9. Stąd suma tych liczb daje taką samą resztę z dzielenia przez 9, co liczba $2 + 1 + 3 + 5$.

Zadanie 6. *Uzasadnij, że jeśli przestawimy cyfry w zapisie dziesiętnym liczby postaci 2^n, to nie jest możliwe uzyskanie zapisu dziesiętnego liczby 2^m, gdzie m, n są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, wbrew tezie, że takie przestawienie cyfr jest możliwe. Wtedy liczby 2^n i 2^m mają takie same sumy cyfr, a stąd dają przy dzieleniu przez 9 takie same reszty. W szczególności liczba $2^n - 2^m$ jest podzielna przez 9. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $n > m$. Aby liczby te miały tyle samo cyfr, ich iloraz musi być równy 2, 4 lub 8. Zatem $2^n - 2^m$ równe jest jednej z liczb $2^m, 3 \cdot 2^m, 7 \cdot 2^m$. Żadna z tych trzech liczb nie jest natomiast podzielna przez 9. Uzyskujemy sprzeczność. ■

Zadanie 7. *Załóżmy, że suma cyfr liczby 2^n jest taka sama jak suma cyfr liczby 2^m, dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n oraz m. Uzasadnij, że liczba $n-m$ jest podzielna przez 6.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że reszty z dzielenia liczb postaci 2^n przez 9 powtarzają się w cyklu długości 6. Innymi słowy, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby 2^n oraz 2^{n+6} dają taką samą resztę z dzielenia przez 9. Istotnie, mamy

$$2^{n+6} = 2^n \cdot 64 = 9 \cdot 7 \cdot 2^n + 2^n.$$

Okres ten nie jest natomiast krótszy, niż 6, gdyż pierwsze 6 potęg liczby 2 daje różne reszty z dzielenia przez 9

n	0	1	2	3	4	5	6
reszta z dzielenia 2^n przez 9	1	2	4	8	7	5	1

Zatem korzystając ponownie z Obserwacji 2, uzyskujemy tezę. ■

Uwaga. Przykładowo liczby $2^{16} = 65536$ oraz $2^{22} = 4194304$ mają równe sumy cyfr.

Zadanie 8. *Liczba 2^{29} jest 9-cyfrowa, które ma w zapisie dziesiętnym parami różne cyfry. Wiedząc to, rozstrzygnij (bez obliczania tej liczby), która cyfra nie występuje w zapisie tej liczby.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba 10-cyfrowa zawierająca wszystkie cyfry od 0 do 9 jest podzielna przez 9, gdyż suma jej cyfr równa jest 45. Jeśli więc c jest poszukiwaną cyfrą, to suma cyfr liczby 2^{29} równa jest $45 - c$. Jaką natomiast resztę z dzielenia przez 9 daje liczba 2^{29}? Mamy

$$2^{29} = 2^{6\cdot 4} \cdot 2^5 = (2^6)^4 \cdot 32 = 64^4 \cdot 32.$$

Pierwszy z czynników daje przy dzieleniu przez 9 resztę 1, a drugi — resztę 5. Stąd liczba 2^{29} daje przy dzieleniu przez 9 resztę 5. Ostatecznie więc liczba $45 - c$ daje resztę 5 z dzielenia przez 9. Brakującą cyfrą jest więc 4. ■

Zadanie 9. *Wykaż, że liczba 2^n ma nie więcej niż $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ cyfr, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x.*

Rozwiązanie. Skorzystamy z tego, że $2^3 < 10$. Zauważmy też, że jeśli $n = 3k + r$, gdzie r jest resztą z dzielenia liczby n przez 3, to

$$\left[\frac{n}{3}\right] = k.$$

Zatem mamy

$$2^n = 2^r \cdot 2^{3k} = 2^r \cdot 8^k < 10 \cdot 10^k = 10^{k+1}.$$

Ostatecznie więc liczba 2^n ma w zapisie dziesiętnym mniej niż $k+2$ cyfry, czyli ma ich co najwyżej $k+1$. ■

Zadanie 10. *Liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą. Jaka to cyfra?*

Rozwiązanie. Oczywiście można spróbować policzyć potęgi 2 oraz 5 dla małych n i zobaczyć przykładową odpowiedź. Nie ma jednak pewności, że jest tylko jedna odpowiedź. Przyjmijmy dalej, że $n > 0$, żeby wykluczyć także trywialny przypadek, gdy $2^0 = 5^0 = 1$. Jaka by nie była szukana pierwsza cyfra c, z pewnością znamy pierwszą cyfrę iloczynu $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Jest to 1. Co możemy uzyskać na tej podstawie? Załóżmy, że liczba 2^n ma $k+1$ cyfr, a 5^n ma $l+1$ cyfr. Wówczas można zapisać:

$$2^n = (c + r_1) \cdot 10^k, \quad 5^n = (c + r_2) \cdot 10^l,$$

gdzie c jest szukaną cyfrą, a r_1, r_2 powstają przez podzielenie 2^n oraz 5^n odpowiednio przez 10^k oraz 10^l. Na przykład:

$$1024 = (1 + 0,024) \cdot 10^3.$$

Teraz wykonujemy iloczyn:

$$2^n \cdot 5^n = (c + r_1) \cdot 10^k \cdot (c + r_2) \cdot 10^l.$$

A zatem $0 < (c + r_1)(c + r_2)$ jest dodatnią potęgą liczby 10. Biorąc jednak pod uwagę, że $c < 9$ oraz $r_1, r_2 < 1$ mamy

$$0 < (c + r_1)(c + r_2) < 100, \quad \text{czyli } (c + r_1)(c + r_2) = 10.$$

To szacowanie daje nam od razu wynik $c = 3$. Istotnie, mamy:

$$(2 + r_1)(2 + r_2) < 9, \quad (4 + r_1)(4 + r_2) > 16.$$

Nietrudno widzieć, że biorąc $n = 5$ mamy $2^5 = 32$ oraz $5^5 = 3125$. ■

Uwaga. Na seminarium pojawiła się cenna uwaga: w istocie powyższe rozumowanie można nieformalnie zapisać w następujący sposób $2^n \cdot 5^n = 10\ldots 0 = (c\ldots) \cdot (c\ldots)$. Stąd $c = 1$ (dla $n = 0$) lub $c = 3$ (jeśli $n > 0$).

Zadanie 11. *Złączono zapis dziesiętny dwóch liczb postaci 2^n oraz 2^m, gdzie n, m są dodatnimi liczbami całkowitymi. Czy istnieją takie liczby m, n, że uzyskana liczba jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym?*

Rozwiązanie. Odpowiedź jest negatywna. Przypuśćmy przeciwnie, że złączenie rozwinięć liczb 2^n oraz 2^m daje rozwinięcie dziesiętne liczby 2^t, dla $t > n$, $t > m$. Możemy więc zapisać

$$2^n \cdot 10^k + 2^m = 2^t,$$

przy założeniu, że liczba 2^m jest $k-1$-cyfrowa. Rozważymy dwa przypadki.

- Jeśli $n \geqslant m$, to dzieląc przez 2^m mamy

  $$2^{n-m} \cdot 10^k + 1 = 2^{t-m}.$$

  Przyjrzyjmy się parzystości obydwu stron. Jeśli dowolna z liczb $n - m$ lub k jest większa od 0, to po lewej stronie stoi liczba nieparzysta. Po prawej mamy zaś dodatnią potęgę liczby 2, czyli liczbę parzystą. Zatem $n = m$ oraz $k = 0$. Zatem liczba $n = m = 1$, a złączenie dwóch jednocyfrowych potęg liczby 2 nie jest potęgą liczby 2.

- Jeśli $n < m$, to dzieląc przez 2^n, mamy

  $$10^k + 2^{m-n} = 2^{t-n}.$$

  Podobnie jak wyżej wykazujemy, że żaden ze składników sumy wyżej nie jest liczbą nieparzystą. Mamy jednak $t - n > m - n$, czyli dzieląc przez 2^{m-n} mamy

  $$\frac{10^k}{2^{m-n}} + 1 = 2^{t-m}.$$

  Uzyskany iloraz jest zatem liczbą całkowitą. Stąd $k = m - n$, czyli dostajemy

  $$5^k + 1 = 2^{t-m}.$$

  Dla $k > 0$ liczba 5^k daje resztę 1 z dzielenia przez 4 (gdyż 5 ma tę własność). Stąd $k = 0$, co ponownie oznacza, że złączone liczby były jednocyfrowe, co jest niemożliwe.

■

Zadanie 12. *Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje dokładnie jedna liczba n-cyfrowa, która jest potęgą dwójki i zaczyna się cyfrą 1.*

Zauważmy, że mamy taką własność dla $n = 2$ oraz $n = 3$, gdyż $10 < 16 < 20$ oraz $100 < 128 < 200$. Liczby te trzeba przemnożyć co najmniej przez 5, aby uzyskać liczbę o pierwszej cyfrze równej 1. Postawimy następującą hipotezę: dla każdego n istnieje n-cyfrowa potęga dwójki a_n pomiędzy 10^{n-1}, a $2 \cdot 10^{n-1}$. Jeśli to uzasadnimy, uzyskamy tezę (liczba istnieje, a jej jedyność jest jasna).

Rozumowanie jest indukcyjne, ale możemy po raz kolejny rozumować nie wprost. Przypuśćmy, że n jest najmniejszą taką liczbą, dla której nie istnieje n-cyfrowa potęga liczby 2 spełniająca nierówność wyżej. Zatem dla $n - 1$ taka liczba a_{n-1} istnieje i mamy

$$10^{n-2} < a_{n-1} < 2 \cdot 10^{n-2}.$$

Mnożąc powyższą nierówność przez 8, uzyskujemy:

$$8 \cdot 10^{n-2} < 8a_{n-1} < 16 \cdot 10^{n-2}.$$

Rozważmy dwa przypadki.

- Liczba $8a_{n-1}$ jest $n - 1$ cyfrowa. W takim przypadku liczba ta ma pierwszą cyfrę równą 8 lub 9 i po przemnożeniu przez 2 zaczyna się od cyfry 1. Inaczej mówiąc liczba $16a_{n-1}$ jest n-cyfrowa i ma pierwszą cyfrę 1, wbrew przypuszczeniu.

- Liczba $8a_{n-1}$ jest n cyfrowa, czyli

  $$10^{n-1} < 8a_{n-1} < 16 \cdot 10^{n-2} < 2 \cdot 10^{n-1}.$$

  Zatem także w tym przypadku dostajemy liczbę n-cyfrową o pierwszej cyfrze 1.

Zadanie 13. *Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje taka liczba n-cyfrowa, w której zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1, 2, oraz która jest podzielna przez 2^n.*

ROZWIĄZANIE. Uzasadnienie tego rezultatu wymaga już pewnej algebraicznej wprawy, a także pomysłu na konstrukcję liczby n-cyfrowej a_n o żądanych własnościach. Przyjrzyjmy się tabelce przedstawiającej takie liczby dla $n \leqslant 7$

n	a_n	dzielnik a_n
1	2	2
2	12	2^2
3	112	2^3 (a także 2^4
4	2112	2^4 (a także $2^5, 2^6$)
5	22112	2^5
6	122112	2^6 (a także $2^7, 2^8$)
7	2122112	2^7

Pozwala nam to postawić hipotezę, że liczby a_n konstruować można w następujący sposób $a_1 = 2$, natomiast a_{n+1} powstaje przez dostawienie przez a_n jedynki lub dwójki w zależności od tego, czy a_n była podzielna jedynie przez 2^n, czy też przez wyższe potęgi.

- Jeśli a_n jest podzielna przez 2^{n+1}, to zgodnie z naszym pomysłem liczbę $n+1$ cyfrową uzyskujemy dopisując z przodu cyfrę 2, czyli
$$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 10^n.$$
Założyliśmy, że 2^{n+1} jest dzielnikiem a_n, zatem uzyskujemy
$$a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot k + 2 \cdot 10^n = 2^{n+1}(k + 5^n).$$
- Jeśli a_n jest podzielna przez 2^n, ale nie jest podzielna przez 2^{n+1}, to $a_n = m \cdot 2^n$, gdzie m jest liczbą nieparzystą. Zgodnie z naszym pomysłem, dopisujemy do a_n cyfrę 1, uzyskując
$$a_{n+1} = m \cdot 2^n + 1 \cdot 10^n = 2^n(m + 5^n).$$
Drugi czynnik jest sumą liczb nieparzystych, czyli jest podzielny przez 2. Zatem a_{n+1} jest liczbą podzielną przez 2^{n+1}.

■

Wzory skróconego mnożenia

Na zakończenie przyjrzymy się czterem prostym przykładom, w których występują wyrażenia typu
$$2^{a^b} = 2^{(a^b)},$$
zwane czasami *wieżami wykładniczymi* lub *tetracjami.*

Zadanie 14. *Wykaż, że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to liczba $k^{2^n} - 1$ jest podzielna przez 2^{n+2}.*

ROZWIĄZANIE. Dla $n = 1$ teza jest prawdziwa, gdyż liczba $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ jest podzielna przez 8, gdyż liczby $k-1$ oraz $k+1$ są dwiema kolejnymi liczbami parzystymi. Jedna z nich jest zatem podzielna przez 4.

Dalsze rozumowanie można prowadzić indukcyjnie lub rozumując nie wprost. Wykorzystamy tę drugą strategię. Przypuśćmy, że n jest najmniejszą taką liczbą, że teza nie zachodzi, czyli liczba $k^{2^n} - 1$ nie jest dzielnikiem 2^{n+2}. Zatem zakładamy, że dla $n-1$ teza jest prawdziwa i liczba 2^{n+1} dzielnikiem $k^{2^{n-1}} - 1$. Mamy jednak
$$k^{2^n} - 1 = (k^{2^{n-1}} - 1)(k^{2^{n-1}} + 1).$$
Z założenia jeden z czynników jest podzielny przez 2^{n+1}, a drugi — $k^{2^{n-1}} + 1$ jest liczbą parzystą, jako suma liczb nieparzystych. Zatem powyższy iloczyn jest, wbrew przypuszczeniu, podzielny przez 2^{n+2}. ■

Zadanie 15. *Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ jest podzielna przez 7.*

ROZWIĄZANIE. Oczywiście możliwe jest przeprowadzenie standardowego rozumowania indukcyjnego. Zauważmy jednak, że ze wzoru na sześcian różnicy mamy
$$(2^{2^n} - 1)(4^{2^n} + 2^{2^n} + 1) = 8^{2^n} - 1.$$
Dowolna potęga liczby 8 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 1, co kończy dowód (dlaczego 7 nie dzieli $2^{2^n} - 1$?).
■

Zadanie 16. *Wykaż, że dla liczb całkowitych $m > n > 0$ liczby $2^{2^m} + 1$ oraz $2^{2^n} + 1$ są względnie pierwsze.*

Rozwiązanie. Tym razem wykażemy, że jeśli $m < n$, to liczba $2^{2^m} + 1$ jest dzielnikiem liczby $2^{2^n} - 1$. Rzeczywiście. korzystając $n - m$ razy ze wzoru na różnicę kwadratów, mamy:

$$
\begin{aligned}
2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) \\
&= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) \\
&= \quad \cdots \\
&= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-3}} + 1)(2^{2^{n-3}} - 1) \ldots (2^{2^m} + 1)(2^{2^m} - 1).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $2^{2^n} - 1$ oraz $2^{2^n} + 1$ są dwiema kolejnymi liczbami nieparzystymi, czyli są względnie pierwsze. Tymczasem $2^{2^m} + 1$ ma, jako dzielnik pierwszej z nich, tylko dzielniki pierwsze tej liczby. A zatem

$$\mathrm{NWD}(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1.$$

■

Zadanie 17. *Niech n będzie liczbą naturalną. Wykaż, że*

$$\left(1 + \frac{1}{2^{2^0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) < 2.$$

Rozwiązanie. Mnożąc powyższy iloczyn przez czynnik $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ i korzystając wielokrotnie ze wzorów skróconego mnożenia, powyższy iloczyn upraszcza się do postaci

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}.$$

Rzeczywiście:

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2^{2^0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) &= \\
\left(1 - \frac{1}{2^{2^1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) &= \\
\left(1 - \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) &= \\
\left(1 - \frac{1}{2^{2^3}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) &= \ldots
\end{aligned}
$$

Stąd wyjściowy iloczyn jest równy

$$2 - \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}} < 2.$$

■