AUTOSTOPEM PRZEZ ALGEBRĘ

(z elementami przygotowania do konkursów matematycznych)

Arkadiusz Męcel

Notatki do wykładu *Metodyka nauczania algebry* na Wydziale MIM UW

`https://mimuw.edu.pl/~amecel/metodyka.html`

ostatnia. aktualizacja: 20 lipca 2024

Spis treści

Od autora niniejszego przewodnika

„See first, think later, then test. But always see first.
Otherwise, you will only see what you were expecting.”

Douglas Adams, *The Ultimate Hitchhiker's Guide to the Galaxy*[1]

Poniższe notatki do wykładu *Metodyka Nauczania Algebry*, prowadzonego na Uniwersytecie Warszawskim, przedstawiają przegląd wybranych zagadnień arytmetyki, teorii liczb, algebry i analizy, obecnych w nauczaniu szkolnym. Nie sposób rzecz jasna opowiedzieć zbyt wiele w ramach semestralnego wykładu. Z uwagi na to, że tekst ten pisany jest przez algebraika, szczególnie część analityczna potraktowana będzie nieco skrótowo (podobnie, jak ma to miejsce na olimpiadach, gdzie nie ma granic ciągów, pochodnych itd.)

Jaki jest charakter tego kursu? Autor tych notatek związany jest nieco z olimpiadami matematycznymi, co Czytelnik rozpozna po licznych odwołaniach do zadań konkursowych i materiałów z nimi związanych. Nie jestem ani dydaktykiem matematyki, ani na pewno metodykiem nauczania czy innym ekspertem. Staram się odsyłać Czytelnika do kompetentnych źródeł, dokonując być może nieudolnej, ale koniecznej syntezy. Z pewnością moje materiały zawierają błędy. Będę wdzięczny za ich zgłaszanie. Notatki są uaktualniane. Nie należy się więc do układu treści przywiązywać – za rok może on wyglądać zupełnie inaczej.

Sam wykład ma postać konwersatorium prowadzonego wspólnie przez wykładowcę i uczestników zajęć. Połowa czasu przeznaczona jest na referaty studenckie, a druga – na dyskusję oraz zarys zagadnień objętych kolejnymi rozdziałami. Zwykle proszę uczestników o krótkie piętnastominutowe referaty dotyczące interesujących ich tematów. Każdego roku dobieramy inne zagadnienia. Referowaliśmy na przykład przez pół semestru artykuły z nieistniejącego już nauczycielskiego pisma „Matematyka w szkole”. Pojawiła się również seria o nazwie: „Moje ulubione zadanie”. Celem jest uczenie się od siebie, a przede wszystkim – o przekonywanie się, że każdy z nas ma coś ciekawego do przekazania, ważny wątek do przedyskutowania, ładne zadanie do opowiedzenia. Dla niektórych są to pierwsze w życiu dłuższe wystąpienia. Staramy się o przyjazną atmosferę tak, by każdy na zajęciach czuł się dobrze i miał swobodę formułowania pytań.

Na ćwiczeniach rozwiązujemy zadania – są to albo zadania „z gwiazdką” z podręczników szkolnych, albo zadania konkursowe. Każdy z rozdziałów kończy się subiektywnym przeglądem problemów pochodzących z różnych źródeł. Z tego zestawu wybieram w każdym semestrze kilkanaście problemów do omówienia na ćwiczeniach. Z rozmysłem pozwalam sobie na pomijanie informacji skąd poszczególne zadania pochodzą. Niektórzy mówią, że nie ma już nowych zadań i ciągle przekonujemy się, że zadanie „ponoć autorskie” pojawiło się (być może zupełnie niezależnie) w jakimś piśmie lub na konkursie po drugiej stronie świata. Jeśli ktoś miałby przekonanie, że jego autorskie zadanie wymaga wpisania autorstwa – proszę o sygnał.

Poniższy materiał służy do samodzielnej pracy i refleksji. Wzorując się na tytule słynnej serii powieści Douglasa Adamsa zakładam, że Czytelnik – przyrównany przeze mnie do autostopowicza – sam stwierdzi co z owego „przewodnika” wydaje mu się ciekawe i warte samodzielnej eksploracji. Nie każdy temat może być zrealizowany na zajęciach, a nie każde zadanie trzeba chcieć rozwiązywać. Staram się jednak zarysować możliwe interesujące (mnie) kierunki tak, by oddać choć trochę bogactwo i urok algebry.

Całość tekstu uzupełniają dodatki. Autor niewątpliwie ma w sobie żyłkę konesera – encyklopedysty, a część poruszanych zagadnień nie doczekała się jeszcze porządnego i strawnego zarazem opracowania. Niech więc dostaną choćby szkice, opatrzone odnośnikami. Ostatni dodatek zawiera subiektywne uwagi o sytuacji dydaktyki matematyki, zwłaszcza w kontekście studiów matematycznych – być może naiwne lub nie do końca przemyślane, ale jeśli ktoś lubi podglądać (nie zawsze udane) zakończenia, to zapraszam.

[1] George Pólya mówi natomiast o schemacie rozwiązywania zadań: 1.Patrz i myśl. 2. Planuj. 3. Działaj. 4. Spójrz wstecz.

Wprowadzenie do problematyki przedmiotu i przegląd literatury

Poniższe wprowadzenie poświęcimy zarysowaniu kilku wątków związanych z historią nauczania i upowszechniania myślenia matematycznego. Są one ujęte w następujące podrozdziały.

- Matematyka jest jedna i zaczyna się od zadań!
- Po co nam sztuka prowadzenia rozumowań?
- Od geometrii do kombinatoryki – o uniwersalności algebry...
- Zarys matematycznej literatury konkursowej i metodycznej

Po co Czytelnikowi takie wprowadzenie? Istotne wydaje mi się zarysowanie pewnych linii napięcia, które są mniej lub bardziej istotne w rozumieniu współczesnej matematyki i trudności jej nauczania. Oto one:

- napięcie między „matematyką elementarną", a „matematyką badawczą",
- napięcie między „nauczaniem mechanistycznym", a „nauczaniem problemowym",
- napięcie między „metodą dedukcyjno-aksjomatyczną", a tzw. paralelizmem,
- napięcie między „myśleniem geometrycznym", a „myśleniem algebraicznym",
- napięcie między „talentem do matematyki", a rosnącym „analfabetyzmem matematycznym",
- napięcie między „uczeniem przez wyzwania", a częstym „traumatyzowaniem matematyką".

Napięcia te wpisane są w nauczanie, i choć nie będzie to wykład dydaktyki, potrzebne są pewne ramy wyjaśniające zastosowane ujęcie, czyli koncentrację na sztuce rozumowania i rozwiązywania problemów. Szerzej wątki te rozwinięte zostaną w dodatkach. W tym miejscu podzielę się jednak pewną niezbyt oryginalną radą – unikajmy skrajności i histerii. Matematykom (a także Polakom) nie przychodzi to łatwo. Wszak „matematyk zrobi to lepiej", jak pisał Hugon Steinhaus. Czy zawsze, i czy aby na pewno?

Zanim wymienię jakiekolwiek inne źródła czy motywacje, na pierwszym miejscu chciałbym postawić tradycję upowszechniania matematyki wyniesioną z Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, której ducha najlepiej oddaje, jak mi się zdaje, miesięcznik *Delta*, stworzony przez Profesora Marka Kordosa. Niedawno z okazji pięćdziesięciolecia, pojawiła się nowa strona internetowa zawierająca pełne archiwum czasopisma, dostępne pod adresem `https://www.deltami.edu.pl/`.

Wielokrotnie sięgać będziemy do rozważań czy to Profesora Kordosa, czy licznych autorów – wybitnych matematyków, popularyzatorów i specjalistów od przygotowań do konkursów matematycznych. *Deltę*, która przez lata przeszła rzecz jasna wiele zmian, zapraszając do grona autorów także fizyków, astronomów, informatyków czy biologów, śmiało uznać można za spadkobierczynię wielkich tradycji Polskiej Szkoły Matematycznej, a jednocześnie za mecenasa spraw współcześnie bardzo nam drogich. Jest *Delta* patronką niezwykle cennych inicjatyw, które będziemy tu przywoływać, jak choćby Szkoły Matematyki Poglądowej, wspaniałej ligi zadaniowej – Klubu 44 (i nie tylko), czy Konkursu Prac Uczniowskich. Czasopismo wspiera Olimpiady, samo publikując setki pięknych zadań. To wielki dorobek!

Przywoływać będę raczej teksty *Delty* o matematyce, niż o jej dydaktyce, znaczeniu, historii czy misji. Osobiście odrobinę się z filozofią i pewną *narracją historyczną* Twórcy *Delty* nie zgadzam. Jej mit założycielski mówiący, że *jeśli chcesz uprawiać naukę, przygotuj się na to, że to ogromny wysiłek* na pewno ma sens, choć częściej ów *ogromny wysiłek* widzę u studentów, niż ich uczonych nauczycieli. Przyznam, że bliższa, niż postulowana w *Delcie* nauka *mówiąca*, jest mi chyba nauka *dialogująca* i nauka *wspierająca*.

Matematyka jest jedna i zaczyna się od zadań!

Wzór opowieści skierowanej do przyszłych nauczycieli matematyki stanowią wykłady Felixa Kleina pt. *Matematyka elementarna z wyższego punktu widzenia*. Nie ma chyba postaci bardziej wpływowej dla współczesnego nauczania matematyki, mimo tego, że wielu próbowało modyfikować je w rozmaitych kierunkach. Klein prowadził w Getyndze roczny wykład o wspomnianym tytule. Pierwsze jego wydania ukazywały się drukiem od 1890 roku. Ostatnie, rozszerzone wydanie pochodzi z 2016 roku (wielka szkoda, że nie ma przekładu polskiego). Pierwszy semestr tego kursu dotyczy *Arytmetyki*, którą Klein rozumie jako *trzy wielkie A: arytmetykę, algebrę i analizę*. Tak też i my rozumiemy ten kurs, choć akcenty postawimy w zupełnie innych miejscach, przyglądając się przede wszystkim sztuce prowadzenia rozumowań.

Ważne będą dla nas kluczowe koncepcje, pochodzące od Kleina. Przede wszystkim celem jego wykładu było stworzenie przyszłym nauczycielom płaszczyzny łączącej studia akademickiej matematyki z potrzebami matematyki szkolnej (którą to Klein równolegle starał się zreformować), tak by z gmachu żywej i rozwijanej matematyki czerpać inspiracje i stymulację do pracy. Nie istniał bowiem dla Kleina rozdział pomiędzy matematyką elementarną i wyższą. Matematyka jest jedna. Jego koncepcja formowania nauczycieli szkół średnich wywodziła się z holistycznej wizji matematyki: stale rozwijającej się i reformującej się w trakcie tego procesu, co prowadzi z kolei do nowego ujęcia pewnych jej części. Dla Kleina matematyka elementarna to taka, w której ukazały się już i zrozumiane zostały fundamentalne koncepcje. Druga ważna kwestia to podkreślenie przez Kleina roli historii matematyki, poprzez ukazanie centralnych koncepcji historycznego rozwoju pojęć i problemów matematycznych, kluczowych dla ich zrozumienia i nauczania.

Idąc za wzorcami Kleina, odwoływać się będziemy niekiedy do historycznych intuicji i motywacji geometrycznych. Podstawowym materiałem będzie piękna książka Johna Stillwella *Mathematics and Its History*, której trzecie wydanie ukazało się w 2010 roku w świetnej serii Undergraduate Texts in Mathematics Springera. Dlaczego właśnie ta pozycja? Stillwell jest bardzo precyzyjny w sprawach historii, odsyła zainteresowanych do wielu cennych źródeł, ale jednocześnie koncentruje się przede wszystkim na matematyce. Opowiada o tym, jakie konkretnie pytania stawiali ludzie, dysponując określonym stanem wiedzy i co próbowali osiągnąć. Fenomenalnym źródłem wiedzy jest również serwis MacTutor History of Mathematics, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`. Inne pozycje, zwłaszcza te dotyczące historii samej algebry (w tym współczesnej), wymieniamy w Dodatku A.

* * *

Postać Felixa Kleina należy umieścić w szerszym kontekście przemian prowadzących do wykształcenia się nowoczesnej matematyki i jej głębokich związków z naukami przyrodniczymi i zastosowaniami w rozwoju technologii. Przełom wieków w Prusach był areną wielkiej przemiany nie tylko dydaktyki, ale i całej matematyki[2]. Akcent badań przesunął się z tradycyjnej tematyki takiej jak teoria funkcji eliptycznych, teoria niezmienników czy teoria rozszerzeń algebraicznych, w których wiodącą rolę miały techniki obliczeniowe oraz wirtuozeria algorytmiczna, w kierunku teorii mnogości, analizy funkcjonalnej, równań całkowych, topologii mnogościowej, analitycznej teorii liczb, aż do ukształtowania się abstrakcyjnych teorii ujętych w jezyk algebry i kulminujących się w monumentalnych pracach matematyków francuskich, piszących pod wspólnym pseudonimem Nicolasa Bourbakiego. O tym jednak napiszemy nieco dalej.

W centrum tych przemian stanęły dwie wielkie postaci pracujące na słynnym Uniwersytecie w Getyndze – Felix Klein (1849-1925) i David Hilbert (1862-1943). Powiedzieliśmy już kilka słów o Kleinie, a co do naszego podejścia wnosi David Hilbert? Piękną odpowiedź daje prof. Kordos w tekście *Struktura przestrzeni zadań*, komentując słynny wykład Hilberta wygłoszony 8 sierpnia 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu. Jak wiadomo, Hilbert sformułował na nim 23 problemy, które stały się centrum matematycznych rozważań XX wieku. Teza komentarza brzmi: jedynym źródłem matematyki jest rozwiązywanie zadań. Mocne zdanie, być może to przesada, ale niewątpliwie wiele działów matematyki zaczęło się od ważnych pytań – choćby teoria grup czy teoria pierścieni startowały od starożytnych problemów konstrukcyjnych, równań wielomianowych oraz słynnego równania $x^n + y^n = z^n$.

Hilbert znany może być szerszej publiczności również z dzieła *Geometria poglądowa*, stanowiącego ambitną próbę przybliżenia problemów ówczesnej geometrii czytelnikowi – niespecjaliście. Warto zaznaczyć, że zadania mają w tym poglądowym postrzeganiu fundamentalne znaczenie. Dzięki odpowiedniemu zadaniu łatwiej dostrzec głębię matematyki i piękno matematycznego myślenia. Takich zadań z pewnością będziemy szukać, choć ich celem nie będzie zawsze odkrywanie nowych działów matematyki.

[2]Por. E. Rowe, *Klein, Hilbert and the Göttingen Mathematical Tradition*, Science and Capitalism, Vol. 5, Science in Germany: The Intersection of Institutional and Intellectual Issues (1989), pp. 186-213 (28 pages)

Po co nam sztuka prowadzenia rozumowań?

Organizacja Narodów Zjednoczonych wśród celów rozwojowych na rok 2030 umieszcza postulat (cel 4.6), by młodzież i istotna część dorosłej populacji, zarówno kobiet jak i mężczyzn, osiągnęła „literacy" oraz „numeracy", czyli pewien stopień biegłości językowej i matematycznej. *Numeracy*, obejmuje zgodnie z artykułem prof. Marciniaka[3], nie tylko minimum, czyli zdolność radzenia sobie z rachunkami na liczbach, ale wszelką zdolność do stosowania matematyki w radzeniu sobie z problemami codziennego życia.

Od 2000 roku Organizacja Wspólnoty Gospodarczej i Rozwoju (OECD) prowadzi międzynarodowe badania służące zdefiniowaniu i ocenie umiejętności matematycznych uczniów w 15. roku życia, zwane badaniem PISA (Programme for International Student Assessment). W każdej edycji badania nacisk położony jest na jedną spośród następujących dziedzin: umiejętności matematyczne, czytanie i interpretacja lub rozumowanie naukowe. Do głównego badania dołączane są także komponenty dodatkowe, zarówno krajowe, jak i międzynarodowe (np. z wykorzystaniem technik komputerowych czy testów), które rozszerzają zakres badania o dodatkowe obszary, np. kompetencje finansowe. Wyniki tych badań pozwalają z jednej strony na sprawdzanie poziomu nabywania *Numeracy* przez poszczególne społeczeństwa, zwłaszcza te rozwijające się, jak i z drugiej strony na spojrzenie całościowe, pozwalające na precyzowanie czym jest *Numeracy* w skali globalnej. Pozwala to na reformowanie programów nauczania.

W Polsce[4], w ramach reformy edukacyjnej (z roku 1999) wprowadzone zostały egzaminy zewnętrzne na uczelnie wyższe i zaplanowano – na skutek opinii środowiska akademickiego – powrót obowiązkowej matury z matematyki (co mało miejsce ponad 10 lat później, głównie z powodu presji społecznej). W 2000 roku Polska przystąpiła do badań PISA. Wyniki ujawniły problem polskich uczniów z zadaniami, w których konieczne jest samodzielne wnioskowanie, czy nawet samodzielne konstruowanie strategii. W edycjach z lat 2003, 2006, 2009 odnotowano podobne problemy, natomiast badania z 2012 r. uznano za przełomowe – co potwierdziły wyniki z lat 2015 r. i 2018 r. Polscy uczniowie wyraźnie przekroczyli średnią OECD.

Odnotowana w 2012 r. skokowa poprawa była efektem m.in. motywującego uczniów powrotu obowiązkowej matury z matematyki oraz wpływu nowej podstawy programowej przyjętej w 2008 r., w której nacisk położono m.in. na zorientowanie kształcenia na rozwój umiejętności złożonych, takich jak rozumowanie i argumentacja, myślenie strategiczne czy modelowanie matematyczne. Na egzaminach, zarówno egzaminie gimnazjalisty jak i obowiązkowym (od 2010 roku) egzaminie maturalnym pojawiły się **zadania wymagające przedstawienia dowodu**. Kolejna podstawa programowa, przyjęta w 2012 r., także była „kompatybilna" z podejściem PISA i wiązała się z wprowadzeniem nowych wymagań maturalnych. Tak zwana nowa matura od 2015 r. sprawdza stopień osiągnięć w zakresie pięciu umiejętności matematycznych. W 2019 r. stopień ten wynosił dla umiejętności:

- wykorzystania i tworzenia informacji – 72%,
- wykorzystania i interpretowania reprezentacji – 69%,
- modelowania matematycznego – 66%,
- użycia i tworzenia strategii – 45%
- rozumowania i argumentacji – 19%.

* * *

Czy konkursy matematyczne mogą dziś odgrywać rolę, o której pisał Klein ponad 100 lat temu, mówiąc o wspólnej platformie matematyki badawczej i szkolnej? Czy jest to również jedna z możliwych dróg kształtowania osób szczególnie obdarowanych ową „Numeracy" postulowaną przez ONZ? Wierzę, że jest to jedna z dróg, gdyż spoiwem łączącym te światy jest coraz powszechniej dostrzegana **konieczność uczenia sztuki prowadzenia rozumowań**. Nie wystarczy wiedza, trzeba umieć z niej korzystać i warto umieć wyciągać wnioski, gdy jej brakuje. Naturalny jest stan niewiedzy, a pasjonujące jest odkrywanie prawdy, o ile potrafimy weryfikować własne rozumowanie i krytycznie dobierać argumenty. Trudno nam to przyjąć, bo od edukacji spodziewamy się wiedzy „na każdą okazję", podczas gdy ludzka ciekawość oraz nieprzewidywalność świata stawia przed nami wciąż pytania, na które nie ma łatwych odpowiedzi. Rozumieją to dobrze uczeni, dla których dobre pytania są dalece ważniejsze, niż nieistotne odpowiedzi.

---

[3] Z. Marciniak, Numeracy 2030, `https://www.mimuw.edu.pl/~zbimar/Numeracy-2030.pdf`, OECD 2017.

[4] J. Osiecka–Chojnacka, *Doskonalenie kształcenia matematycznego*, INFOS 277 (2020).

Przytoczmy słowa Geoge'a Polyi, ze wstępu do słynnej książki *Jak to rozwiązać?* Pozycja ta stanowi piękne świadectwo zamiłowania do rozwiązywania zadań, i to w ujęciu (być może inaczej niż w tym wprowadzeniu) *bez wielkiej filozofii*, jak pisze w swojej recenzji prof. Kordos.

> *Wielkie odkrycie rozwiązuje zawsze jakiś wielki problem. Ale rozwiązanie każdego problemu ma pewne cechy odkrycia. Wasz problem może być skromny; jeśli jednak zaciekawi on was i pobudzi do czynu wasze zdolności twórcze i jeśli rozwiążecie go własnymi siłami, możecie doznać emocji towarzyszącej napięciu umysłu i trumfowi dokonanego odkrycia. Takie emocje przeżyte w odpowiednim wieku mogą zrodzić zamiłowanie do twórczej pracy umysłowej i wywrzeć piętno na umyśle i charakterze na całe życie.*

Różnica między **rozumowaniem**, a zwykłym **używaniem informacji** jest ogromna i jeśli można ją ująć w przenośnię, to przypomina różnicę między kupowaniem posiłków, a umiejętnością przyrządzania ich samodzielnie. Wielu wątpi dziś w konieczność zdobywania wiedzy, wobec dostępności informacji i rozbudowanych narzędzi rachunkowych. Jednak to właśnie to jak korzystamy z wiedzy w sposób twórczy, jak interpretujemy dane, jak rozumiemy wyniki statystyczne, jak oceniamy wypowiedzi dotyczące problemów globalnych, związanych z ochroną zdrowia, edukacją, gospodarką, ochroną przyrody, jak rozwiązujemy problemy – decydować będzie o naszej przyszości. Myślenie matematyczne odgrywa tu kluczową rolę.

* * *

Co może dać w tym kontekście Olimpiada czy konkursy? Co mogą one wnieść? Być może chodzi o ukazywanie zdolnym (i nie tylko) czym jest owo radosne doświadczenie przebłysku w ciemności – Eureki. Jak smakuje moment, gdy niewiedza i niepewność są skonfrontowane i przezwyciężone, mimo realnych trudności i braku gotowych standardowych rozwiązań? Co daje człowiekowi doświadczany w ten sposób rozwój? To nie tylko zagadnienie dydaktyki, ale problem psychologii i socjologii, decydujący o kondycji społeczeństw. Nie chodzi tu jedynie – podkreślmy to – o pokonywanie *ogromnych trudności*!

Umieć dostrzec to, co pozornie niewidzialne, mając tylko tę wiedzę i te umiejętności, które się ma – tu spotkać się może zarówno uczeń, jak i uczony. Tu doprowadzić chce ucznia Olimpiada. Jak? Światło na tę sprawę rzuca moim zdaniem prof. Wojciech Guzicki w autorskim *Rozszerzonym programie nauczania w gimnazjum*, komentując potrzebę uczenia myślenia matematycznego i omawiając konkretne zadania, które w tym celu wykorzystuje. Zachęcam każdego nauczyciela i sympatyka matematyki do przemyślenia tych słów. Zawarta jest w nich bowiem bardzo nieoczywista teza.

> *Matematyka, w odróżnieniu od rutynowych rachunków, polega przede wszystkim na odgadnięciach i tego właśnie musimy naszych uczniów nauczyć. Jeśli rozwiązanie nie wymaga żadnego odgadnięcia, to znaczy, że nie wymagało od ucznia myślenia. Polegało tylko na przypomnieniu sobie, jak takie zadanie było rozwiązane w klasie i powtórzeniu ciągu czynności już raz wykonanych. Jeśli rozwiązanie ma w jakimkolwiek momencie odbiegać od wyuczonego schematu, to znaczy, że uczeń musi wymyślić (a nazywając rzecz po imieniu: odgadnąć), co, w którym miejscu i jak należy zmienić.* ***Odgadnięcie jest najważniejszym elementem rozumowania matematycznego.***

Odgadnięcie nie kojarzy się być może dobrze ani zwolennikom rutynowego rozwiązywania zadań, ani już na pewno autorom egzaminów *z kluczem*. Środowisko olimpijskie ma tu na myśli raczej ćwiczenie intuicji i skłonność do eksperymentowania, stawiania hipotez, formułowania swoich wniosków, szukania prawidłowości tam, gdzie nie można z góry zakładać, że ta prawidłowość zachodzi. Chcemy tego od uczniów zarówno w szkole, jak i na uniwersytecie – sami od siebie tego chcemy i podziwiamy to u największych uczonych. Jest to też wyraz odwagi – nie polegamy tu bowiem tylko na odmierzonych krok po kroku metodach lub na formalizmie rozumowania, ale na naszym wewnętrznym rozumieniu. W odgadnięciu wyczuwamy pewną emocję i witalność, napięcie dramatyczne, zwycięstwo ciekawości, przebłysk radości.

Wybierając dla Czytelnika przegląd zagadnień konkursowych, dzielę się prostym i radosnym doświadczeniem wielu osób – nauczycieli i przede wszystkim uczniów, dla których właśnie zadania konkursowe i olimpijskie są pierwszym (i często jedynym) kontaktem z żywą matematyką. Trudno te wrażenia przenosić na wszystkich, ale być może warto czerpać wzorce od osób, których pewien konkretny kontakt z matematyką cieszy i daje poczucie spełnienia. Ta garstka uprzywilejowanych, w skali całej edukacji, czuje się z matematyką dobrze – jest to możliwe! Czy dla każdego? Wierzę, że tak, o ile nauczanie matematyki przekształci się w wyzwanie angażujące zmysły, wyobraźnię, kreatywność i naturalną ciekawość.

Od geometrii do kombinatoryki – o uniwersalności algebry...

Kilka słów o samej algebrze. Z dydaktycznego punktu widzenia ważną rolę odgrywa tekst słynnego amerykańskiego historyka matematyki Victora Josepha Katza zatytułowany *Stages in the history of algebra with implications for teaching.* Katz sam był algebraikiem, uczniem Maurice'a Auslandera – jednego z czołowych przedstawicieli ważnej gałęzi algebry współczesnej – teorii reprezentacji. Katz był jednym ze zwolenników zasady paralelizmu, o której wspomnimy jeszcze w dodatkach. Mówi ona, że obok dedukcyjnej metody nauczania matematyki, naturalną i cenną metodą dydaktyczną może być poruszanie się po fazach jej odkrywania. Sam Katz wyróżnia dla algebry cztery takie przenikające się wielokrotnie fazy. Proszę zauważyć, że w fazach tych ujawnia się naprzemiennie charakter algebraiczny i geometryczny.

- **Faza geometryczna** – gdzie zależności algebraiczne wywodzone są z geometrii.
- **Faza rozwiązywania równań** – tu celem jest wyznaczenie liczb spełniających określone równości.
- **Faza dynamiczno–funkcyjna** – rozwój teorii funkcji oraz geometrii krzywych i powierzchni.
- **Faza abstrakcyjna** – badanie struktur algebraicznych i ich powiązań, począwszy od teorii grup.

Algebra szkolna porusza się głównie w pierwszych trzech obszarach. I rzeczywiście – pierwsze formuły algebraiczne pokazywane dzieciom to wzory na obwody i pola figur, a później – twierdzenie Pitagorasa. Ujęcie funkcyjne pojawia się dopiero w liceum. Faza struktur – szczątkowo w geometrii analitycznej.

Można zestawić te fazy z tradycyjnym podziałem historii myśli i symboliki algebraicznej, pochodzącym od pruskiego filologa i historyka matematyki Nesselmana (1842), często krytykowanym, a jednocześnie powtarzanym w klasycznych dziełach z historii matematyki[5]. Wyróżnia on trzy fazy.

- **Faza retoryczna** – gdzie zależności, w tym równania, zapisywane są za pomocą pełnych zdań. Ta forma charakterystyczna była nie tylko dla matematyki babilońskiej i egipskiej, ale częściowo także greckiej, azjatyckiej, czy europejskiej. W praktyce obecna niemal do końca średniowiecznej syntezy myśli antycznej (a nawet dalej – patrz notatka Fermata na marginesie dzieła *Arithmetica*).
- **Faza synkopowa** – gdzie pewne operacje zastępuje się symbolami, które jednak nie podlegają istotnym własnościom, a są przede wszystkim skrótami zapisu. Dla przykładu: można wprowadzić *skrótowy znak* odejmowania, ale przy zastrzeżeniu, że odejmowanie może być użyte tylko z jednej strony równania. Tak wyglądały choćby prace Diofantosa, ale i tu należeć miało wiele prac matematyków europejskich, wliczając nawet Viete'a i Kartezjusza (wiek XVI-XVII).
- **Faza symboliczna** – gdzie symbolika stosowana jest nie tylko dla skrócenia zapisu operacji, ale również dla zastąpienia obiektów, choćby pod postacią zmiennych. W tym rozumieniu symbole czy równości algebraiczne mogą też reprezentować inne obiekty niż liczbowe. Tą fazę Nesselman przypisywał wybiórczo al–Kwarizmīemu oraz matematykom XVII i XVIII-wiecznym: Newtonowi, Lagrange'owi, Eulerowi itd. Termin *algebra symboliczna* pochodzi od Georga Peacocka (1830).

Zapytajmy samych matematyków: czym jest algebra? Wśród tytułów najstarszych polskojęzycznych podręczników algebry z XVIII wieku znaleźć można następujące: *Algebra Czyli Nauka O Rachunkach Literalnych* czy też *Początki Rachunku przez litery alfabetu zawierające.* Pięknie pisze o algebrze w 1780 roku Sebastian Jan Kanty Chochron, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, opowiadając o jej początkach i użyteczności (pisownia oryginalna).

> Nie było dofyc Uczonym umieć rachunki w liczbach, niemi zacności i pożytku roznych nauk fpołeczeńftwu dowodzić, udali się iefzcze za nową potrzebą, do nowego przemyfłu. którymby to, co umieli, fzczęśliwiey wyrazali, i w iednych się działaniach łatwiey, w drugich krocey, a we wfzyftkich powfzechniey i iaśniey tłumaczyli. Tą i taką przyciśnięci potrzebą Wieta i Hariotus pierwsi poczęli liter zamiaft liczb w Europie używać; pierwsi poznali, że nie liczby, ale litery, według upodobania z pewnością działań zakładać w powfzechności można, nie owemi ale temi prawd pożytecznych analitycznym spofobem łatwo dochodzić [...] Lecz iako każdey rzeczy na przyzwoitey w początkach dofkonałości zbywa, tak tę nowo poczętą umieiętność, pracowicie trzeba było dofkonalić. Czekała więc na Kartezyufza, Leybnicego i Newtona, którzy ftaraiąc się naywięcey prawdy Filozoficzne i Matematyczne obiaśnic, przekonani o nieuchronney do tego potrzebie Algiebry, tak ią wydofkonalili, i pomnożyli przedziwnie iey fkutki w samych nawet liczbach, że do Matematyki, i nauk towarzyftwu ludzkiemu niefkończenie miłych i potrzebnych, innego prócz niey wodza, innego klucza, inney łatwości nie mamy.

[5] Patrz np. `http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/PMP2007Heeffer.pdf`.

Maclaurin w 1748 roku napisał, że algebra jest ogólną metodą obliczeniową za pomocą pewnych oznaczeń i symboli, uznana za wygodną. Nazywana wówczas raczej arytmetyką uniwersalną, poprzedzona była spisem dopuszczalnych operacji i reguł ich używania, podobnie jak w zwykłej arytmetyce. Kilkadziesiąt lat później w 1765 roku Euler napisze, nazywając w języku rosyjskim swój fundamentalny podręcznik o algebrze elementarnej *Algebrą Uniwersalną*, że jest to nauka o tym, jak wyznaczać nieznane wielkości za pomocą tych, które są znane. Innymi słowy, zdaniem wielkich matematyków XVIII wieku algebra zajmowała się wyznaczaniem niewiadomych przy użyciu metod symbolicznych i zasad manipulowania nimi, czyli głównie – rozwiązywaniem równań.

Zakres oddziaływania algebry był jednak znacznie większy niż w czasach arabskich, czy renesansowych, gdy rozwiązywano na turniejach równania stopnia 3 i 4. Dzięki pracom m.in. Kartezjusza, Newtona czy Leibniza, zaawansowany był już w XVIII wieku proces arytmetyzacji matematyki, która dotąd przez ponad 2000 lat ufundowana była przede wszystkim na geometrii zawartej w *Elementach* Euklidesa. Proces ten uwyraźni się w II połowie wieku XIX, gdy jasne już będzie, że nie ma jednej geometrii, a różne geometrie opisywać można w języku algebraicznym. Jak napisze Stillwell – napięcie pomiędzy geometrią i algebrą jest paliwem rozwoju matematyki.

Matematyk drugiej połowy wieku XX, pogodzony już z porażką programu sformalizowania matematyki podjętego przez Hilberta, na pytanie *Czym jest algebra?* odpowie raczej w duchu programu Kleina i jego wizji z Erlangen – tego samego Kleina, który przez lata walczyć będzie o wprowadzenie i promocję myślenia funkcyjnego w szkołach. Również w swojej *Matematyce elementarnej z wyższego punktu widzenia*, sprowadzi Klein wykład algebry zwłaszcza do ujęcia funkcyjnego, w którym głównym celem jest geometryczna interpretacja rozwiązań równań algebraicznych. Z drugiej strony program naukowy Kleina przesuwa akcent z obiektów na przekształcenia i ich struktury, zwłaszcza na tzw. grupy niezmienników.

Ujęcie Kleina to początek wielkiej rewolucji przechodzącej od równań do funkcji i struktur. Jak pisze prof. Kordos w artykule *Stabilnie czy dynamicznie*, podejście Kleina w sposób iście prorocki przeciwstawiło się wiodącemu aż do połowy XX stulecia formalizmowi, pragnącemu w duchu teorii formalnych opisywać teorie matematyczne. Tak uczono zresztą jeszcze na powojennym Uniwersytecie. Patronem tego wielkiego programu był ostatni być może matematyk ogarniający spojrzeniem całą matematykę – David Hilbert. Jak się później okazało, to ujęcie Kleina, podjęte przez grupę Bourbakistów jeszcze w latach 30-tych i ujęte w języku formalnym teorii kategorii, zaprowadziło w drugiej połowie XX wieku wyemancypowaną wreszcie algebrę na jedną z centralnych pozycji współczesnej matematyki. Czy i w Polsce? Trudno orzec.

Czytelnik może w tym miejscu uznać, że opowieść o napięciach między algebrą, a geometrią to retoryczny zabieg. Polecam zapoznanie się z tekstem z *Wiadomości Matematycznych* z 1972 roku[6], będącym częścią publicznie prowadzonej wówczas (wewnątrzwydziałowej) debaty. Oto pewien humorystyczny jej fragment.

> [...] odnieśliśmy wrażenie, że stara się on wytyczyć granice utopijnego Królestwa Geometrii i Topologii, otoczyć te granice prawdziwie chińskim murem zbudowanym ze zmurszałych (jego zdaniem) cegiełek programu Kleina, wzmocnionych elementami teorii kategorii. Mur broniłby królestwa od barbarzyńskich plemion Analizy i Algebry, czyhających na jego zgubę.

Być może zresztą mówimy o dylemacie minionym. Patrząc z perspektywy początku XXI wieku, do gry weszły zastosowania, choćby *machine learning* czy *big data*. W matematyce coraz więcej znaczą *metody dyskretne*. Znalazły one arcyważne zastosowania w informatyce, i odwrotnie – same były de facto jedną z jej głównych założycielek. Również w algebrze wiele jest istotnych klasyfikacji opartych o język teorii grafów i innych obiektów kombinatorycznych. Jaka jest zatem przyszłość matematyki? Kto wie?

[6] *A. Białynicki-Birula, A. Pełczyński, Na marginesie artykułu K. Siekluckiego „O geometrii i topologii", Wiadomości Matematyczne 15(1) (1972), 25-30,* `https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/view/923/938`. Warto też przeczytać dwa wcześniejsze odcinki dyskusji: *O algebrze* oraz *O geometrii i topologii.*

Zarys matematycznej literatury konkursowej i metodycznej

Przejdźmy do zarysu literatury przydatnej w pracy z matematyką elementarną. Pierwsze miejsce zajmuje tu twórczość Wacława Sierpińskiego, na którego monografiach i książkach popularnych wychowały się całe pokolenia matematyków. Najczęściej odwołujemy się do słynnej *Teorii Liczb* oraz związanych z nią *250 zadań z elementarnej teorii liczb.* Na drugim miejscu wymienić należy faktycznego twórcę Olimpiady Matematycznej – Stefana Straszewicza, dzięki któremu przetrwały do naszych czasów znakomite opracowania zadań z pierwszych olimpiad. Dzieło to kontynuowali Jerzy Browkin, Maciej Bryński i Marcin Kuczma w kolejnych tomach z zadaniami OM. Niezwykle cenną literaturę olimpijską zawierającą przegląd zadań z konkursów zagranicznych opracowali też przez lata Henryk Pawłowski i Lev Kourliandtchik.

Nasze notatki inspirowane są przez literaturę konkursową oraz dzieła poświęcone sztuce rozwiązywania zadań. Dwa z nich będą miały szczególne znaczenie.

- **Jak to rozwiązać?** to książka autorstwa Georga Polyi, matematyka amerykańskiego (pochodzenia węgierskiego), członka węgierskiej szkoły kombinatorycznej, wywodzącej się od Fejera. Szkoła ta skoncentrowana wokół Uniwersytetu Budapesztańskiego (Uniwersytet Loránda Eötvösa), dała początek olimpiadom matematycznym, organizowanym od końca XIX wieku w poszczególnych miastach oraz za pośrednictwem czasopism rekreacyjnych (np. KöMaL). Do jej członków należeli nie tylko Polya, ale także Paul Erdös czy John von Neumann.
- **The Art and Craft of Problem Solving** autorstwa Paula Zeitza to jeden z wielu nowoczesnych podręczników prezentujących strategie rozwiązywania zadań olimpijskich, przeznaczony dla studentów i nauczycieli, którego pierwsze wydanie pojawiło się w 1999 roku. Pozycja ta reprezentuje całe pokolenie uczonych przyciągniętych do matematyki właśnie poprzez rozwiązywanie problemów konkursowych. Wśród nich jest wielu wybitnych uczonych, między innymi Terrence Tao.

Z punktu widzenia nauczyciela zainteresowanego rzetelnym opracowaniem dowodów twierdzeń szkolnych, ubogaconym licznymi przykładami zarówno standardowych, jak i konkursowych zadań, szczególnie cennym źródłem jest wydana w 2020 roku prawie 500-stronicowa *Arytmetyka i algebra. Rozszerzony program nauczania matematyki w liceum* autorstwa prof. Wojciecha Guzickiego. Z oczywistych powodów poniższy wykład jest znacznie mniej rozbudowany, zwłaszcza w części analitycznej, której zdecydowanie bardziej wszechstronne omówienie, zawierające również elementy wykładu akademickiego z analizy, zawiera skrypt dra Michała Krycha napisany dla klas matematycznych w XIV LO w Warszawie (w latach 1974–2007).

Osobom zainteresowanym materiałem przeznaczonym bezpośrednio do przygotowania do Olimpiady Matematycznej, pokazującym liczne ponadprogramowe rozszerzenia arytmetyki i teorii liczb, w tym zagadnienia wymagające znajomości elementarnej teorii grup i pierścieni, polecam pozycję *Matematyka olimpijska. Algebra i teoria liczb* autorstwa dra Adama Neugebauera. Czytelnika zainteresowanego encyklopedycznym opracowaniem bardzo ciekawych zagadnień arytmetycznych i teorioliczbowych, w tym niezliczonymi ciekawostkami o rozmaitych typach liczb, zachęcam do zapoznania się z 15-tomową serią *Podróże po Imperium Liczb* autorstwa prof. Andrzeja Nowickiego, `https://www-users.mat.umk.pl//~anow/?id=imperl`.

Kopalnią ciekawych zagadnień konkursowych jest seria *Miniatury Matematyczne*, zawierająca popularne prezentacje ciekawych i często mało znanych tematów matematycznych. Autorzy związani są z toruńskim środowiskiem Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, przeprowadzającym *Międzynarodowy Konkurs Matematyczny Kangur.* Pozycje te, jak również opracowania zadań kangurowych, można znaleźć na stronie niezwykle oddanego tematyce konkursowej Wydawnictwa *Aksjomat*: `https://www.aksjomat.torun.pl/`.

W przygotowaniu poniższych treści bardzo przydatne były także liczne materiały zebrane przez Komitety Główne Olimpiady Matematycznej Juniorów oraz Olimpiady Matematycznej, przede wszystkim zaś Gazetka OMJ *Kwadrat*, dostępna on-line pod adresem: `https://omj.edu.pl/gazetka-omj`, a także materiały z broszur i seminariów dla nauczycieli matematyki, prowadzonych przy okazji promocji Olimpiad.

Warto zwrócić uwagę również na rozmaite źródła dostępne on-line. Wspomnieliśmy już o archiwum czasopisma *Delta*, gdzie polecić należy choćby serie *Kącik Początkującego Olimpijczyka*, autorstwa dra Bartłomieja Bzdęgi, czy starszy *Gammalimatias*, autorstwa dra Jarosława Wróblewskiego (oraz z geometrii – *Deltoid* dr Joanny Jaszuńskiej). Ciekawe materiały znaleźć można także w archiwach *Szkoły Matematyki Poglądowej*, organizowanej przez Ośrodek Kultury Matematycznej.

Ciekawostki i materiały dotyczące życia matematycznego i dydaktyki znaleźć można na Wrocławskim Portalu Matematycznym. Specjalistyczne dyskusje dotyczące edukacji prowadzone są choćby w wydawnictwach Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz w dwumiesięczniku dla nauczycieli *Matematyka*. Bardzo ciekawym archiwum, także z powodów historycznych i poprzez zgromadzenie bardzo bogatej bazy niebanalnych zadań szkolnych i egzaminacyjnych, jest udostępnione na stronie Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki archiwum kwartalnika *Nauczyciele i Matematyka*.

Wreszcie, zachęcam do korzystania z szerokich zasobów cyfrowych zawierających (udostępnione do pobrania) stare podręczniki, zbiory zadań, materiały metodyczne, plany nauczania, nie tylko dwudziestowieczne. Zdarzy nam się przywołać jeden z przedwojennych podręczników Stefana Banacha lub inną pozycję lwowsko-warszawskiej *Książnicy-Atlas*. Przykład takiego repozytorium to `https://polona.pl`.

* * *

Czytelnika zainteresowanego otrzymaniem szerokiego poglądu na nauczanie matematyczne czy nawet tzw. kulturę matematyczną odsyłam do klasyki, czyli trzech tomów słynnego *Zarysu dydaktyki matematyki* prof. Zofii Krygowskiej lub świetnego zwięzłego wykładu prof. Stefana Turnaua. Polecam gorąco piękne ośmiotomowe dzieło prof. Michała Szurka – *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*. Współcześnie szkołę prof. Krygowskiej reprezentuje przede wszystkim prof. Helena Siwek, do której *Dydaktyki matematyki* będziemy się niekiedy odwoływać. Pozycji ściśle metodycznych dotyczących samej algebry również nie brakuje. Zdaniem autora zbyt małą wagę przykłada się dziś do zagadnień omawianych przed półwieczem w pięknych poradnikach metodycznych Anieli Ehrenfeucht i Olgi Stande, towarzyszących wielkiej reformie z końca lat 60-tych XX wieku. Czytelnik mógł również nie spotkać się ze starymi seriami książek z serii *Biblioteczka matematyczna* czy *Biblioteczka Nauczyciela Matematyki*.

Nie brakuje również współczesnych ważnych opracowań metodycznych o charakterze polemicznym. Państwa uwadze polecam antologię tekstów profesorów nauk humanistycznych, którzy swoją działalność naukową poświęcili matematyce, choćby prof. Jerzego Pogonowskiego *Myślenie matematyczne*, czy też prof. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej *Dziecięcą Matematykę* (i wiele wspaniałych tekstów/wywiadów).

Podstawowa bibliografia przedmiotu

- M. Ciosek, A. Żeromska, *Rozumowania w matematyce elementarnej*, WNUP 2013, `https://rep.up.krakow.pl/xmlui/handle/11716/10831`.
- A. Ehrenfeucht, O. Stande, *O nauczaniu algebry w klasie I/II LO*, PZWS 1969.
- W. Guzicki, *Arytmetyka i algebra. Rozszerzony program matematyki w liceum*, Omega 2021.
- W. Guzicki, *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, ORE 2013, `www.ore.edu.pl/wp-content/plugins/download-attachments/includes/download.php?id=5345`.
- F. Klein, *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint, Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis*, Springer 2016.
- M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, wyd. 3, Wydawnictwo Script 2008.
- M. Krych, T. Iwaniec, *Skrypt z analizy matematycznej dla klas matematycznych*, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/`.
- Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, części 1-3, WSiP 1979.
- A. Neugebauer, *Matematyka olimpijska. Algebra i teoria liczb*, Omega 2018.
- A. Nowicki, *Podróże po imperium liczb*, Wydawnictwo Olsztyńskiej Wyższej Szkoły Informatyki i Zarządzania im. Prof. Tadeusza Kotarbińskiego, Olsztyn 2008–2011.
- H. Pawłowski, *Matematyka 1-3. Zakres rozszerzony*, Operon 2004.
- G. Polya, *Jak to rozwiązać?,* PWN 2009.
- W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Monografie Matematyczne 19, PWN 1950.
- H. Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP 2005.
- J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, Springer 2010.
- M. Szurek, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, tomy 1-8, GWO 2006.
- S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN 1990.

Polecane zbiory zadań i inne opracowania

- T. Andreescu, D. Andrica, *Number Theory, Structures, Examples, and Problems*, Birkhauser 2009.
- J. Bednarczuk, J. Bednarczuk, *Matematyczne gwiazdki*, Aksjomat 2020.
- Z. Bobiński, P. Nodzyński, M. Uscki, *Koło matematyczne w gimnazjum*, Aksjomat 2010.
- A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer 1997.
- R. Gelca, T. Andreescu, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhauser 2000.
- M. Małek, Z. Marciniak, A. Sułowska, P. Traczyk, *Egzaminy testowe z matematyki*, WSIP.
- D. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, 1999.
- H. Pawłowski, *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, TURPRESS 1994.
- H. Pawłowski, *Matematyka 1-3. Zakres podstawowy rozszerzony. Zbiór zadań. Linia ponadstandardowa*, Operon 2007.
- H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej*, Tutor 2022.
- W. Sierpiński, *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne 1987.
- P. Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley & Sons 2006.

Czasopisma i portale matematyczne

- AOPS - Contest Collections, `https://artofproblemsolving.com/community/c13_contest_collections`
- Czasopismo Delta, `https://www.deltami.edu.pl/delta/archiwum/`.
- Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie, `https://smp.uph.edu.pl/czasopismo/msn`
- Matematyka, `https://czasopismomatematyka.pl/`
- Mathematical Excalibur, `https://www.math.hkust.edu.hk/excalibur/excalibur.htm`
- Nauczyciele i Matematyka, `http://www.snm.edu.pl/p/nim.html`
- Kömal, `https://www.komal.hu/verseny/korabbi.e.shtml`
- Wrocławski Portal Matematyczny, `http://matematyka.wroc.pl/`
- Wydawnictwa Polskiego Towarzystwa Matematycznego, `https://wydawnictwa.ptm.org.pl/`

Różne konkursy w Polsce

- Alfik Matematyczny, `https://jersz.pl/konkurs/alfik-matematyczny/`
- Gry Matematyczne i Logiczne, `http://gmil.pwr.edu.pl/archiwum/zadania-archiwalne`
- Jagielloński Turniej Matematyczny, `https://jtm.matinf.uj.edu.pl/`
- Kangur Matematyczny, `https://www.kangur-mat.pl/`
- Konkurs matematyczny FerMat: `sp221.edu.pl/zadania-z-poprzednich-edycji,171,pl`
- Liga Zadaniowa UMK w Toruniu, `https://liga.mat.umk.pl//`
- Liga Zadaniowa UWr, `http://www.matematyka.wroc.pl/book/liga-zadaniowa`
- Naboj Matematyczny, `https://math.naboj.org/pl/pl/`
- Wielkopolska Liga Matematyczna, `https://wlm.wmi.amu.edu.pl/`
- Zadania i materiały z Olimpiady Matematycznej Juniorów i Olimpiady Matematycznej: `https://omj.edu.pl/`, `https://om.mimuw.edu.pl/`, `https://archom.ptm.org.pl/`

Strony kółek, obozów i osób związanych z Olimpiadami

- Strona Dominika Burka, `https://dominik-burek.u.matinf.uj.edu.pl/`
- Strona Evana Chena, `https://web.evanchen.cc/olympiad.html`
- Strona Pawła Gadzińskiego, `http://wdmo.pl/`
- Strona Wojciecha Guzickiego, `https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/`
- Strona Joanny Jaszuńskiej, `https://www.mimuw.edu.pl/~joasiaj/plock/`
- Strona Joachima Jelisiejewa, `https://www.mimuw.edu.pl/~jjelisiejew/matma/zadania.html`
- Strona Michała Krycha, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/odczyty/`
- Strona Marcina Preisnera, `http://www.math.uni.wroc.pl/~preisner/dyd/index.php`
- Strony Waldemara Pompe, `https://www.mimuw.edu.pl/~pompe/gl.php`, `https://matedu.pl/`,
- Strona Jarosława Wróblewskiego, `http://www.math.uni.wroc.pl/~jwr/`
- Warsztaty Matematyczne XIV LO w Warszawie,`https://wm.staszic.waw.pl/`

Rozdział 1

Czym jest rozumowanie? Podstawowe strategie dowodowe

1.1 Jak odróżnić ćwiczenie od problemu?

Zanim przejdziemy do klasycznej algebry szkolnej, warto powiedzieć kilka słów o rozumowaniach matematycznych i podstawowych ich typach. Aby móc to zrobić, należy najpierw zapytać – jakie zagadnienia wymagają od nas umiejętności prowadzenia rozumowań? Typowe zadanie szkolne rozwiązywane jest niejako podobnie do realizacji przepisu kucharskiego – przestrzega z góry ustalonej procedury, w której inwencja wykonawcy sprowadza się do odpowiednio skrupulatnego wykonania, w zależności od ilości i jakości posiadanych składników. Zadania „na dowód" podlegają kompletnie innemu podejściu.

Klasyczny już dziś podręcznik *The Art and Craft of Problem Solving*, autorstwa Paula Zeitza, stanowiący punkt odniesienia dla tekstów dotyczących prowadzenia rozumowań matematycznych, zwłaszcza olimpijskich, rozróżnia dwa wyraźnie różne jakościowo typy zadania matematycznego: **ćwiczenie** i **problem**.

Większość czasu spędzamy w szkole właśnie na ćwiczeniach. Są to zadania, które sprawdzają opanowanie przez ucznia bardzo specyficznej umiejętności matematycznej, zwykle przerabianej wcześniej na lekcji. Ćwiczenia mogą być łatwiejsze lub trudniejsze, ale łączy je przewidywalność. Od początku wiadomo jak należy je rozwiązać – jakiej techniki czy wzoru użyć. Wyzwanie ma więc jedynie charakter techniczny. Droga wytyczona została jednak za nas. Oczywiście – rozwiązując ćwiczenia nabywamy sprawność.

Problem to pytanie, na które nie ma natychmiastowej odpowiedzi. Zadania tego typu mają często charakter otwarty, a nawet paradoksalny, bywają nawet nierozwiązywalne. Wymagają ułożenia strategii zanim je rozwiążemy. To właśnie problemy są w centrum matematycznej działalności – ale nie tylko. W życiu spotykamy bardzo rzadko wyzwania stanowiące proste ćwiczenie – zwykle są to niezupełnie ściśle zarysowane problemy, wymagające pewnej strategii. Umiejętność układania strategii ma kluczowe znaczenie.

Człowiek umiejący rozwiązywać problemy, niezależnie od tego czy są formułowane w języku obiektów matematycznych, czy może zagadek, a nawet wyzwań życia codziennego, wchodzi do szeroko rozumianej społeczności matematycznej poprzez sam fakt prowadzenia rozumowań i argumentowania. Wyzwala to w nim wielkie poczucie pewności i stanowi źródło inspiracji. Jest też zwyczajnie przyjemne – rozwiązujący problem uprawia swoisty taniec z matematyką, docenia jej piękno i jest na nie bardzo wyczulony.

Piękne porównanie daje nam Paul Zeitz. Przeciętny uczeń rozwiązujący *ćwiczenia* przypomina kogoś, kto trzy razy w tygodniu chodzi na siłownię, aby wzmocnić ciało. Wokół niego są dobrze znane urządzenia – wiadomo jak ich używać i przy pewnej pomocy łatwo ustalić również, które dają odpowiedni efekt. W przeciwieństwie do niego, rozwiązujący *problemy* przypomina człowieka udającego się na wyprawę w dzikie góry, obarczonego plecakiem i sprzętem biwakowym. Czeka go wiele nieprzewidywalnych okoliczności: chłód, upał, wilgoć, zmęczenie, głód i wszystko inne, co przyniesie przyroda. Będzie szukał drogi, może będzie musiał ją wytyczyć na nowo. Czy zawsze będzie to bardzo eleganckie i bezproblemowe? Oczywiście, że nie. Czeka go raz piękny widok, raz mgła i ulewa. Czasem zawróci. Słowem – przygoda.

Obydwie postaci wymienione wyżej wzmacniają się dzięki swoim aktywnościom. Rozwiązywanie ćwiczeń daje sprawność umysłu, podobnie jak rozwiązywanie problemów. Doświadczenie jest zgoła odmienne.

Czy rozwiązywanie problemów jest tylko dla wybranych, genialnych i bardzo nielicznych uczniów? Zdecydowanie nie, podobnie jak wędrówki po górach nie są jedynie dla wspinaczy czy miłośników przygód. Każdy może nauczyć się i pokochać wędrowanie po górach. Każdy może odnaleźć przyjemność wysiłku intelektualnego i piękno eleganckich dowodów. Każdy może znaleźć w sobie odwagę do pokonywania swojej niewiedzy samodzielnie, bez gotowych przepisów. Da mu to nie tylko radość na poziomie psychicznym, ale wyposaży w zasoby do pokonywania codziennych wyzwań, w strategie problematyzowania zagadnień.

Do tej właśnie przygody zapraszają konkursy, a i nieśmiało poniższy tekst, choć z natury przedmiotu dotyczy on jedynie wybranych zagadnień, bliskim treściom programowym. Jak zacząć? Nierozważne jest po prostu spakować plecak i ruszyć na szlak. Doświadczenie może być dewastujące i zniechęcające na całe życie. Często z lęku przed trudem próbujemy raczej zapamiętać trasę (na GPSie) niż być odkrywcami.

Zwykle w wędrowanie jesteśmy wprowadzani, poznając najpierw podstawowe sposoby radzenia sobie w dzikim terenie. Pewne podstawowe zachowania i nawyki są niezbędne, aby wędrówka mimo swojej nieprzewidywalności, nie zamieniła się w chaos i błądzenie. Istnieją pewne ogólne techniki rozumowania, o których opowiada ten wstępny wykład. Wprowadzenie nie będzie jednak polegać na podawaniu metod. Chodzi raczej o nauczanie problemowe – stawiamy problemy i wspólnie próbujemy je rozwiązać.

1.2 Strategia, taktyka i narzędzia w prowadzeniu dowodów

Paul Zeitz wspomina o trzech poziomach rozwiązywania problemów matematycznych. Można interpretować je również jako swego rodzaju mapę do przygody z rozumowaniami matematycznymi:

- **strategia** – matematyczne i psychologiczne koncepcje atakowania problemów matematycznych,
- **taktyka** – rozmaite metody matematyczne działające w różnych kontekstach,
- **narzędzia** – techniki dowodowe i triki dotyczące konkretnych sytuacji.

Różnica pomiędzy tymi poziomami zilustrowana jest następującym zadaniem.

Wykaż, że iloczyn czterech kolejnych dodatnich liczb całkowitych nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Podstawową strategią jest **zorientowanie się** w istocie problemu. Chodzi o dowód. Problemy matematyczne mają zwykle dwa oblicza – konstrukcyjny lub dowodowy. Następnie stwierdzamy, znajdując się dalej w obszarze strategii, że mamy udowodnić **niemożliwość** zajścia pewnej konkretnej własności. Podstawą postępowania w takiej sytuacji jest rozdzielenie problemu na dwie części:

- **założenia** – co wiemy o obiektach (nie są one tym samym, co dane),
- **teza** – cokolwiek mamy udowodnić.

W naszym problemie założenie to: Liczba n jest całkowita i większa od 0.

Teza brzmi: Liczba $n(n+1)(n+2)(n+3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Nie zawsze łatwo jest oddzielić założenie od tezy, co sprawia, że wielu uczniów gubi się już na poziomie strategii rozwiązywania zadania, choćby przez **błąd założenia tezy** lub **błędne sformułowanie tezy**. Jaką strategię możemy przyjąć, gdy mamy wykazać niemożliwość zajścia jakiejś konkretnej własności? Być może najbardziej podstawową strategię nazwać można:

decydujący krok (lub – dowód zbrodni)

Na czym polega? Chodzi o wyróżnienie potencjalnych bezpośrednich przyczyn, dla których jakieś zdanie nie jest prawdziwe. Jaki fakt oznacza bezpośrednio, że liczba m nie jest kwadratem? Takich faktów może być wiele. Oto przykłady, ilustrujące różne poziomy trudności

- liczba m jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9,
- liczba m jest ściśle pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych,
- liczba m daje resztę 3 z dzielenia przez 4.

Na początku przygody z zadaniami matematycznymi w ogóle nie mamy pojęcia, że takie fakty mają bezpośredni związek z zagadnieniem i jaką taktykę przyjąć, aby zastosować je do dodatniej liczby całkowitej $m = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Fakty takie, jak powyżej stają się z czasem narzędziami służącymi do stwierdzania, że pewna liczba nie jest kwadratem. Należą więc do poziomu trzeciego – i nic dziwnego – zgodnie z naszą strategią rozwiązujemy problem jakby od końca – skupiając się na hipotezie i jej bezpośrednich przyczynach. Szukamy narzędzia, a następnie techniki, która jest wymagana, by go użyć. Póki co nie mamy jednak ani jednego, ani drugiego.

Zmieniamy strategię na inną, często stosowaną, czyli (znów inwencja autora)

małe kroki (lub – badanie poszlak),

polegające na rozpatrywaniu w jaki sposób teza jest spełniona dla szczególnych (małych) przypadków.

Gdy policzymy wartość liczby $n(n+1)(n+2)(n+3)$ dla liczb od 1 do 5 otrzymujemy odpowiednio liczby $24, 120, 360, 840, 1680$. Możemy zastanowić się: co uzyskane właśnie liczby mają wspólnego z kwadratami? Okazuje się, że bardzo wiele – są one mniejsze od 1 od kwadratów liczb całkowitych. Dokładniej,

$$24 = 5^2 - 1, \quad 120 = 11^2 - 1, \quad 360 = 19^2 - 1, \quad 840 = 29^2 - 1, \quad 1680 = 41^2 - 1.$$

Zauważmy, że na podstawie tych poszlak możemy sformułować następującą ogólną obserwację.

Dodatnia liczba całkowita mniejsza od kwadratu o 1 nie jest kwadratem.

Znaleźliśmy więc szukanego świadka zbrodni. Zastosowanie dwóch strategii jednocześnie dało rezutaty. Czas na dobór taktyki oraz odpowiednich narzędzi.

Jak wykazać, że rozważana liczba $n(n+1)(n+2)(n+3)$ jest kwadratem pomniejszonym o 1? Oto kilka przykładowych technik, które mogą być pomocne:

- zmiana kolejności składników/czynników,
- rozkładanie na czynniki,
- przegrupowanie i podstawienie,
- symetryzacja,
- narzędzie: wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Na poziomie strategicznym udało nam się dokonać kluczowego kroku: nasz problem zamienił się w stosunkowo rutynowe ćwiczenie, dla którego rozwiązania można zastosować różne taktyki. Oto one:

- Technika przegrupowania:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n(n+3)(n+1)(n+2) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1.$$

- Technika: grupowanie i zwijanie

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2.$$

- Technika symetryzacji:

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2) = ((n^2+3n+1) - 1)((n^2+3n+1) + 1).$$

- Technika podstawienia: bierzemy $u = n^2 + 3n$:

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2) = u(u+2) = u^2 + 2u = (u+1)^2 - 1.$$

- Narzędzie: wzór skróconego mnożenia:

$$((n^2+3n+1) - 1)((n^2+3n+1) + 1) = (n^2+3n+1)^2 - 1.$$

- Technika: wyznaczanie współczynnika:

$$(n^2+an+1)^2 = n^4 + 2an^3 + (a^2+2)n^2 + 2an + 1 \Rightarrow a = 3.$$

O strategiach rozwiązywania problemów matematycznych można pisać wiele (przeformułuj, dziel i rządź, łam zasady itd.), ale nam przyda się jeszcze jedno istotne rozróżnienie, dotyczące samego procesu układania ciągu: strategia – taktyka – narzędzia. Dzieli on rozwiązywanie problemu na dwie fazy:

- **rozumowanie** – dochodzenie i układanie procesu rozwiązania,
- **argumentację** – przekonywanie siebie/innych o rozwiązaniu.

Rozumowanie to proces doboru, a argumentacja – to proces układania ciągu kroków, prowadzących od założenia do tezy, które realizują to rozumowanie. Te kroki nazywamy w logice **implikacjami**. Im bardziej zawiłe rozumowanie – tym bardziej skomplikowana może być argumentacja i proces decydowania, czy jest ona poprawna. Trzy podstawowe typy argumentacji (strategie dowodowe), to:

- **dedukcja** (dowód wprost),
- **rozumowanie apagogiczne** (dowód nie wprost),
- **indukcja matematyczna** (równoważna zasadzie dobrego porządku).

Na tym wykładzie skupimy się na dowodzie nie wprost, czyli podstawowej strategii dowodowej, wraz z towarzyszącymi jej często technikami – **zasadą szufladkową** i **zasadą minimum** (jest oczywiście szereg innych). Dwa kolejne wykłady poświęcimy technikom i narzędziom pracy z wyrażeniami algebraicznymi i równaniami, ukazującymi głównie dedukcję, czasem też redukcję oraz rozumowanie nie wprost, a na wykładzie czwartym mowa będzie o indukcji matematycznej, czyli strategii wywodzącej się z aksjomatu.

1.3 Dowód nie wprost (apagogiczny)

Greckie *hê eis to adunaton apagôgê* tłumaczy się na łacinę jako *reductio ad absurdum*, co znaczy: sprowadzenie do sprzeczności – absurdu, samozaprzeczenia, do fałszu. W praktyce prowadzenia dowodów, gdzie mamy założenia i chcemy wnioskować z nich tezę, próbujemy czasem z zaprzeczenia tezy wydedukować zaprzeczenie jednego z założeń, lub zaprzeczenie jakiegoś prawdziwego zdania. Czasem przypuszczenie o nieprawdziwości tezy dołączamy do założeń, a następnie z dotychczasowych założeń i przyjętego przypuszczenia dochodzimy do sprzeczności. Tego typu schematy rozumowania nazywamy **dowodem nie wprost**.

Dodajmy drobny komentarz na gruncie logiki. Wiadomo, że zachodzi równoważność:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p),$$

tłumacząca się na równoważność dwóch implikacji:

- z założenia wynika teza,
- z zaprzeczenia tezy wynika zaprzeczenie założenia.

Innymi słowy, jeśli udowodnimy twierdzenie zapisane w formie kontrapozycji: $\sim q \Rightarrow \sim p$, to udowodnimy twierdzenie zapisane w postaci implikacji $p \Rightarrow q$. Oto banalne przykłady takich rozumowań.

Zadanie 1. *Niech n będzie liczbą całkowitą, taką że liczba n^2 jest nieparzysta. Wykaż, że liczba n jest nieparzysta.*

Rozwiązanie. Zdaniem p niech będzie „liczba n^2 jest nieparzysta", a zdaniem q – „liczba n jest nieparzysta". Weźmy zatem zdaniem zaprzeczenie zdania q, czyli: $\sim q$ – „liczba n jest parzysta", czyli $n = 2k$, dla pewnej liczby całkowitej k. Teraz chcemy wywnioskować z tego zdanie $\sim p$. Rzeczywiście,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

czyli jest to liczba parzysta. Ze zdania $\sim q$ wywnioskowaliśmy zdanie $\sim p$. ■

Zadanie 2. *Nie istnieją liczby całkowite a oraz b, dla których* $18a + 6b = 1$.

Rozwiązanie. Bardzo łatwy argument nie wprost. Załóżmy nie wprost, że liczby a, b są rozwiązaniami powyższego równania. Wówczas liczba $18a + 6b$ jest podzielna przez 6. Oznacza to, że równa jej liczba 1 jest również podzielna przez 6, co jest nieprawdą. Zatem zdanie „istnieją liczby całkowite a, b, takie że $18a + 6b = 1$", stanowiące zaprzeczenie tezy, nie jest prawdziwe. Skoro zachodzi prawo podwójnej negacji $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$, to uzyskaliśmy tezę. ■

Rozumowań nie wprost można początkowo uczyć w ogóle w oderwaniu od logiki, posługując się bardziej zagadkami lub łamigłówkami. Ładny przykład opisuje profesor Wojciech Guzicki poświęcając osobny paragraf podręcznika *Rozszerzony program nauczania matematyki w gimnazjum* łamigłówce Sudoku.

Warto powiedzieć, że na gruncie szkolnym nie ma obecnie kursu logiki, a wielu uczniów ma problem z **formułowaniem zaprzeczeń zdań**. Prowadzi to chociażby do niezrozumienia pojęcia kontrprzykładu. Zobaczmy to zjawisko na trzech prostych zadaniach, pochodzących z testu OMJ.

Zadanie 3. *Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n wynosi* 30. *Wynika z tego, że n jest podzielna przez*

(a) 2, *(b) 3* *(c) 5*

Warto zwrócić uwagę na konstrukcję pytania. W istocie orzekamy o prawdziwości trzech implikacji. To jedna z najczęściej spotykanych konstrukcji w zadaniach testowych OMJ. Dlaczego jest to ważne? Nie wystarczy bowiem podać PRZYKŁADU liczby, która ma sumę cyfr równą 30 i jest podzielna przez 2, 3 czy 5. Trzeba zdecydować: czy KAŻDA liczba, której suma cyfr wynosi 30 jest podzielna przez 2. A zatem można odpowiedzieć: TAK, KAŻDA, albo nie, bo istnieje PRZYKŁAD takiej liczby, która ma sumę cyfr 30, a nie jest podzielna przez którąś z tych liczb. Odpowiedź negatywna wskazuje więc tzw. KONTRPRZYKŁAD na prawdziwość zdania „Każda liczba o sumie cyfr 30 jest podzielna przez 2." Tak brzmi bowiem przeformułowanie zdania (formalnie: zdanie równoważne): „Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez 2".

Jakie są zatem prawidłowe odpowiedzi? Liczba, której suma cyfr wynosi 30 nie musi być parzysta. Wystarczy przecież rozważyć liczbę złożoną z samych cyfr „1", których jest... 30. Liczba ta jest nieparzysta. Inna, to 3999. Wskazuje ona także na negatywną odpowiedź w podpunkcie (c) to NIE. Jest to właśnie kontrpzykład do prawdziwości zdań (a) oraz (c). I nic nie da, że jest mnóstwo przykładów liczb o sumie cyfr 30, które są podzielne jednocześnie przez 2, 3 czy 5. Do prawdy dojść można wieloma drogami, ale obalić fałsz wystarczy jednym celnym przykładem.

Podpunkt (b) nie powinien sprawić problemu, bo mowa jest o kryterium szkolnym. Skoro suma cyfr to 30, a 30 jest podzielna przez 3, to liczba n też jest podzielna przez 3. A zatem odpowiedź w tym podpunkcie brzmi: TAK.

Zadanie 4. *Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej* 2*, która jest podzielna przez:*

(a) 3, *(b) 5* *(c) 7*

Na pozór zadanie bardzo podobne do poprzedniego, a jednak sama konstrukcja pytania jest zupełnie inna. To jest typ pytania, które można nazwać zadaniem „na przykład". Nie pytamy tym razem czy KAŻDY liczba całkowita o sumie cyfr 2 jest podzielna przez 3, bo przecież sama liczba 2 nie jest podzielna przez 3 i byłoby to nonsensem. Użyto sformułowania „Istnieje..." Pytamy tym razem czy JAKAKOLWIEK liczba całkowita o sumie cyfr równej 2 jest podzielna przez 3?

To oczywiście zadanie szkolne. Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 3, bo 2 nie jest podzielne przez 3. To rozumowanie jest wprost banalne, ale 8,5% uczestników testu (czyli ponad 1000 osób) rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo. Dało to sygnał, że specyficzna konstrukcja pytania oraz warunek przypominający kryterium szkolne potrafi wielu uczniów skonfundować.

Podpunkt (b) sprawdza czy uczestnik rozpoznał jakie to są liczby całkowite o sumie cyfr równej 2. Dokładniej – sprawdzano czy uczestnik uwzględnił liczby, których cyfry są zerami. Jeśli tak, to korzystając ze szkolnego kryterium podzielności przez 5 bez problemu rozwiąże ten problem. Owszem, istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez 5. Jest to na przykład 20, ale też 110, 1100, 1010 i wiele innych... A jednak 11,3% uczniów rozwiązało ten podpunkt nieprawidłowo.

Dochodzimy wreszcie do trudniejszego punktu. Niewiele dzieci zna cechę podzielności przez 7, choć takie cechy istnieją (odsyłam do *Opowieści matematycznych* prof. Szurka). Być może patrząc na postać możliwych do uzyskania liczb (mogą mieć one jedynie cyfry 0, 1, 2) uczeń będzie zgadywał, że takich liczb podzielnych przez 7 nie ma. W istocie, odpowiedziało tak ponad 80% uczestników testu. A jednak dali się oszukać! Liczba taka istnieje i jest nią 1001. Nietrudno to sprawdzić przez zwykłe dzielenie pisemne.

Wskazanie na liczbę 1001 nie jest przypadkowe, ponieważ to ona wiąże się z cechą podzielności przez 7. Zobaczmy to na przykładzie liczby 123456789. Aby sprawdzić czy jest podzielna przez 7, rozważamy jedynie, czy podzielna przez 7 jest liczba $123-456+789$. Mamy:

$$\begin{aligned}123456789 &= 123\cdot 10^6+345\cdot 10^3+789\\ &= 123-345+789+\underbrace{123\cdot 999\cdot 1001+345\cdot 1001}_{\text{podzielna przez 7}}.\end{aligned}$$

Zadanie 5. *Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n. Wynika z tego, że:*
a) każda cyfra liczby n jest równa 1,
b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy niż 2,
c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr n.

Skomplikowane sformułowania jak wyżej można „rozpracowywać” próbując oglądać przykłady obiektów spełniających postawiony warunek. Jakie są, dla przykładu, liczby dwucyfrowe takie, że suma cyfr tych liczb jest równa liczbie cyfr... czyli 2? Są tylko dwie takie liczby: 20 i 11. Kto to zrobi uzyskuje natychmiastową odpowiedź negatywną na punkt (a).

Podpunkt (b) pyta o iloczyn cyfr, który to warunek może ponownie zaskoczyć (nie znajdziemy go w szkole), ale konfrontacja z poprzednimi przykładami powinna dać właściwą intuicję: odpowiedź brzmi TAK. Nie wymagamy od ucznia sformułowania uzasadnienia dowodu, ale nie jest on trudny i warto go pokazać omawiając test na kółku. Pomysł mieści się w zdaniu: „*Jeśli liczba n spełnia warunki zadania, to albo wszystkimi jej cyframi są* 1, *albo w jej zapisie dziesiętnym występuje cyfra* 0”. Jak to pokazać? Pewnie jest kilka sposobów, ale warto przytoczyć ważny typ rozumowania: dowód nie wprost.

Załóżmy, że zdanie, które napisaliśmy wyżej nie jest prawdziwe. Co to znaczy? Już samo to pytanie jest pouczające z perspektywy ucznia. Znaczy to, że istnieje liczba, w której zapisie dziesiętnym nie występuje liczba 0 i której wszystkimi cyframi nie są 1 taka, która spełnia warunek zadania. A zatem suma jej cyfr równa jest liczbie jej cyfr. Jednak suma jej cyfr to suma składników, z których każdy jest niemniejszy niż 1, i suma ta równa jest liczbie składników! To jest niemożliwe, bo któryś ze składników jest większy niż 1, a więc suma cyfr tej liczby jest większa niż suma składników. Dochodzimy do sprzeczności z założeniem o istnieniu takiej liczby, która przeczyłaby zdaniu napisanemu wcześniej. A zatem jest ono prawdziwe. Z niego wynika oczywiście punkt (b). Iloczyn cyfr liczby opisanej w zadaniu wynosi 0 lub 1. Jest zatem mniejszy niż 2.

Przechodzimy wreszcie do punktu (c). Widzimy, że dotyczy ono po raz kolejny nieco innego zagadnienia niz poprzednie punkty. Jest to charakterystyczne dla trudniejszych zadań testowych w OMJ. Ich zadaniem jest pewne zróżnicowanie uczestników i sprawdzenie ich intuicji. Oczywiście – liczba $n+1$ jest większa od n. Ale nie oznacza to, że zwiększa się tym samym suma cyfr! To naturalne, przecież 10 jest większe od 9, ale ma mniejszą sumę cyfr.

Jak podać przykład liczby spełniającej warunki zadania takiej, że o 1 większa ma mniejszą sumę cyfr? Intuicja podpowiada, że ta liczba musi kończyć się cyfrą 9. Otóz liczbą tą jest dziesięciocyfrowa liczba 100000009. Suma jej cyfr to oczywiscie 10, a zatem nalezy ona do omawianego zbioru. Powiększona o 1 będzie miałą sumę cyfr 2. A zatem, ponownie jak w jednym z poprzednich zadań: konstrukcja pytania każe powiedzieć czy KAŻDA liczba spełniająca warunki zadania ma tę własność, że powiększona o 1 ma większą sumę cyfr. Odpowiedź brzmi NIE, bo właśnie podaliśmy kontrprzykład.

* * *

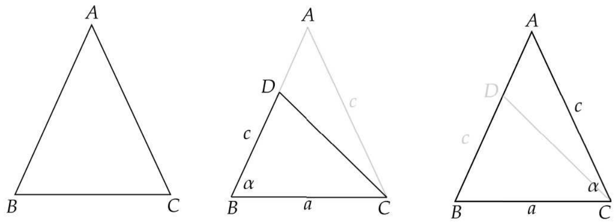
Omówiony schemat rozumowania występuje od pierwszych zachowanych choćby we fragmentach traktatów matematycznych. Ich systematyczne wprowadzenie przypisujemy Akademii Ateńskiej i samemu Platonowi. Arystoteles, poróżniony z uczniami Platona, założył własną szkołę i wypracował podstawy logiki, jako osobnej od matematyki dyscypliny.

Rozumowanie nie wprost występuje wielokrotnie w *Elementach* Euklidesa. Już w pierwszej Księdze w Twierdzeniu I.4 dowodzi on najpierw, że jeśli trójkąt ABC spełnia $AB = AC$, to kąty ABC oraz ACB są równe. Wyprowadza ten fakt z cechy przystawania bok-kąt-bok. Dowód twierdzenia odwrotnego, o numerze I.5, wymaga rozumowania nie wprost. Oto ten fakt w formie zadania[1].

[1]Warto zobaczyć dowód w przepięknej redakcji graficznej Olivera Byrne'a: `https://www.c82.net/euclid/book1/`.

Zadanie 6. *Niech ABC będzie trójkątem, w którym kąty ABC oraz ACB są równe. Wtedy $AB = AC$.*

Rozwiązanie. Niech $AB = b, AC = c$. Przypuśćmy, że $b \neq c$. Wtedy $b < c$ lub $b > c$. Niech $b > c$. Wówczas obieramy punkt D na boku AB, taki że $BD = AC = c$. Na mocy cechy kąt–bok–kąt, trójkąty DBC oraz ACB są przystające, co jest niemożliwe, skoro jeden jest właściwie zawarty w drugim.



■

Niech nas nie zmyli fakt, że na algebrze mówimy o takim dowodzie. W istocie Euklides prowadził dedukcję w sposób bardzo intuicyjny, pomijając kwestie uznawane przez siebie za oczywiste, choćby trychotomię:

$$b < c, \quad b = c, \quad b > c.$$

Klasycznym schematem rozumowania nie wprost jest reguła Claviusa (*Consequentia mirabilis*), XVI-wiecznego tłumacza i komentatora Euklidesa, użyta po raz pierwszy przez Arystotelesa (w dziele *Proprepticus*, tzn. przekonujące mowy) ponad 100 lat przed Euklidesem, mająca formę implikacji:

$$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p.$$

Przykładem jest dowód Euklidesa na istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych. Oto jego schemat:

- Rozważmy zdanie q – istnieje taka liczba naturalna n, że liczb pierwszych jest n.
- Ze zdania q wnioskujemy, że $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ jest liczbą pierwszą.
- Stąd wnioskujemy $\sim q$ – nieprawdą jest, że liczb pierwszych jest tylko n.
- A zatem prawdą jest zdanie $\sim q$, zgodnie z regułą Claviusa, dla $p = \sim q$.

Bardziej zaawansowanym przykładem zastosowania tego klasycznego schematu rozumowania jest dowód Cantora nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, a dokładniej uzasadnienie następującego zdania: Jeśli $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ jest dowolnym ciągiem elementów zbioru T nieskończonych ciągów binarnych (zero-jedynkowych), to można skonstruować element zbioru T, który nie jest elementem tego ciągu.

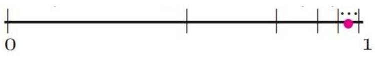
Innym klasycznym dowodem nie wprost, pochodzącym od Archimedesa, jest rozumowanie wykorzystujące tak zwaną „metodę wyczerpywania”, czy w praktyce: aksjomat Archimedesa: dla dowolnych dodatnich liczb a i b istnieje taka liczba naturalna n, że $n \cdot a > b$. Metoda ta pochodzi w swojej istocie od młodszego o ponad 100 lat Eudoksosa i można ją sformułować (robię to za prof. Kordosem) w sposób następujący:

> *Jeśli z jakiejś figury płaskiej (przestrzennej) wyjmiesz więcej niż połowę,*
> *z tego co zostanie znów wyjmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej,*
> *to suma pól (objętości) wyjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole (objętość) tej figury.*

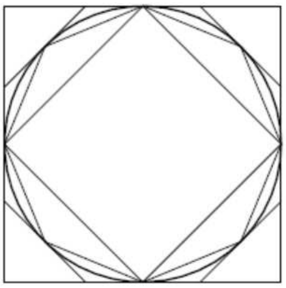
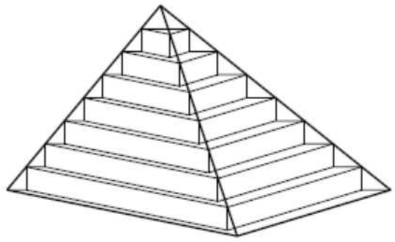
Oto przykład związany z rozwiązaniem paradoksu Zenona. Chodzi w istocie o uzasadnienie wzoru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

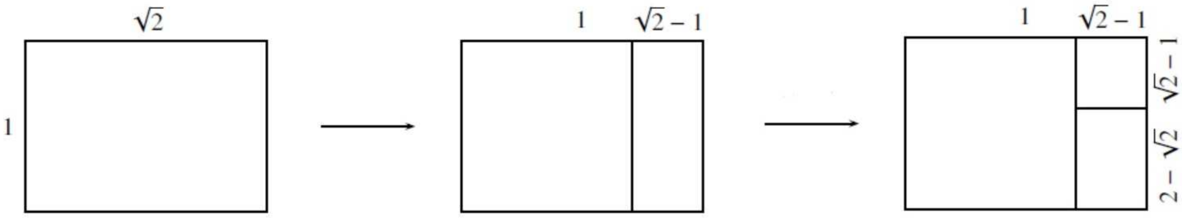
Jest jasne, jak mówi paradoks, że rozważana suma nie przekracza 1. Załóżmy nie wprost, że suma ta jest mniejsza od 1 i jest równa $1 - x$, dla pewnego $x > 0$. Wobec aksjomatu Archimedesa istnieje takie n, że $n \cdot x > 1$. A stąd $x > \frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$. Zatem pierwsze n składników rozważanej sumy jest większe niż $1 - x$. Uzyskaliśmy sprzeczność. Stąd rozważana suma nieskończona nie jest mniejsza od 1.



Czy Czytelnik widzi, że w istocie z punktu widzenia starożytnych, w ogóle nie potrzebujemy tu pojęcia nieskończoności? W istocie radzimy sobie tu w skończenie wielu krokach. Podobne argumenty służyły uzasadnieniu wzorów na pole koła czy objętość ostrosłupa, bez używania sum nieskończonych, przy użyciu teorii proporcji Eudoksosa! Wystarczy jedynie podobnego typu rozumowanie nie wprost przez „wyczerpywanie". Tak radzono sobie aż do końca średniowiecza. Czasami mówi się nawet o „całce starożytnych".

Inny argument geometryczny, pochodzący ze starożytnej Grecji, dotyczy niewymierności liczby $\sqrt{2}$. Nie chodzi o klasyczny dowód, o którym powiemy dalej, ale o spojrzenie z punktu widzenia algorytmu Euklidesa. Rozważmy prostokąt o bokach długości $a = 1$ oraz $b = \sqrt{2}$. Reprezentujemy odejmowanie mniejszej liczby od większej poprzez obcięcie z wyjściowego prostokąta kwadratu o krótszym boku. Zatem w dwóch krokach otrzymamy prostokąt o bokach długości $\sqrt{2} - 1$ oraz $\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$, mający taki sam kształt, jak wyjściowy prostokąt, przy czym dłuższy bok jest teraz pionowy, a krótszy poziomy. Z tego wynika, że opisany proces nigdy się nie skończy, a przecież dla liczb wymiernych jest inaczej!



Podczas naszych wykładów pojawiać się będą różne typy rozumowań, związane z metodą dowodu nie wprost. Nie są one jej wariantami, ale są typowymi schematami rozumowania, które jej towarzyszą.

1.4 Zasada szufladkowa Dirichleta

Zasada mówi, że jeśli zbiór n-elementowy rozbijemy na mniej niż n podzbiorów, to co najmniej jeden z tych podzbiorów zawiera więcej niż jeden element. Inaczej mówiąc – funkcja ze zbioru mającego więcej niż n elementów do zbioru n elementowego nie jest różnowartościowa. Są też ogólniejsze warianty.

Można ową „zasadę" wyrazić poglądowo i często stosujemy różne wizualizacje, wplatane do narracji rozumowań: np. elementy rozważanego zbioru nazywamy gołębiami, lub skarpetkami, a podzbiory nazywamy przegródkami, bądź też szufladkami, stąd na Zachodzie mówi się o tzw. pigeonhole[2] principle, a u nas o zasadzie szufladkowej. Oto bardzo proste przykłady zastosowań.

- wśród trzech różnych liczb naturalnych są zawsze 2 parzyste lub 2 nieparzyste (skarpetki to liczby; szufladki – parzystość, nieparzystość)
- wśród pięciu liczb naturalnych pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia przez 4 (skarpetki – liczby; szufladki – reszty: 0, 1, 2, 3)
- wśród dowolnych 10 liczb naturalnych znajdą się dwie z tą samą cyfrą jedności (skarpetki – liczby; szufladki – reszty 0, 1, ..., 9)

Zobaczmy kilka zastosowań w prostych zadaniach.

[2] *Pigeonholing* oznacza w języku angielskim: zaszufladkowanie, więc nie ma tu rozbieżności.

Zadanie 7. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub zielony. Wykaż, że istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.*

Rozwiązanie. Wystarczy popatrzeć na trójkąt równoboczny o boku 1. Dwa z jego wierzchołków muszą być, na mocy zasady szufladkowej, tego samego koloru. ■

Zadanie 8. *Udowodnij, że w gronie 6 osób albo pewne 3 osoby się znają, albo pewne 3 się nie znają.*

Rozwiązanie. Każdą z 6 osób traktujemy jako wierzchołek sześciokąta foremnego. Jeśli osoby się znają, to odcinek łączący odpowiadające im wierzchołki nazywamy zielonym. Jeśli się nie znają – odcinek łączący je nazywamy czerwonym. Zatem teza zadania mówi: jeśli 6 wierzchołków sześciokąta foremnego połączymy odcinkami kolorów zielonego i czerwonego, to dostaniemy przynajmniej jeden trójkąt.

Weźmy zatem jeden z wierzchołków, powiedzmy A. Wychodzi z niego 5 odcinków. Owe odcinki to skarpetki, a szufladki – to kolory odcinków. W szczególności pewne 3 jednokolorowe odcinki wychodzą z A. Powiedzmy, że są czerwone. Prowadzą one do punktów A_1, A_2, A_3, które też są połączone trzema odcinkami. Wszystkie te odcinki nie mogą być zielone, bo $A_1A_2A_3$ byłby zielony. Ale jeśli choć jeden z odcinków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 jest czerwony, to razem z odcinkami prowadzącymi do wierzchołka A powstanie trójkąt czerwony, co kończy dowód. ■

Zadanie 9. *W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że w okrąg o promieniu 1 można wpisać sześciokąt foremny o boku 1. W wierzchołku każdego takiego sześciokąta kładziemy koło o promieniu 1. Jest ich 6 i to będą nasze szufladki. Skoro mamy 7 punktów, to pewne 2 muszą leżeć w jednym z tych kół. Leżą one jednocześnie w wyjściowym kole, a więc ich odległość nie może być większa od 1. ■

Zadanie 10. *Udowodnij, że w grupie 2011 osób przynajmniej 2 osoby mają taką samą liczbę znajomych (osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy osoba B zna osobę A).*

Rozwiązanie. Niech naszymi *skarpetkami* (elementami zbioru) będą poszczególne osoby. Szufladkami zaś – liczby znajomych, jakie można przypisać tym osobom.. Szufladek jest 2010, bo choć teoretycznie można znać: 0 osób, 1 osobę, aż do posiadania 2010 znajomych, to w tym samym gronie 2011 osób nie może być osoby, która nikogo nie zna i osoby, która zna wszystkich poza sobą. 0 osób i 2010 osób. Szufladek jest więc w istocie 2010, a skarpetek – 2011. Stąd pewne dwie osoby mają tyle samo znajomych. ■

Zadanie 11. *Ze zbioru* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *wybieramy takie 51 liczb, że suma żadnych dwóch z nich nie jest równa 100. Pokazać, że zbiór ten zawiera kwadrat liczby całkowitej.*

Rozwiązanie. Oznaczmy zbiór tych 50 liczb przez A. Przypuśćmy nie wprost, że zbiór A nie zawiera kwadratu. Rozważmy pary $\{1, 99\}, \{2, 98\}, \ldots, \{49, 51\}$. Jest ich 49. Co więcej, zbiór A nie zawiera ani 36, ani 64. Zatem zbiór A zawiera przynajmniej 49 elementów z pozostałych par. Zawiera więc pewną parę w całości – na mocy zasady szufladkowej. Ale zakładaliśmy, że w A nie ma elementów, których suma równa jest 100. Uzyskujemy sprzeczność z przypuszczeniem, że w zbiorze A nie ma kwadratu. ■

Zadanie 12. *Ze zbioru liczb* $\{1, 2, \ldots, 100\}$ *wybieramy 51 liczb. Udowodnić, że:*

- *różnica pewnych dwóch wynosi 1,*
- *pewne dwie z nich są względnie pierwsze,*
- *są takie dwie, że jedna dzieli się przez drugą.*

Rozwiązanie. Tym razem rozwiązanie nie jest oczywiste. Za skarpetki bierzemy owe wybrane 51 liczb. Szufladkami będą pary liczb postaci

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{99, 100\}$$

Mamy zatem 50 szufladek. Jak nasza liczba jest w zbiorze 51 wybranych liczb, to wrzucamy ją do szufladki z numerem jej odpowiadającym. Np. liczba 5 trafia do szufladki (5,6). Zasada Dirichleta mówi, że w przynajmniej jednej z szufladek będą 2 liczby.

Pozostaje sprawa podzielności. Tu szufladki będą dość zaskakujące. Każda liczba naturalna może być zapisana jako $2^m \cdot q$, gdzie q jest liczbą nieparzystą. Dzielimy zbiór $\{1, 2, \ldots, 100\}$ na szufladki składające się z liczb o ustalonym $q > 1$. Stąd w pierwszej szufladce liczby postaci $2^m \cdot 1$, potem $2^m \cdot 3$ i tak dalej. Liczb nieparzystych od 1 do 100 jest 50, a więc mamy 50 szufladek. Wybraliśmy 51 liczb, a więc pewne dwie są postaci $2^m \cdot q$ oraz $2^n \cdot q$. Zatem jedna jest podzielna przez drugą. ■

Zadanie 13. *Udowodnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie 2, których suma lub różnica dzieli się przez 10.*

Rozwiązanie. Zastąpmy liczby ich resztami z dzielenia przez 10. To będą nasze skarpetki. Zaś szufladki mają postać:

$$\{0\}, \quad \{5\}, \quad \{1, 9\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{3, 7\}, \quad \{4, 6\}.$$

- jeśli dwie z siedmiu reszt to jednocześnie 0 lub 5, to ich różnice są podzielne przez 10
- jeśli dwie reszty są równe jednej z par (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), to suma dwóch takich liczb jest podzielna przez 10

Ale skoro mamy 7 skarpetek i sześć szufladek, to pewne dwie wpadają do tej samej szufladki. A więc ich suma lub różnica jest podzielna przez 10. ■

Zadanie 14. *Niech dany będzie zbiór 2011 liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Wykaż, że istnieje w nim taki podzbiór, że suma wszystkich jego elementów jest podzielna przez 2011.*

Rozwiązanie. Rozważmy parami różne liczby

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$$

Jeśli jakakolwiek z liczb b_i jest podzielna przez n, to koniec zadania – za podzbiór wyjściowego zbioru bierzemy składniki tej liczby. Jeśli zaś nie, to pozostaje n-1 reszt jakie mogą przyjmować. Zgodnie z zasadą szufladkową dla pewnych b_i, b_j reszty się powtórzą. Zatem $b_i - b_j$ jest podzielne przez n, dla $i > j$. Ale $b_i - b_j$ jest sumą elementów $a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_i$. ■

Zadanie 15. *Ze zbioru 27 parami różnych liczb nieparzystych (dodatnich) mniejszych od 100 można wybrać dwie, których suma równa jest 102.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że dokładnie 24 pary liczb sumują się do 102:

$$\{3, 99\}, \{5, 97\}, \ldots, \{49, 53\}.$$

W czym nam to pomoże? Otóż chcielibyśmy, by z 27 wybranych przez nas liczb pewne dwie były w jednej z powyższych par. A więc pary liczb znowu posłużą nam jako szufladki. Zauważmy jednak, że wykluczyliśmy z szufladek liczby 1 i 51. Wprawdzie $1 + 101 = 51 + 51 = 102$, ale 101 nie może być w zbiorze naszych 27 liczb, co więcej nie ma w nim dwóch egzemplarzy 51 – wszystkie elementy naszego zbioru są różne. Teoretycznie jednak w zbiorze 27 liczb nieparzystych mniejszych od 100 liczby 1 oraz 51 mogą występować. No to jeśli występują, to zostaje jeszcze 25 pozostałych elementów. To są nasze skarpetki. Widać, że pewne dwie wpadają do tej samej szufladki, a więc pewna para tych liczb jest parą, której suma równa jest 102. ■

Zadanie 16. *Na spotkanie absolwentów liceum przyjechało 17 osób. Każdy rozmawiał z każdym na jeden z trzech różnych tematów. Każda para rozmawiała dokładnie na jeden temat. Udowodnij, że istnieje trójka absolwentów, którzy mówili między sobą na ten sam temat.*

Rozwiązanie. Nazwijmy tematy T_1, T_2, T_3. Rozważmy dowolnego studenta – A. Poza nim jest 16 studentów i 3 tematy do omawiania. Zgodnie więc z zasadą szufladkową A musiał rozmawiać na określony temat z przynajmniej 6 innymi studentami. Nazwijmy ten temat T_3. Gdyby się okazało, że któryś dwóch z tych sześciu też rozmawiało na temat T_3, to koniec. A jeśli nie, to rozmawiali na jeden z tematów: T_1, T_2. Weźmy jednego z tych 6 studentów i nazwijmy go B. Zgodnie z zasadą szufladkową ma on do wyboru 2 tematy i 5 rozmówców. A więc z trójką z nich rozmawia na określony temat, powiedzmy T_2. Jeśli dwójka z tych trzech rozmawia też na T_2, to koniec. Jeśli nie, to ta trójka musi mówić między sobą o T_1. ■

1.5 Zasada minimum i maksimum

Sformułujemy teraz podstawowy wariant zasady dotyczącej podzbiorów zbiorów uporządkowanych, będącej standardowym narzędziem w prowadzeniu dowodów.

Obserwacja 1.1: Zasada minimum i maksimum – wersja intuicyjna

W skończonym zbiorze liczb rzeczywistych istnieje element największy i element najmniejszy.

Stosowanie zasady minimum bywa mało intuicyjne, zwłaszcza jeśli nie bierzemy jej pod uwagę jak dostępnej taktyki. Jak zobaczymy na poniższych przykładach, stosowanie zasady minimum wymaga nierzadko jednoczesnego rozumowania nie wprost oraz korzystania z zasady szufladkowej.

Zadanie 17. *Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każde dwie ściany mają inną liczbę boków?*

Rozwiązanie. Taki wielościan nie istnieje. Przypuśćmy przeciwnie. Weźmy ścianę F o największej liczbie m krawędzi. Wówczas ściana F oraz m sąsiadujących z nią ścian to wielokąty, które mogą mieć $3, 4, 5, \ldots, m$ boków. Mamy zatem $m+1$ ścian, a tylko $m-2$ możliwości. Stąd przynajmniej jedna liczba boków musi wystąpić dwukrotnie. Doszliśmy do sprzeczności. ■

Zadanie 18. *Każdy punkt kratowy na płaszczyźnie oznaczamy liczbą naturalną. Wiadomo przy tym, że każda z przypisanych liczb jest średnią arytmetyczną liczb przypisanych sąsiednim punktom (z góry, z dołu, z lewej i z prawej). Wykaż, że wszystkie wpisane liczby są równe.*

Rozwiązanie. Rozważmy najmniejszą z liczb wpisanych w jednym z punktów kratowych (wybieramy ją wprawdzie ze zbioru nieskończonego, o czym na kolejnym wykładzie), równą m. Liczby wpisane w sąsiadujące z tym punktem punkty kratowe niech będą równe a, b, c, d. Zatem $m = (a+b+c+d)/4$, czyli

$$a+b+c+d = 4m.$$

Z założenia o liczbie a mamy $a \geqslant m$, $b \geqslant m$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$. Gdyby którakolwiek z tych nierówności była ostra, to mielibyśmy $a+b+c+d > 4m$, co przeczy warunkowi wyżej. Stąd $a = b = c = d$. Stąd wnioskujemy, że wszystkie liczby wpisane w punkty kratowe są równe m. ■

Zadanie 19. *W pewnej grupie co najmniej jedna para osób to znajomi oraz żadne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych nie mają wspólnych znajomych. Wykaż, że pewna osoba w tej grupie ma dokładnie jednego znajomego.*

Rozwiązanie. Rozważmy osobę o największej liczbie znajomych, równej n. Niech ci znajomi to $x_1, \ldots, x_n$. Z założenia zadania wynika, że każde dwie z tych osób mają inne liczby znajomych. Co więcej, każda z tych osób ma nie więcej niż n, a więc jedna z nich musi mieć jednego znajomego. ■

Zadanie 20. *Na płaszczyźnie pokolorowano skończenie wiele punktów: część na biało, a część na czarno, przy czym wiadomo, że każdy odcinek łączący dwa punkty tego samego koloru zawiera punkt innego koloru. Pokazać, że wszystkie pokolorowane punkty leżą na jednej prostej.*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, wbrew tezie, że nie wszystkie pokolorowane punkty leżą na jednej prostej. Rozważmy trójkąt o najmniejszym (dodatnim) polu złożony z tych punktów. Dwa z jego wierzchołków są jednego koloru. Oznacza to, że jeden z boków tego trójkąta zawiera w swoim wznętrzu punkt innego koloru. Oznacza to jednak, że istnieje trójkąt o mniejszym polu o pokolorowanych wierzchołkach. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

Zadanie 21. *Niech X będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Przyjmijmy, że każdy punkt z X jest środkiem odcinka o końcach w zbiorze X. Wykaż, że X jest zbiorem nieskończonym.*

Rozwiązanie. Przypuśćmy nie wprost, że X jest zbiorem skończonym. Wówczas zgodnie z zasadą maksimum, X zawiera podzbiór punktów będących najbardziej na lewo (o najmniejszej pierwszej współrzędnej). W tym podzbiorze niech M będzie punktem o najmniejszej drugiej współrzędnej (znowu zasada maksimum). Punkt M nie może być środkiem odcinka AB, gdzie $A \neq B \in X$, ponieważ jeden z punktów A, B musiałby być albo na lewo od M, albo poniżej M (nietrudno to przełożyć na rachunek). Uzyskana sprzeczność dowodzi, że X nie jest zbiorem skończonym. ■

Przejdźmy do przykładów pokazujących mniej oczywiste zastosowania, zwłaszcza w teorii liczb.

Twierdzenie 1.1: O dzieleniu z resztą

Niech a, b będą liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $a \neq 0$. Wówczas istnieją liczby naturalne q, r, przy czym oraz $0 \leqslant r < a$ takie, że:

$$b = qa + r.$$

Liczbę r nazywamy **resztą z dzielenia** b przez a.

Dowód. Weźmy najmniejszą z liczb należących do skończonego zbioru liczb nieujemnych postaci:

$$\{b, b-a, b-2a, b-3a, b-4a, \ldots\}$$

równą $b - ta$, dla pewnego $t \in \mathbb{N}$. Twierdzimy, że liczba $b - ta$ jest mniejsza niż a. W przeciwnym bowiem razie mielibyśmy $b - ta - a \geqslant 0$, co oznaczałoby, że $b - (t+1)a \geqslant 0$. To jednak przeczyłoby wyborowi t jako takiej liczby, dla której $b - ta$ jest najmniejszą nieujemną liczbą w zbiorze liczb postaci $b, b-a, b-2a, b-3a, b-4a, \ldots$. A zatem rzeczywiście biorąc za q liczbę t oraz za r liczbę $b - ta$ dostajemy

$$b = qa + r = ta + (b - ta),$$

gdzie $0 \leqslant b - ta < a$ oraz $q = t \geqslant 0$. □

Ciekawa i ważna ilustracja zasady maksimum pochodzi z *Teorii Liczb* W. Sierpińskiego.

Zadanie 22. *Udowodnij, że w każdym skończonym ciągu kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, która jest podzielna przez pewną taką potęgę liczby* 2*, przez którą nie jest podzielna żadna inna liczba tego ciągu.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że rozważane liczby są postaci

$$n, n+1, \ldots, n+k,$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n, k. Niech 2^a oznacza najwyższą całkowitą potęgę liczby 2, która jest dzielnikiem co najmniej jednej z rozważanych liczb, na przykład liczby $n + q$, dla pewnego $0 \leqslant q \leqslant k$. Mamy więc $n + q = 2^a(2t-1)$, gdzie t jest liczbą całkowitą. Gdyby istniała jeszcze inna liczba $n + r$ w rozważanym zbiorze, również podzielna przez 2^a, wówczas mielibyśmy $n + r = 2^a(2s-1)$, i gdyby przyjąć, że $n + q < n + r$, to mielibyśmy także $2t - 1 < 2s - 1$, skąd $2t - 1 < 2t < 2s - 1$, a więc

$$n + q < 2^{a+1}t < n + r.$$

Liczba $2^{a+1}t$ należałaby więc również do rozważanego ciągu i byłaby podzielna przez 2^{a+1}, wbrew określeniu liczby a. W rozważanym ciągu istnieje więc tylko jedna liczba podzielna prze 2^a. ■

Oto inne zadanie, tym razem w formie nierówności. Nie przeprowadzimy rozumowania nie wprost, ale bezpośrednie zastosowanie zasady maksimum będzie nieoczywiste.

Zadanie 23. *Dane są liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_n$, przy czym suma iloczynów wszystkich możliwych par dwóch różnych elementów tego zbioru jest równa* 1*. Wykaż, że można z tego zbioru wykreślić jedną liczbę tak, by suma pozostałych była mniejsza niż $\sqrt{2}$.*

Rozwiązanie. Niech x_1 będzie największą z liczb $x_1, \ldots, x_N$. Wówczas

$$(x_2 + \ldots + x_n)^2 = \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j.$$

Ponadto z założenia o wyborze x_1 zachodzą nierówności:

$$x_2^2 < 2x_1x_2, \quad x_3^2 < 2x_1x_3, \quad \ldots, \quad x_n^2 < 2x_1x_n.$$

Dodając te nierówności do wcześniejszej równości otrzymujemy:

$$(x_2 + \ldots + x_n)^2 < \sum_{i=2}^{n} 2x_1x_i + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j.$$

Z założenia ostatnia suma równa jest 2, więc rzeczywiście $x_2 + \ldots + x_n < \sqrt{2}$. ■

1.6 Zasada minimum dla niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$

Na trzecim wykładzie omówimy zasadę minimum dla niekoniecznie skończonych podzbiorów liczb naturalnych. Jest ona bowiem równoważna metodzie indukcji.

Twierdzenie 1.2: Zasada minimum ($\mathbb{N}$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym)

W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza, czyli mniejsza lub równa od każdej liczby należącej do tego zbioru.

W tym miejscu zilustrujemy tę metodę opisując **technikę nieskończonego zstępowania**, pochodzącą od Fermata. Pierwotnie wiązała się ona z dowodem twierdzenia mówiącego, że pole trójkąta prostokątnego, którego boki mają długości wymierne, nie może być kwadratem liczby całkowitej. Metoda ta pozwalała rozwiązać ważne problemy teorii kwadratów, a także umożliwiała (czego być może autor był świadom) dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata dla $n = 4$. Pokażmy prostą jej ilustrację, poprzez słynny argument o niewymierności $\sqrt{2}$.

Zadanie 24. *Równanie $q^2 = 2r^2$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych innego niż* $(0, 0)$.

Rozwiązanie. Załóżmy nie wprost, że zbiór X rozwiązań (q, r) rozważanego równania jest niepusty i rozważmy zbiór liczb
$$\{|q| + |r|, (q, r) \in X\}.$$
Zbiór ten, po wyrzuceniu z niego zera, jest niepustym podzbiorem dodatnich liczb naturalnych i zawiera element najmniejszy, pochodzący od pewnej pary (q, r). Zauważmy jednak, że skoro $q^2 = 2r^2$, to q^2 jest liczbą parzystą, skąd także q jest liczbą parzystą. Możemy więc zapisać $q = 2q'$, otrzymując równanie $4q'^2 = 2r^2$, czyli
$$2q'^2 = r^2.$$
Stąd r jest liczbą parzystą, czyli $r = 2r'$, co po wstawieniu do rozważanego równania daje nam
$$q'^2 = 2r'^2.$$
A zatem para (q', r') jest rozwiązaniem wyjściowego równania. Skoro $(q, r) \neq (0, 0)$, to także $(q', r') \neq (0, 0)$, a więc $0 < |q'| + |r'| < |q| + |r|$, co przeczy wyborowi pary (q, r) jako minimalnej (co do sumy wartości bezwzględnych) spełniającej rozważane równanie. ■

Metoda ta, w której jak widzimy można produkować „nieskończenie wiele coraz mniejszych rozwiązań”, jak słusznie pisał w 1670 roku Fermat, wielce się miała przysłużyć teorii liczb.

Skoro już mowa o wnioskowaniu niewymierności liczby $\sqrt{2}$, pokażmy jeszcze inny, bardziej elementarny dowód pochodzący od Estermanna[3]. On również wymaga zasady minimum dla dowolnych podzbiorów niepustych zbioru liczb naturalnych.

Załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Stąd następujący podzbiór zbioru liczb naturalnych jest niepusty:
$$\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}.$$
Weźmy, zgodnie z zasadą minimum, najmniejszy element tego zbioru równy n. Wówczas liczba $(\sqrt{2} - 1)n$ jest naturalna i mniejsza od n. Pomnóżmy ją przez $\sqrt{2}$ uzyskując
$$(\sqrt{2} - 1)n\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2}.$$
Po raz kolejny otrzymaliśmy różnicę liczb naturalnych. Wskazaliśmy jednocześnie liczbę naturalną, czyli $(\sqrt{2} - 1)n$ – mniejszą od n, która przemnożona przez $\sqrt{2}$ daje liczbę całkowitą, co oznacza sprzeczność.

* * *

Powyższy przegląd żadną miarę nie wyczerpuje bogactwa metod stosowanych w rozwiązywaniu problemów. Omówione techniki będziemy jednak wielokrotnie oglądali także w kontekście trudniejszych wyników. To ich opanowanie leży w sercu kompetencji i umiejętności prowadzenia rozumowań, które próbujemy wraz z usystematyzowaniem szkolnych zagadnień algebraicznych, posiąść.

[3]Źródło: `https://deltami.edu.pl/media/articles/1976/10/delta-1976-10-doniesienie.pdf`

Zadania – zasada minimum i maksimum

Zadanie 1. *Piętnaście kartek papieru o różnych rozmiarach i kształtach keży na ekranie i całkowicie go zasłania. Kartki mogą na siebie nachodzić i wystawać za krawędź ekranu. Wykaż, że mozna usunąć pewne* 5 *z tych kartek tak, by pozostałe* 10 *zasłaniało co najmniej* $2/3$ *powierzchni ekranu.*

Zadanie 2. *Królewna Śnieżka rozdzieliła 3 litry mleka pomiędzy siedem kubków należących do siedmiu krasnoludków. Następnie pierwszy z krasnoludków rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki (sobie nic nie zostawił). Następnie drugi krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki, a za nim robiły to kolejne krasnoludki. Gdy ostatni, siódmy krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka pomiędzy pozostałych okazało się, że w kubku każdego z krasnoludków jest dokładnie tyle samo mleka, co na początku – gdy otrzymał je od Królewny Śnieżki. W jaki sposób Królewna rozdzieliła mleko między krasnoludki?*

Zadanie 3. *Wykaż, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite* x, y, z, *dla których* $2x^2 + 5y^2 = z^2$.

Zadanie 4. *Na płaszczyźnie dane jest* $n \geqslant 3$ *punktów, nie wszystkie współliniowe. Wykaż, że istnieje koło o brzegu przechodzącym przez trzy z tych punktów, którego wnętrze nie zawiera żadnego z nich.*

Zadanie 5. *Znajdź wszystkie dodatnie rozwiązania układu równań:*

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

Zadanie 6. *Wykaż, że nie istnieje partkietaż płaszczyzny za pomocą nieskończenie wielu kwadratów* 1×1 *i skończenie wielu trójkątów równobocznych o boku* 1.

Zadanie 7. $(\star)$ *Wykaż, że w dowolnym czworościanie istnieją trzy krawędzie schodzące się w jednym wierzchołku, z których mozna zbudować trójkąt.*

Zadanie 8. $(\star)$ *Dysponujemy skończonym zbiorem (okrągłych) monet na płaszczyźnie, wszystkie mają różne promienie. Wykaż, że pewna z tych monet jest styczna do co najwyżej pięciu innch monet.*

Zadanie 9. $(\star)$ *Wyznacz wszystkie skończone niepuste podzbiory* S *zbioru dodatnich liczb całkowitych, takie że dla dowolnych* $i, j \in S$ *zachodzi warunek*

$$\frac{i+j}{\mathrm{NWD}(i,j)} \in S.$$

Zadanie 10. $(\star)$ *Udowodnij, że każdy wielokąt wypukły o polu* 1 *można zmieścić w prostokącie o polu nie większym od* 2.

Zadanie 11. $(\star)$ *W każdym z* mn *pól szachownicy rozmiaru* $m \times n$ *wpisana jest liczba rzeczywista. W każdym kroku wolno nam zmienić znak wszystkich liczb znajdujących się w danym wierszu lub kolumnie. Wykaż, że poprzez serię kroków można zmienić wszystkie sumy wierszy i kolumn na nieujemne.*

Zadanie 12. $(\star)$ *Niech* $n > 1$ *będzie liczbą całkowitą. Na płaszczyźnie dane jest* n *punktów niebieskich oraz* n *punktów czerwonych, przy czym żadne trzy z tych* $2n$ *punktów nie są współliniowe. Wykaż, że można dobrać połączyć niebieskie i czerwone punkty w pary za pomocą odcinków w taki sposób, by odcinki te się nie przecinały.*

Zadanie 13. $(\star\star)$ *Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań*

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + a^3 \\ c^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Zadanie 14. $(\star\star)$ *Dany jest ciąg liczb całkowitych* $a_1, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ *o następującej własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu, pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po* n *wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Wykaż, że* $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n-1}$.

Zadanie 15. $(\star\star)$ *Na każdym z* 256 *pól szachownicy* 16×16 *wpisano jedną z liczb* $1, 2, \ldots, 256$ *(w każdym polu wpisano inną liczbę). Pokazać, że istnieją dwa sąsiadujące ze sobą (wystarczy wspólny wierzchołek) pola szachownicy, które zawierają liczby o różnicy równej co najmniej 17.*

Rozdział 2

Od konkretu do abstrakcji Wyrażenia algebraiczne

2.1 Rachunek na literach

Właściwy rozwój notacji algebraicznej stosowanej (znacznie później) w szkole umiejscawia się w wieku XVI, gdy François Viète (1540-1603) wprowadził systematyczny i konsekwentny RACHUNEK NA LITERACH, oznaczając nimi zwykle *wielkości niewiadome*, choćby w równaniach. Kontekst był oczywiście niezwykle szeroki, dotyczący między innymi teorii korzywych czy rodzącej się geometrii analitycznej. W trakcie tego wykładu zasygnalizujemy jednak kilka razy w jaki sposób w historii i w nauczaniu algebry obecne są aspekty geomeryczne leżące u podstaw rozwoju algebry.

Łącząc znakami działań oraz ewentualnie nawiasami litery i liczby (np. rzeczywiste), uzyskujemy tak zwane WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, np.

$$-3 \cdot x + y, \qquad a - x + \sqrt{2} \cdot c, \qquad (a+b) \cdot (a-b), \qquad 2 \cdot ((a:b) + 2c), \qquad (a-b) : (c + \sqrt{3}).$$

W szkole wprowadzamy dwie ważne umowy: pomijamy kropkę „·" oznaczającą mnożenie, jeżeli jest ona napisana przed literą lub przed nawiasem, np. piszemy ab zamiast $a \cdot b$ oraz $a(b+c)$ zamiast $a \cdot (b+c)$ oraz symbol dzielenia „:" używamy wymiennie z symbolem kreski ułamkowej np. $a : b$ zamiast $\frac{a}{b}$ i na odwrót.

Wyrażenie algebraiczne zapisane w postaci ilorazu za pomocą kreski ułamkowej nazywamy UŁAMKIEM ALGEBRAICZNYM. W pewnych sytuacjach kreska ułamkowa odgrywać będzie podwójną rolę. Nie tylko zastępować będzie znak dzielenia, ale pozwalać będzie jednocześnie na opuszczenie nawiasu, np.

$$a : (b+c) = \frac{a}{b+c}, \qquad (x-y) : z = \frac{x-y}{z}.$$

Używamy również określenia RÓWNOŚĆ ALGEBRAICZNA lub WZÓR. W dalszym ciągu tego wykładu omówimy to zagadnienie bardziej detalicznie, przechodząc do języka wielomianów. W tym miejscu po prostu mówimy, że wzorem są dwa wyrażenia algebraiczne (lub ułamki) połączone znakiem równości, np.

$$2x = y + z, \quad S = ab, \quad V = \frac{1}{3}Ph, \quad a = \frac{b+c}{b-c}.$$

Zamiast słowa litera używamy często innych terminów, z których najważniejszym jest: ZMIENNA. Ograniczmy się tutaj do stwierdzenia, że jeśli w wyrażeniu algebraicznym wstawimy zamiast liter określone liczby i wykonamy wskazane w nim działania, otrzymamy liczbę, którą się nazywa WARTOŚCIĄ LICZBOWĄ. Liter używa się w nauczaniu szkolnym algebry między innymi w znaczeniach:

- nazwy ogólnej, czyli tzw. stałej dowolnej,
- wielkości zmiennej,
- niewiadomej,
- stałej.

Oto przykład prof. Turnaua: we wzorze na pole trójkąta,

$$P = \frac{a \cdot h}{2},$$

gdy traktujemy go jako sposób obliczania pola trójkata, P, a oraz w są nazwami ogólnymi pola, długości boku i długości wysokości tego trójkąta. Jeśli jednak ze wzoru odczytujemy, że pole trójkąta o stałej podstawie jest proporcjonalne do jego wyokości, to P oraz w stają się wielkościami zmiennymi, zaś a pozostaje nazwą ogólną długości podstawy. W kontekście natomiast zadania: *Oblicz wysokość trójkąta o polu* 20 *i podstawie* $a = 8$, lub nawet *Oblicz wysokość trójkąta o polu P i podstawie a* – to h będzie niewiadomą, a P i a – stałymi lub w drugim przypadku – stałymi dowolnymi. Rozróżnienie nazwy ogólnej od niewiadomej jest dość delikatne – litery używamy jako nazwy ogólnej wtedy, gdy tej litery *nie chcemy* zapisać liczbami, natomiast używamy jej jako niewiadomej, gdy jej *nie możemy* zapisać liczbami (choć tego chcemy i do tego dążymy). My specjalnie nie będziemy się tym zajmować – to rola metodyków.

Do pojecia zmiennej wrócimy w wydaniu bliższym rachunkowi zdań, ale na poziomie intuicji chodzi o „ciągłą zmianę" – upływ czasu, przesuwanie się punktu, wzrost lub zmniejszanie się jakiejś wielności. W pewnym sensie więc zmienna związana jest z charakterem funkcyjnym rozważanych obiektów. I choć w teorii równań na studiach mówimy o równaniu o zmiennych, to kontekst jest mimo wszystko funkcyjny – o czym na kolejnym wykładzie. Tu zwracamy jedynie uwagę na to, że nawet przy interpretacji jednego wzoru czy podczas rozwiązywania zadania znaczenie zapisu literowego może się zmieniać.

Obowiązują nas również pewne umowy notacyjne. Jeśli w wyrażeniu algebraicznym występuje potęga, to obliczając wartość liczbową tego wyrażenia wykonujemy potęgowanie (i pierwiastkowanie) przed innymi działaniami, o ile nawiasy nie zmieniają tego porządku. Umowa jest przy tym taka: mnożenie i dzielenie są równoważne i wykonujemy je przed dodawaniem i odejmowaniem, w kolejności od lewej do prawej.

Wszystko to wydaje się oczywiste, dopóki nie zajrzymy do internetu i nie przytłoczą nas kuriozalne „zagadki" nakazujące wykonywanie pewnych działań. Oto przykłady, w których wykonać należy działania:

$$8 : 2(2 + 2), \quad 6 : 2(1 + 2), \quad 9 - 3 : \frac{1}{3} + 1.$$

Czytelnik zechce uwierzyć, że wszędzie gdzie pojawia się tego typu zagadka, pojawiają się ogromne kontrowersje. Bardzo ciekawą serię nagrań na ten temat przygotował twórca kanału MindYourDecisions[1]. Oczywiście w praktyce unikamy stosowania dwuznacznej, choćby pozornie, notacji. Nie są to więc problemy matematyczne, ale przestroga – najprostszą sprawę można utrudnić niewygodną konwencją.

Z psychologicznego punktu widzenia proces uczenia się i rozumienia algebry zawieszony jest między dwiema rzeczywistościami: intuicji i zasad. Jest to zresztą problem uniwersalny. W oczach ucznia algebra to przekształcanie napisów zbudowanych z liczb, liter, znaków działań, nawiasów i znaków równości oraz nierówności, zgodnie z pewnymi regulami. Jedne są formułowane zupełnie otwartcie (np. wzory skróconego mnożenia, a innych uczeń musi w jakimś sensie sam się domyśleć (np. różne zasady operowania nawiasami). Przekształcanie wyrażeń to w gruncie rzeczy ich przepisywanie z uwzględnieniem dokonywanych zmian. Przekształcenia zmierzają do pewnego celu. Niekiedy można go łatwo odczytać, np. rozwiąż równanie, a innym razem można go zrozumieć tylko na podstawie wzorcowych przykładów: doprowadź do prostszej postaci. Co ciekawe, opór w stosowaniu zasad, które nie mają dla ucznia głębszego podłoża prowadzi do wielu kurozalnych błędów – niestety wina za nie spada najczęściej na uczniów, pogłębiając niechęć do matematyki. Czasem rozumne łamanie regułek przynosi rozwój.

Z pewnością prozą nauczycielskiego życia jest raczej niekończąca się krucjata z niepoprawnymi „wzorami" na kwadrat sumy lub pierwiastek z sumy kwadratów, rodzaju:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - b^2, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = a + b, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = a - b.$$

Zaskakująco często uczeń po prostu w wirze „walki" z rachunkami takie błędy popełnia. Tym bardziej zadawać sobie może pytania – po co ta cała algebra i manipulowanie wzorami? Nie jest naszym celem apologia matematyki, jakże często zamieniana w końcu w przymus (choćby karania surowo ucznia za powyższe *kardynalne błędy*). Piękno i to, co prawdziwe, obroni się samo. Matematyki nie trzeba ratować.

[1]`https://mindyourdecisions.com/blog/2016/08/31/what-is-6%c3%b7212-the-correct-answer-explained/`

2.2 Układanie wzorów

Przyjrzyjmy się kilku zagadnieniom dotyczącym zapisywania wzorów. Zgodnie z tradycją nauczania algebry, w szkole należy poświęcić wiele czasu zadaniom (zwanym tekstowymi), które prowadzą uczniów przez bliskie rzeczywistości sytuacje do rozumowania formalnego, w którym to samo rozumowanie może służyć rozwiązaniu wielu różnych zagadnień praktycznych. Zgodnie ze słowami prof. Guzickiego w rozdziale *Zadania tekstowe* z podręcznika *Rozszerzony program...*, algebra polega na wprowadzaniu symboli, które pozwalają nam oderwać się od rzeczywistości. Ułożenie wyrażenia algebraicznego czy równania jest tworzeniem modelu matematycznego rzeczywistości. Rozumowanie algebraiczne jest rozumowaniem wewnętrznym w matematyce i dopiero ostateczny wynik ma być zinterpretowany w rzeczywistości, którą modelowaliśmy. Było to zresztą jedno z dwóch wielkich założeń programu Kleina dla nauczania szkolnego[2].

Co to znaczy – układać wzory lub układać równania? Wyjdźmy od przykładu zadania tekstowego odnoszącego się do „rzeczywistości”, pochodzącego z podręcznika prof. Guzickiego.

Zadanie 25. *Dwukrotnie byłem w cukierni. Za pierwszym razem za* 4 *bułeczki i* 5 *ciastek zapłaciłem* $13,30$ *zł. Za drugim razem za* 7 *bułeczek i* 3 *ciastka zapłaciłem* $13,50$ *zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?*

Wyćwiczeni przez lata szkolne, od razu widzimy układ równań i całe rozumowanie algebraiczne potrzebne do jego rozwiązania. Pokażmy dwa rozumowania, wskazujące na to w jaki sposób czynności wykonywane przez nas w ramach rachunku algebraicznego można zwerbalizować i nadać im sens. Jeśli w procesie edukacyjnym nie wystąpi jakaś forma uwewnętrznienia czy utożsamienia tych konkretnych sytuacji z odpowiadającą im abstrakcją, algebra staje się udręką.

Zauważmy, że w pierwszym rozwiązaniu tego zadania nie wprowadzimy symboli algebraicznych. Jak skomentuje prof. Guzicki: w ten sposób uczniowie mogą stopniowo uzyskać większą świadomość tego, że symbole algebraiczne oznaczają coś konkretnego; liczbę czegoś, co istnieje naprawdę.

Rozumowanie pierwsze nawiązuje do problematyki układów równań i nazywane jest przez prof. Guzickiego metodą „zrównywania” zakupów. Jest to zapowiedź metody, którą nazwiemy później metodą przeciwnych współczynników. Oto ona: zwiększamy pierwszy zakup trzykrotnie, a drugi pięciokrotnie, co prowadzi oczywiście do odpowiedniego zwiększenia kosztu:

- za 12 bułeczek i 15 ciastek zapłacimy $39,90$ zł,
- za 35 bułeczek i 15 ciastek zapłacimy $67,50$ zł.

Stąd wnioskujemy, że za 23 bułeczki zapłacimy $27,60$ zł, czyli jedna bułeczka kosztuje $1,20$ zł.

Oto drugie rozwiązanie, związane z zasadą: do każdego działania formułujemy odpowiednie pytanie.

- Pytanie 1. Ile zapłaciłbym za pierwszym razem za 12 bułeczek i 15 ciastek? Odp.: $3 \cdot 13,30 = 39,90$.
- Pytanie 2. Ile zapłaciłbym za drugim razem za 35 bułeczek i 15 ciastek? Odp.: $5 \cdot 13,50 = 67,50$.
- Pytanie 3. O ile bułeczek więcej bym kupił? Odp.: $35 - 12 - 23$.
- Pytanie 4. O ile więcej bym zapłacił? Odp.: $67,50 - 39,90 = 27,60$.
- Pytanie 5. Ile kosztuje jedna bułeczka? Odp.: $27,60 : 23 = 1,20$.
- Pytanie 6. Ile kosztują 4 bułeczki? Odp.: $4 \cdot 1,20 = 4,80$.
- Pytanie 7. Ile kosztuje 5 ciastek? Odp.: $13,30 - 4,80 = 8,50$.
- Pytanie 8. Ile kosztuje jedno ciastko? Odp.: $8,50 : 5 = 1,70$.

Tak, jak wspomina prof. Guzicki, rozwiązywano zadania w połowie XX wieku. Wówczas, w siedmioletniej szkole podstawowej, nie uczono algebry. Oznaczenia literowe, wyrażenia algebraiczne i równania pojawiały się dopiero w klasie VIII, czyli pierwszej klasie liceum. A jednak powyższa metoda uwyraźnia, być może aż za bardzo, czym jest układanie wzorów czy równań, gdy zechcemy wykonać czynności krok po kroku. Przejście do algebry i do tworzenia wzorów można zilustrować ogólniejszą wersją rozważanego zadania.

[2]Patrz wypowiedź prof. Wacława Zawadowskiego: `https://youtu.be/M8lFm771WTU`.

Zadanie 26. *Za a bułeczek i b ciastek zapłaciłem m zł. Za c bułeczek i d ciastek zapłaciłem n zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?*

Rozwiązanie jest oczywiście pouczające i wymaga abstrakcyjnego myślenia. Ciekawe są jednak komentarze prof. Guzickiego przestrzegającego przed zbyt szybkim oderwaniem się juz na tym poziomie od rzeczywistości. Mowa jest o analizie danych, która do pewnego stopnia zapowiada badanie dziedziny funkcji. Przy rozważaniu powyższego zadania zakładamy, że liczby a, b, c, d są liczbami niezerowymi, a nawet dodatnimi. Czy całkowitymi? Niekoniecznie, skoro możemy kupić pół bułki lub ciastka. Możemy dokonać zrównania, powtarzając pierwszy zakup d razy, a drugi b razy (jak to rozumieć, czy nie są to liczby całkowite?). Wówczas

- za ad bułeczek i bd ciastek zapłacimy dm zł,
- za bc bułeczek i bd ciastek zapłacimy bn zł.

Za każdym razem kupiliśmy zatem tyle samo ciastek, ale powstaje pytanie: co od czego odjąć? Gdyby to były konkretne liczby, odejmowalibyśmy od większej mniejszą. Widać by też było, że jeśli kupiliśmy tyle samo ciastek, ale więcej bułeczek, to zapłacilibyśmy więcej. A tutaj? Czy jeśli ad jest większe od bc, to dm jest większe od bn? A gdyby było na odwrót? Co by to znaczyło? A co oznacza sytuacja, gdy $ad = bc$? Co się dzieje, gdy dane są proporcjonalne? Czy wtedy uzyskamy rozwiązanie? Profesor Guzicki stwierdza ważną kwestię: takie dyskusje są niemożliwe w przypadku rozwiązania algebraicznego. Tymczasem znalezienie czasu na postawienie tych pytań, swego rodzaju zachęta do samodzielnych rozumowań czy interpretacji, wypowiadania wniosków, orientowania się w sytuacji, ustalania jaki jest sens rezultatu – jeśli to się nie dokona na etapie przedalgebraicznym, później pojawią się kłopoty. Niezależnie od powyższych kwestii, w szczególności po zrozumieniu, że nie ma znaczenia, co od czego odejmujemy, otrzymujemy wzór. Bułeczka kosztuje:

$$\frac{dm - bn}{ad - bc}.$$

Zadanie to rozpatrywać można dalej w kontekście nauki o równaniach, do czego wrócimy na kolejnym wykładzie. Tu również pojawi się szereg komentarzy, bliższych samej algebrze.

Ważnym przykładem związanym z tematem tworzenia i rozumienia wzorów jest rozwiązywanie zadań na procenty. Obliczanie procentu jest w istocie mnożeniem. Stąd mamy istotne wzory na rozwiązania trzech podstawowych typów zadań na procenty (na razie pomijamy ich równoważność – o tym dalej). Obliczenie p procent liczby y wymaga użycia wzoru

$$x = \frac{p}{100} \cdot y.$$

Obliczenie ile procent liczby y stanowi liczba x wymaga użycia wzoru $p = \frac{100x}{y}$.
Obliczenie liczby, której p procent jest równe x wymaga użycia wzoru $y = \frac{100x}{p}$.

Kluczowe znaczenie wyznaczania procentu jako mnożenia widoczne jest także przy zagadnieniu zmiany procentowej. Zwiększenie lub zmniejszenie o p procent liczby x prowadzi do liczby

$$y = \left(1 \pm \frac{p}{100}\right) \cdot x = \frac{100 \pm p}{100} \cdot x.$$

Od powyższych obserwacji niedaleko jest już do zagadnień kredytowych i nieco trudniejszej matematyki, ale podkreślmy jak dużą trudność stanowią dla uczniów obliczenia procentowe. Przekonanie, że powyższe wzory trzeba umieć na pamięć i związane z nim kuriozalne pomyłki pokazują jak bardzo sfetyszyzowano wzory i formuły algebraiczne, nie tylko w algebrze[3]. Choćby stwierdzenie czy obniżenie ceny towaru o pewien procent, a potem podniesienie otrzymanej ceny o ten sam procent (lub odwrotnie) prowadzi do powszechnego przekonania, że wróciliśmy do wyjściowej ceny. Jeszcze więcej trudności sprawia wielokrotna zmiana procentowa. Czy dorosły obywatel naszego kraju potrafi odpowiedzieć która zmiana ceny jest mniejsza: podwyżka o 45% czy dwie kolejne obniżki o 25% i o 20%?

Sprawdźmy nasze umiejętności na zadaniu pochodzącym z American Invitational Mathematics Examination (drugi etap olimpiady amerykańskiej) z 2008 roku. Zachęcam do docenienia drugiego z rozwiązań.

[3] Czy pole trójkąta może być równe $0,5bc$, gdzie b jest długością boku, a c – odpowiednią wysokością? Czy koniecznie $\frac{1}{2}ah$, bo inaczej popełnimy przestępstwo? A czy we wzorze ilustrującym twierdzenie Pitagorasa c może być czymś innym niż przeciwprostokątną? Jeśli nie, to nie dokonujemy (potrzebnej) algebraizacji, ale umagicznienia symboliki matematycznej, zaklinając poszczególne obiekty w odpowiadające im raz na zawsze literki, zapisane koniecznie w ustalonej kolejności.

Zadanie 27. *Na pewnej szkolnej imprezie 60% osób to dziewczęta, a 40% osób to osoby lubiące tańczyć. Do imprezy dołącza 20 chłopców lubiących tańczyć i w ten sposób na imprezie jest 58% dziewcząt. Ile osób znajdujących się na tej imprezie po dołączeniu na nią chłopców lubi tańczyć?*

Rozwiązanie. Rozumowanie czysto algebraiczne jest bardzo proste. Niech $3x$ oznacza liczbę dziewcząt, a $2x$ – liczbę chłopców na początku imprezy. Wszystkich uczestników jest zatem $5x$. Po dołączeniu chłopców liczba dziewcząt może być wyrażona proporcją:

$$\frac{3x}{5x+20} = \frac{58}{100}.$$

Stąd $x = 116$. Na imprezie było zatem na początku 580 osób. Po dołączeniu chłopców tańczyć lubi:

$$\frac{40}{100} \cdot 580 + 20 = 252.$$

Inna droga – nieco mniej algebraiczna. Na początku imprezy liczba osób równa jest $\frac{5}{3}$ razy liczba dziewcząt. Po dołączeniu 20 osób łączna liczba uczestników to $\frac{50}{29}$ razy liczba dziewcząt. Skoro jednak liczba dziewcząt nie uległa zmianie, to jakim ułamkiem liczby dziewczyn jest liczba 20? Jest to oczywiście:

$$\frac{50}{29} - \frac{5}{3} = \frac{5}{87}.$$

A zatem na imprezie jest $20 \cdot \frac{87}{5} = 348$ dziewcząt. ■

Warto przywołać również ulubione zadanie prof. Kordosa, w którym algebraizacja i obliczenia procentowe prowadzą do zdecydowanie niepotrzebnej komplikacji. Dlaczego? Jak je rozwiązać bez rachunków?

Zadanie 28. *Dwa jednakowe puchary zostały wypełnione: lewy wodą, prawy winem. Zaczerpnięto małym kieliszkiem wina z prawego pucharu i wlano je do lewego. Po chwili zaczerpnięto tymże kieliszkiem płynu z lewego pucharu i wlano do prawego. Czy w lewym pucharze jest więcej wina, niż w prawym wody, czy też odwrotnie (a może tyle samo)?*

2.3 Potęgi, jednomiany i wielomiany

Przejdźmy do wyrażeń algebraicznych i zarysu ich systematycznego wykładu, zarówno w ujęciu programu szkolnego, jak i formalizmu algebraicznego (w skrócie). Podstawowe są tu pojęcia potęgi i jednomianu.

Zamiast $a \cdot a$ piszemy a^2 i mówimy „a do kwadratu”. Podobnie zamiast $a \cdot a \cdot a$ piszemy „a do sześcianu”, zaś ogólniej wyrażenie algebraiczne będące iloczynem n identycznych wyrażeń w czytamy w postaci „w do potęgi n-tej, stosując oznaczenie:

$$\underbrace{w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{\text{n czynników}} = w^n.$$

Liczbę w nazywamy podstawą potęgowania, a liczbę n – wykładnikiem. Wynik to n-ta potęgą w.

Podstawowymi wzorami są zasady działań na potęgach. Fakty te wynikają wprost z definicji, o ile oczywiście założymy przemienność mnożenia. Łączność potęgowania założyliśmy już w definicji.

Obserwacja 2.1: Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb a, b oraz dowolnych liczb naturalnych m i n zachodzą wzory na:

- iloczyn potęg o tych samych podstawach: $a^m \cdot a^n = a^{m+m}$,
- iloraz potęg o tych samych podstawach: dla $a \neq 0$ oraz $m \geqslant n$ mamy: $a^m : a^n = a^{m-n}$,
- potęgę iloczynu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,
- potęgę ilorazu: dla $b \neq 0$ mamy $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,
- potęgę potęgi: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Z określeniem potęgi wiąże się pojęcie jednomianu. Podajmy najpierw definicję pochodzącą z podręcznika szkolnego Banacha *Algebra: dla 2 klasy gimnazjalnej* (1934). Prowadzi ona oczywiście do intuicyjnej definicji wielomianu.

Definicja 2.1: Jednomian i wielomian – definicja z podręcznika Banacha (1934)

JEDNOMIANEM nazywamy iloczyn ilukolwiek liczb, opatrzony znakiem, lub nie. Na przykład:

$$3x, \quad -2a, \quad 4ab, \quad -(-3a)(-5)x, \quad (-3)aba.$$

WIELOMIANEM nazywamy sumę jednomianów lub liczb danych.

Cytujmy dalej Banacha. Jeżeli w jednomianie niektóre czynniki są liczbami danymi, obliczając ich iloczyn, przedstawimy jednomian w postaci prostszej, np.

$$(-3)x(-2)z = 6xz \quad \text{lub} \quad -(-2)a(+4)b = -(-8)ab = 8ab.$$

Jeśli w jednomianie niektóre czynniki literowe są równe, to może zastąpić je przez potęgę, np.

$$3xaxx = 3ax^3; \quad -2aabbb = -2a^2b^3.$$

Jeżeli jednomian przedstawimy tak, że tylko jeden czynnik jest liczbą daną, to liczbę tę wraz ze znakiem jednomianu nazywamy współczynnikiem liczbowym lub krótko WSPÓŁCZYNNIKIEM. Dwa jednomiany, w których czynniki literowe są te same i w tych samych potęgach, nazywamy jednomianami PODOBNYMI. Przykład:

$$-3a^2bc^3 \quad \text{oraz} \quad 5a^2bc^3$$

STOPNIEM jednomianu ze względu na pewną literą nazywamy wykładnik, w którym dana litera występuje. Jeżeli w jednomianie dana litera nie występuje, to mówimy, że jednomian jest stopnia zerowego ze względu na daną literę.

Stopniem wielomianu jest największy ze stopni jego jednomianów składowych, czyli jego WYRAZÓW (dawniej określenie to traktowano zamiennie z pojęciem składnika sumy algebraicznej). Jeśli wyrazy wielomianu są jednomianami podobnymi, jak np. $3x^2y-5x^2y+7x^2y-x^2y$, to możemy sumę taką przedstawić prościej w postaci $4x^2y$. Postępowanie powyższe nazywa się REDUKCJĄ jednomianów podobnych.

W podręczniku Banacha pojęcia te wprowadzane są oczywiście stopniowo, na przestrzeni kilkudziesięciu stron, przeplatane wieloma rutynowymi rachunkami, ilustrującymi kolejno wzory związane z potęgowaniem, cztery operacje algebraiczne na jednomianach, dalej redukcję i operacje algebraiczne na wielomianach, aż do rozważania „wielomianów o współczynnikach literowych”, czyli w naszym języku – z parametrem. Później nadchodzi czas na „wzory specjalne”, czyli podstawowe wzory skróconego mnożenia.

Oto przykłady podstawowych działań na wielomianach, czy raczej – wyrażeniach algebraicznych, zaczerpnięte z podręcznika prof. Guzickiego.

- Dokonaj redukcji wyrazów podobnych: $3x^3-5x^2+2x+4x^3-5+2x-4x^2+5x^3-7x-14+3x$.
- Wykonaj działania: $2x(3a-4b)-a(2x-y)+3b(2y-x)-2y(-a+4b)$.
- Wykonaj mnożenie wyrażeń algebraicznych: $((x-1)(2x^2-3x-5)$.
- Wyłącz wspólny czynnik przed nawias: $2x(x-3)+3x(3-x)$.
- Rozłóż następujące wyrażenie algebraiczne na czynniki: $ab-cd-ad+bc$.
- Rozłóż następujące wyrażenie na czynniki: $2a^2-a+2ab-b-2ac+c$
- Rozłóż następujące wyrażenie na czynniki: $a^2+ab-ac-6b^2+2bc$.

A oto przykładowe zadanie z OMJ, które sprawiło uczestnikom niespodziewanie wiele problemów.

Zadanie 29. *Liczby całkowite a, b oraz c są takie, że iloczyny $a(b+c)$ oraz $b(a+c)$ są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.*

ROZWIĄZANIE. Jeśli $1 = a(b+c)-b(a+c) = ac-bc = c(a-b)$, to $a-b = c = \pm 1$, czyli $a(b+c) = a^2$. Analogicznie rozumujemy w przypadku, gdy $1 = b(a+c)-a(b+c)$. ■

2.4 Wzory skróconego mnożenia – źródła geometryczne

Przejdźmy teraz do wzorów skróconego mnożenia, istotnych zwłaszcza w kontekście fundamentalnej z punktu widzenia szkolnego i konkursowej umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki.

Obserwacja 2.2: Podstawowe wzory skróconego mnożenia

Zachodzą następujące tożsamości:

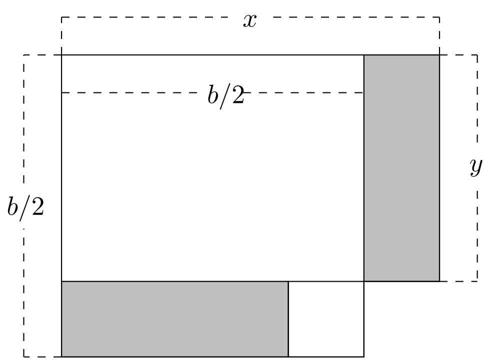
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

Wzory skróconego mnożenia pojawiły się w matematyce długo zanim była w niej algebra. Matematyka Babilończyków miała dwa źródła. Pierwszym było prowadzenie ksiąg rachunkowych, drugim – problemy geometryczne związane głównie z zagadnieniami podziału terenu. Wiele starych tabliczek glinianych pochodzących z okresu 2000-1700 p.n.e. zawierają rozległe listy tego, co dziś nazwalibyśmy równaniami kwadratowymi, których celem było znalezienie takich wielkości jak długość czy szerokość prostokąta. Przykład takiego problemu pochodzi[4] z tzw. tabliczki YBC 4663.

Dane są: suma długości i szerokości prostokąta: $6\frac{1}{2}$ oraz pole prostokąta: $7\frac{1}{2}$. Wyznaczyć długość i szerokość tego prostokąta. Skryba opisuje detalicznie kroki w celu uzyskania rozwiązania. Oto one.

1. Przepołowić $6\frac{1}{2}$ otrzymując $3\frac{1}{4}$.
2. Podnieść uzyskaną liczbę do kwadratu uzyskując $10\frac{9}{16}$.
3. Od uzyskanego pola odjąć dane pole prostokąta $7\frac{1}{2}$, uzyskując $3\frac{1}{16}$.
4. Z uzyskanej liczby wyciągnąć pierwiastek: $1\frac{3}{4}$.
5. Stwierdzić, że długość prostokąta wynosi $3\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = 5$, podczas gdy szerokość to $3\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$.

Nie bez powodu opisujemy rozwiązanie językiem książki kucharskiej, ponieważ tak w istocie uczono się matematyki w starożytnej Mezopotamii – przez akumulację rozwiązanych zadań, a nie przez abstrahowanie i wyciąganie ogólnych zależności. O co chodzi w tym rozwiązaniu? Skryba miał pewnie przed oczami następujący obrazek, przy założeniu, że szukane wielkości to x, y, a znane są $x + y = b$ oraz $xy = c$.



[4]Źródło: Victor J. Katz, *Stages in the history of algebra with implications for teaching.*

Czy Czytelnik widzi, że kluczem tej metody jest porównanie pól kwadratu o boku $b/2$ i wyjściowego prostokąta, przez znalezienie w nich (odpowiednich miejscach) wspólnego szarego prostokąta tak, że różnicą pól jest również pole kwadratu, i to liczby $(x-y)/2$? Obrazek powyższy ilustruje więc wzory:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}, \quad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Wzory te nie były oczywiście znane Babilończykom, jak również żadna ogólna metoda rozwiązywania takich zadań. Znana była niebanalna procedura postępowania przy konkretnych danych liczbowych.

Zupełnie inaczej wyglądała sytuacja w starożytnej Grecji, w której manipulacje algebraiczne wciąż wykonywane były w oparciu o obiekty geometryczne, w oparciu jednak o wyraźnie sformułowane aksjomaty. Oto przykład z *Elementów* Euklidesa – Twierdzenie II-5, znane nam jako wzór na kwadrat sumy.

> Jeśli podzielimy na dwie równe części, a także na dwie nierówne części, to prostokąt zawarty w nierównych częściach wraz z kwadratem linii łączącej punkty przecięcia jest równy kwadratowi połowy tej prostej.

Jeśli pomyślimy o „nierównych segmentach” jako o x oraz y, a o długości początkowego odcinka jako b, wówczas twierdzenie zdaje się twierdzić, że:

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

i w ten sposób rozwiązać można układ równań $x+y=b$ oraz $xy=c$. Dokładniej, jeśli PODSTAWIMY c zamiast xy orz b zamiast $x+y$, orzymamy

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \iff \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{skąd} \quad x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

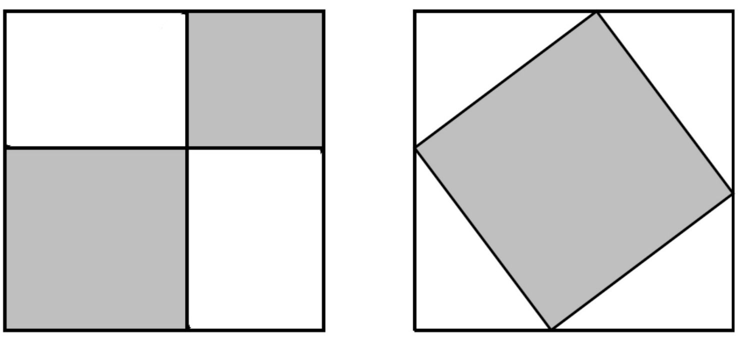
Stulecia później, arabscy matematycy cytować będą powyższy wynik uzasadniając własne algorytmiczne rozwiązanie równań kwadratowych. Sam Euklides ogólnych rozwiązań równań nie formułuje. Dowód jest czysto geometryczny. Idea *zamiany zmiennych* pochodząca z *przesuwania pól* pojawi się później.

Zachęcam do zajrzenia do podręcznika prof. Guzickiego w celu obejrzenia pięknych i mniej znanych grafik ilustrujących wzory na a^2-b^2 czy też $(a+b)^3$ lub a^3-b^3. Wizualizacji tego typu jest zresztą znacznie więcej, niektóre są iście genialne. pokazują one raz jeszcze znaczenie „fazy geometrycznej” poznawania algebry. Oto pięć przykładów z pięknej książki Nielsena *Proofs without words* (tomy I i II), do której wracać będziemy wielokrotnie w trakcie naszych wykładów.

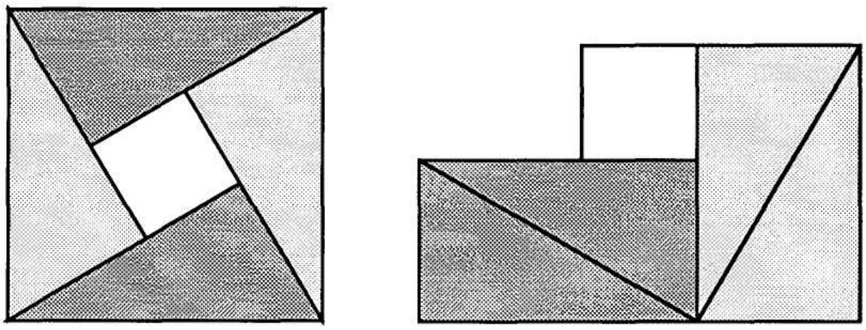
Genezą dla prostych wzorów związanych z potęgowaniem i pierwiastkowaniem jest oczywiście geometria i podstawowe wzory, choćby pole kwadratu, objętość sześcianu (lub jego podwojenia) oraz długość przekątnej kwadratu. W tym sensie należy stwierdzić, że historycznie rzecz biorąc najważniejszym wzorem matematycznym, kluczowym dla jej rozwoju przez stulecia (patrz Dodatek A), jest formuła Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

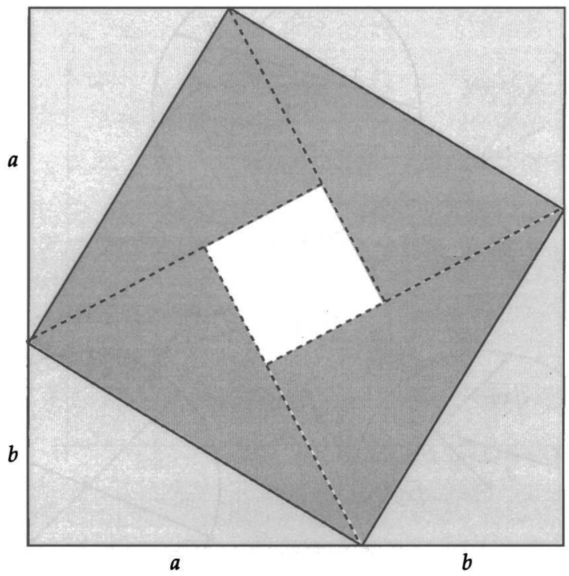
Z jednej strony twierdzenie Pitagorasa mówi, że suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Twierdzenie odwrotne mówi, że pewne trójki liczb są długościami boków w trójkącie prostokątnym. W praktyce zatem do konstrukcji kąta prostego wystarczy sznur z zawiązanymi na nim dwunastoma równoodległymi węzłami (dlaczego?). Zachęcam Czytelnika do zinterpretowania poniższego rysunku jako dowodu twierdzenia Pitagorasa. Na jednym z kolejnych wykładów powiemy o ogólnym rozwiązaniu zagadnienia trójek pitagorejskich.



A oto inne rozumowanie graficzne, pochodzące od Bhaskary (12 wiek):



Jaką tożsamość ilustruje poniższy rysunek?

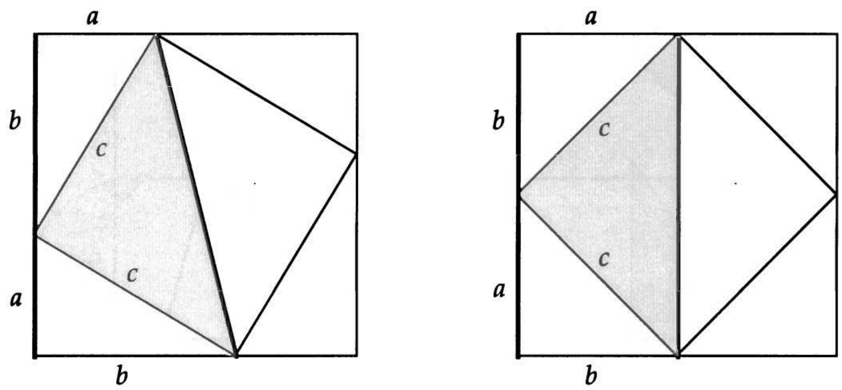


Nietrudno widzieć, że jest to $(a-b)^2$. Powyższy rysunek ilustruje w istocie równość:

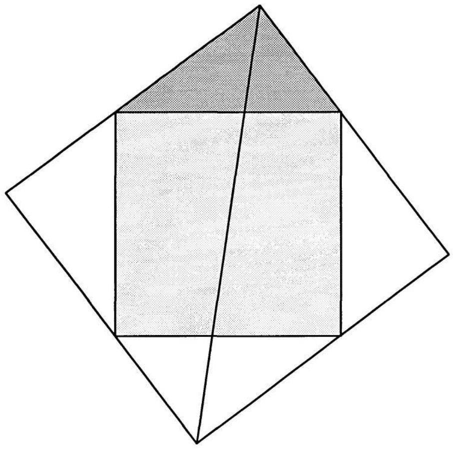
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

Czy Czytelnik widzi jak piękna i prosta jest teraz w dowodzie nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, zachodząca dla dowolnych liczb dodatnich a, b? Czyż nie jest jasne, kiedy zachodzi równość?
Oto inne zastosowanie konfiguracji wyżej. W każdym trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a, b i przeciwprostokątnej długości c zachodzi nierówność

$$a + b \leqslant c\sqrt{2}:$$

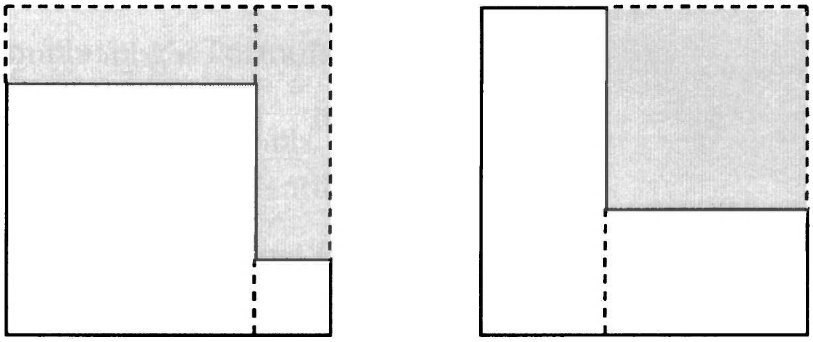


Jeszcze inne zastosowanie: dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym połowi kwadrat zbudowany na jego przeciwprostokątnej.



Oto tożsamość, której być może wielu z Państwa nie widziało nigdy na oczy (w tej formie):

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - (\sqrt{2xy})^2 = (x + \sqrt{2xy} + y)(x - \sqrt{2xy} + y).$$

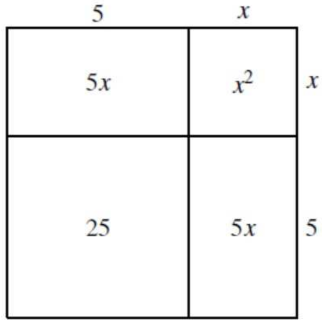


Jej uzasadnienie graficzne jest przekonujące. Znaczenie tego faktu staje się głębsze, gdy przyjmując $x = u^2$ oraz $y = 2v^2$, uzyskamy znaną tożsamość Sophie Germain $u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + 2v^2)(u^2 - 2uv + 2v^2)$.

Interpretacja geometryczna wzorów skróconego mnożenia leży u podstaw fundamentalnego przejścia z geometrii do algebry, jakie dokonało się dzięki matematyce arabskiej. W istocie bowiem nawet ogólna metoda rozwiązywania równań kwadratowych, opracowana przez al-Khwarizmiego, prezentowana jest w sposób geometryczny (nawet jeśli geometria jest już jedynie ilustracją algebry). Aby rozwiązać równanie

$$x^2 + 10x = 39$$

metodą arabską, przedstawiamy x^2 jako pole kwadratu o boku x, a $10x$ jako sumę pól dwóch prostokątów rozmiaru $5 \times x$. Dodatkowy kwadrat o polu 25 „uzupełnia” całą konfigurację do kwadratu o boku równym $x + 5$ o polu $25 + 39$, ponieważ 39 jest wartością wyrażenia $x^2 + 10x$. Stąd pole dużego kwadratu równe jest 64, czyli długość boku o długości $x + 5$ równa jest 8. Otrzymujemy zatem rozwiązanie $x = 3$.



Oczywiście matematyka arabska (ani grecka) nie uznawała liczb ujemnych, więc nie widziała też dodatkowego rozwiązania $x = -13$ tego równania. Ta konieczność unikania współczynników ujemnych w równaniach komplikowania rozważania algebraiczne. Nie było bowiem jednego ogólnego równania kwadratowego, ale aż trzy jego typy odpowiadające odpowiedniemu rozłożeniu dodatnich współczynników:

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 = ax + b, \quad x^2 + b = ax.$$

Wzory skróconego mnożenia są wynikiem mnożeń, które pojawiają się w wielu konstrukcjach i rozumowaniach matematycznych. Wzory te mają treść geometryczną, którą warto rozumieć Mają też swoje zastosowania historyczne, których nie wszystkich jesteśmy świadomi. Czy rzeczywiście bowiem wzory skróconego mnożenia SKRACAJĄ jakieś procesy rachunkowe? Tak było, jak zauważa prof. Szurek w swojej książce *O nauczaniu matematyki*. Oto cytat.

> Łatwiej jest dodawać niż mnożyć. Już w XVII wieku wiedziano, że
>
> $$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$
>
> a zatem mnożenie da się zastąpić przez prostsze dodawanie i łatwiejsze do stablicowania podnoszenie do kwadratu i dzielenie przez jedną tylko liczbę 4. Wydawano więc duże tablice ćwiartek kwadratów liczb: aby pomnożyć dwie liczby, należało obliczyć ich sumę i różnicę, znaleźć w tablicach ćwiartki kwadratów tej sumy i różnicy, a następnie odjąć wyniki. Przy dużych liczbach dawało to pewną oszczędność czasu. Dopiero logarytmy zmieniły życie uczonych XVIII wieku nie mniej niż komputery w naszych czasach.

2.5 Pierwiastek arytmetyczny

Przypomnijmy teraz definicję algebraiczną pierwiastka (nie mówimy o funkcji pierwiastkowej).

Definicja 2.2: Pierwiastek

Niech n będzie liczbą naturalną. PIERWIASTKIEM (ARYTMETYCZNYM) STOPNIA n-tego z liczby a jest taka nieujemna liczba b, dla której zachodzi równość $b^n = a$. Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, a – dowolną liczbą rzeczywistą i $b^n = a$, to b jest pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby a. Piszemy wtedy $\sqrt[n]{a} = b$.

Powtórzmy po raz ostatni – w tym momencie nie skupiamy się na problemie tego dla jakich liczb istnieje pierwiastek, a jedynie na wyrażeniach algebraicznych i prawach działania na nich. Czytelnik obeznany z algebrą może tu zaprotestować – są struktury algebraiczne, w których ma sens potęgowanie, a nie zachodzą powyższe prawa – owszem, tak (potencjalnie) jest, ale takimi algebrami się nie zajmujemy.

Obserwacja 2.3: Działania na pierwiastkach

Dla dowolnej nieujemnej liczby a, dodatniej liczby b oraz liczb naturalnych m i n zachodzą wzory:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$,
- $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$,
- $\sqrt[m]{a^m} = \sqrt[mp]{a^{np}}$, gdy p jest dodatnią liczbą naturalną.

Zobaczmy kilka zadań, nie tylko konkursowych, dotyczących wzorów skróconego mnożenia. Wielokrotnie w dalszych rozdziałach będziemy z tych wzorów korzystać. W tym miejscu interesują nas przede wszystkim manipulacje algebraiczne. Poniższe przykłady rachunkowe pochodzą z podręcznika Henryka Pawłowskiego wydawnictwa Operon dla klasy pierwszej (linia ponadstandardowa).

Zadanie 30. *Oblicz* $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$.

Rozwiązanie. Mamy

$$3-\sqrt{8}=(1-\sqrt{2})^2, \quad \sqrt{5-\sqrt{24}}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2, \quad \text{oraz} \quad \sqrt{7-\sqrt{48}}=(2-\sqrt{3})^2.$$

■

Zadanie 31. *Oblicz* $(4+\sqrt{15})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Rozwiązanie. Tym razem rachunek jest nieco dłuższy:

$$\begin{aligned}
(4+\sqrt{15})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} &= (\sqrt{10}-\sqrt{6}))\cdot\sqrt{(4+\sqrt{15})^2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}\\
&= \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}\\
&= \sqrt{10-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}+6}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{(4+\sqrt{15})\cdot(4-\sqrt{15})}\\
&= \sqrt{16-2\sqrt{60}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4^2-15}\\
&= \sqrt{4\cdot(4-\sqrt{15})}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\\
&= 2\cdot\sqrt{(4-\sqrt{15})\cdot(4+\sqrt{15})}=2.
\end{aligned}$$

■

Zadanie 32. *Liczby całkowite a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=1$. Wykaż, że poniższa liczba n jest całkowita, gdzie*

$$n=\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

Rozwiązanie. W sumach a^2+1, b^2+1, c^2+1 zamieniamy drugi składnik zgodnie z warunkiem zadania. Mamy więc

$$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=a(a+b)+c(a+b)=(a+c)(a+b).$$

Analogicznie uzyskujemy $b^2+1=(b+a)(b+c)$ oraz $c^2+1=(c+a)(c+b)$. Stąd

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}=|(a+b)(b+c)(c+a)|.$$

■

Poniższe dwa różnej trudności zadania dotyczą „wyciągania niewymierności z mianownika” − klasyka szkolnego, i nie tylko. Przytoczmy najpierw zadanie z artykułu *Różnica kwadratów* autorstwa Joanny Jaszuńskiej, zamieszczonego w często cytowanej przez nas Gazetki OMJ *Kwadrat*, dostępnej w całości na stronie Olimpiady Matematycznej Juniorów. Odnośniki znajdują się pod koniec wykładu.

Zadanie 33. *Oblicz*

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Rozwiązanie. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Rozważana w zadaniu suma może być zatem zapisana w postaci:

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=10-1=9.$$

■

Drugie zadanie pochodzi z obozu naukowego OMJ.

Zadanie 34. *Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$. Wyznacz wartość liczby $x+y$.*

Rozwiązanie. Żadna z liczb $x^2 + \sqrt{x^2+1}$ oraz $y^2 + \sqrt{y^2+1}$ nie jest równa zero, gdyż ich iloczyn jest niezerowy. Zatem

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{y^2+1} - y}{y^2 + 1 - y^2} = \sqrt{y^2+1} - y,$$

czyli

$$x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}.$$

Z racji symetrii liczb x i y w rozważanym problemie, zamieniając role x i y, uzyskujemy analogiczną równość

$$x + y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}.$$

Oznacza to, że $2(x+y) = 0$. W rezultacie $x + y = 0$. ■

2.6 Zastosowania teorioliczbowe

Zadanie 35. *Czy istnieje liczba pierwsza postaci*

$$999\ldots 91,$$

gdzie cyfra 9 *występuje nieparzystą liczbę razy?*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że liczba dziewiątek użytych do zapisu danej liczby wynosi $2n-1$. Wówczas:

$$99\ldots 91 = 10^{2n} - 9 = (10^n)^2 - 3^2 = (10^n - 3)(10^n + 3).$$

Żaden z uzyskanych czynników nie jest równy 1, a zatem wyjściowa liczba nie jest pierwsza. ■

Wróćmy do wspomnianej wcześniej tożsamości Sophie Germain. Jest ona często wykorzystywana w zadaniach teorioliczbowych.

Zadanie 36. *Wykaż, że liczba* $2^{10} + 5^{12}$ *jest złożona.*

Rozwiązanie. Teza wynika z przedstawienia powyższej liczby w postaci $5^{12} + 4 \cdot 2^8$. Warto wspomnieć, że czynniki, które uzyskamy, są liczbami pierwszymi równymi odpowiednio 14657 oraz 16657. ■

Więcej przykładów znajdzie Czytelnik w artykule Tożsamość Sophie Germain autorstwa Tomasza Kobosa. Inna klasyczna tożsamość pochodząca już od Diofantosa może być Państwu znana z dowodu faktu, że moduł iloczynu liczb zespolonych jest ilocznem ich modułów, tzn.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = \\ &= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) = \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.\end{aligned}$$

Tożsamość ta odkrywana była niezależnie przez wielu słynnych uczonych, w tych Brahmaguptę (od którego nosi imię, i który wykorzystał ją do rozwiązania równania Pella[5], Fibonacciego i innych. Zobaczmy zadanie z artykułu Michała Kiezy w *Kwadracie.*

Zadanie 37. *Wykaż, że jeśli liczba* n *jest sumą dwóch kwadratów liczby całkowitych, to liczba* $5n$ *też.*

Rozwiązanie. Jeśli $n = a^2 + b^2$, to $5n = (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2) = (a + 2b)^2 + (2a - b)^2$. ■

Osobny krótki wątek musimy poświęcić formule na różnicę n-tych potęg, czyli:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Może warto wspomnieć, że w zasadzie wzór ten powinniśmy jakoś udowodnić. Stwierdzenie, że wystarczy wymnożyć nawiasy, z których jeden jest dowolnej długości, jest oczywiście swego rodzaju argumentem, ale spróbujmy pokazać coś bardziej eleganckiego, idąc za prof. Guzickim. Zacznijmy od ważnej skądinąd formuły:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

[5] Mamy też bowiem $(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2 = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2$, co oznacza, że z dwóch rozwiązań równania diofantycznego $x^2 - ny^2 = 1$ możemy wyprodukować kolejne. Wrócimy do tego tematu.

Jeśli oznaczymy lewą stronę literą S, mamy:

$$S = 1 + x(1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 1 + x(S - x^n).$$

Uzyskane równanie daje nam natychmiast żądaną formułę na S (dla $x \neq 1$, o ile mówimy o liczbach). Jeśli teraz weźmiemy $x = \frac{b}{a}$, uzyskamy

$$1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^n} = \frac{1 - \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}}{1 - \frac{b}{a}}.$$

Mnożąc teraz obie strony przez a^n i upraszczając ułamek po prawej stronie, uzyskamy nasz wzór skróconego mnożenia $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Warto zacytować tu uwagę prof. Guzickiego mówiącą, że właśnie ta kolejność uzasadniania daje szansę na postawienie uczniom pytania: jak wygląda wzór na różnicę n-tych potęg i pozwolenia im na stawianie hipotez. Podobna jest ogólna sugestia: dać uczniom szansę wyprowadzenia innych wzorów, choćby na kwadrat sumy wielu składników.

Formuła ta ma wiele zastosowań. Dla różnych liczb całkowitych a, b dowiadujemy się, że liczba $a - b$ jest dzielnikiem liczby $a^n - b^n$. Fakt ten przenosi się na kluczowe twierdzenie teorii wielomianów, twierdzenie Bezout, które uzasadnimy w innym rozdziale. Przedstawmy natomiast kilka konkursowych zastosowań uzyskanej formuły. Zacznijmy od podstaw, czyli wzoru na różnicę sześcianów.

Zadanie 38. *Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie*

$$\sqrt[3]{2x + 13} - \sqrt[3]{2x - 13} = 2.$$

Rozwiązanie. Niech $2x + 13 = a^3$ oraz $2x - 13 = b^3$. Wówczas $a - b = 2$ oraz

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 26.$$

Stąd $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab = 13$. W rezultacie $ab = 3$, skąd łatwo wnioskujemy, że $(a, b) = (3, 1)$ lub $(a, b) = (-1, -3)$. W rezultacie $x = -7$ lub $x = 7$. ■

Zadanie 39. *Udowodnij, że jeżeli dla liczb naturalnych a, b liczba $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ jest wymierna, to liczby $\sqrt[3]{a}$ oraz $\sqrt[3]{b}$ są wymierne.*

Rozwiązanie. Niech $x = \sqrt[3]{a}$ oraz $y = \sqrt[3]{b}$. Z założenia liczba $s = x + y$ jest wymierna. Ponieważ

$$s^3 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = a + b + 3sxy,$$

więc iloczyn xy jest liczbą wymierną. Dalej mamy:

$$a - b = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy) = (x - y)(s^2 - xy).$$

Wobec wymierności liczb a, b, s, xy, różnica $x - y$ jest liczbą wymierną. Skoro i suma, i różnica liczb x, y jest wymierna, to obie te liczby są wymierne. ■

W dowodzie wykorzystaliśmy również wzór

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Oczywiście zastosowań wzoru na różnicę sześcianów jest bardzo wiele, co wielokrotnie jeszcze zobaczymy. Przejdźmy do ogólnej formuły na różnicę n-tych potęg.

Zadanie 40. *Wykaż, że dla każdej liczby złożonej n liczba $2^n - 1$ jest złożona.*

Rozwiązanie. Jeśli $n = kl$, gdzie k, l są liczbami naturalnymi, to $2^n - 1 = (2^k)^l - 1$. Stąd

$$2^n - 1 = (2^k - 1)(2^{l(k-1)} + 2^{l(k-2)} + \ldots + 2^1 + 1).$$

Stąd $2^k - 1$ jest dzielnikiem liczby $2^n - 1$. Skoro $1 < 2^k - 1 < 2^n - 1$, to liczba $2^n - 1$ jest złożona. ■

Gdy n jest liczbą nieparzystą, wówczas zastępując b przez $-b$ uzyskujemy z wzoru na różnicę n-tych potęg ostatnią formułę na sumę potęg, wymienioną na naszej liście wzorów skróconego mnożenia. Ilustracją wzoru na sumę nieparzystych potęg jest zadanie z LVI OM.

Zadanie 41. *Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których $n^n + 1$ oraz $(2n)^{2n} + 1$ są liczbami pierwszymi.*

Rozwiązanie. Niech $x \geqslant 2, m \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi, przy czym $n = ld$, gdzie l jest liczbą nieparzystą, a d jest całkowitą liczbą dodatnią. Wówczas

$$x^m + 1 = (x^d)^l + 1 = (x^d + 1)((x^d)^{l-1} - (x^d)^{l-2} + \ldots - x^d + 1).$$

Stąd liczba $x^d + 1$ jest dzielnikiem liczby $x^m + 1$. Dla $n > l > 1$ liczba $x^m + 1$ jest więc złożona.

Liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania. Załóżmy więc dalej, że $n \geqslant 2$. Jeśli liczba $n^n + 1$ jest pierwsza, to n nie ma dzielników nieparzystych większych od 1. Stąd $n = 2^k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Stąd

$$n^n + 1 = 2^{k \cdot 2^k} + 1, \quad (2n)^{2n} + 1 = 2^{(k+1)2^{k+1}} + 1.$$

Dla $k \geqslant 2$ co najmniej jedna z liczb $k \cdot 2^k$ oraz $(k+1) \cdot 2^{k+1}$ ma dzielnik nieparzysty większy od 1, a więc co najmniej jedna z liczb $n^n + 1$ lub $(2n)^{2n} + 1$ jest złożona. Dla $k = 1$ sprawdzamy natomiast, że liczby $2^2 + 1 = 5$ oraz $(2 \cdot 2)^{2 \cdot 2} + 1 = 257$ są pierwsze. ■

2.7 Notacja sigma-pi, silnia, symbol i wzór dwumianowy

Wprowadziliśmy podstawowe wyrażenia algebraiczne związane z podstawowymi operacjami algebraicznymi wyrażonymi za pomocą rachunku literowego. Poświęćmy teraz chwilę spojrzeniu formalnemu, jakże surowszemu, choćby na pojęcie wielomianu, aby dać mu podbudowę formalną. W matematyce akademickiej i w środowisku konkursowym niezbędne jest w zasadzie stosowanie notacji sigma-pi, czyli skrótowej notacji do zapisu sum i iloczynów. Ograniczymy się do przypadku sum i iloczynów skończonych.

Definicja 2.3: Notacja sigma-pi dla sum i iloczynów

Niech $\{1, \ldots, n\}$ będzie zbiorem liczb całkowitych od 1 do n, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

- Sumę liczb $a_1, \ldots, a_n$ indeksowanych liczbami k ze zbioru od $\{1, \ldots, n\}$ oznaczamy przez

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

- Iloczyn liczb $a_1, \ldots, a_n$ indeksowanych liczbami k ze zbioru od $\{1, \ldots, n\}$ oznaczamy przez

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Gdy $a_i = i$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$, uzyskany iloczyn określamy symbolem $n!$, przyjmując też $0! = 1$.

Przykłady użycia notacji oraz prostych tożsamości.

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2, \quad \prod_{k \leqslant n} k = n!.$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!, \quad n \cdot n! = (n+1)! - n!, \quad \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Nie ma tu miejsca, by opowiedzieć szerzej o ładnych tożsamościach algebraicznych, które można elegancko obserwować przy pomocy powyższej notacji, jak choćby tożsamość Abela opisana w *Kółku matematycznym dla olimpijczyków* Henryka Pawłowskiego. Konwencja ta ma duże znaczenie, ale w tym tekście nie będziemy jej nadużywać. Czytelnika zainteresowanego dużą liczbą zastosowań olimpijskich tej notacji zachęcam do przejrzenia artykułu Evana Chena *Summations*, dostępnego w formie pliku pod adresem `https://web.evanchen.cc/handouts/Summation/Summation.pdf`. Wprowadzona notacja będzie natomiast przydatna w kontekście wzoru dwumianowego.

Twierdzenie 2.1: Symbol i wzór dwumianowy

Niech $n \geqslant m$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Określamy liczbę

$$\binom{n}{m} = \frac{(n)!}{n! \cdot (n-m)!}.$$

Wówczas zachodzi równość:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^m.$$

Dowód tego, że symbol dwumianowy jest liczbą całkowitą oraz dowód prawdziwości wzoru dwumianowego Newtona można przeprowadzić indukcyjnie i będziemy mieli to okazję zrobić w ramach ćwiczeń do wykładu 3. Podstawowe własności symbolu dwumianowego odwzorowują strukturę trójkąta Pascala można natomiast sprawdzić bezpośrednio z definicji silni.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Obserwacja 2.4: Podstawowe własności symbolu dwumianowego

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby naturalnej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n$, spełnione są równości:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Dodatkowe własności trójkąta Pascala można wyprowadzić również ze wzoru dwumianowego. Podstawiając odpowiednio $a = b = 1$ oraz $a = 1, b = -1$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}.$$

Oczywiście własnościom symbolu i wzoru dwumianowego poświęcona jest olbrzymia literatura. W książce *Arytmetyka i algebra* prof. Guzicki poświęca kilkanaście ostatnich stron rozdziału szóstego szerokiemu omówieniu podstawowych własności algebraicznych i kombinatorycznych symbolu dwumianowego (czyli także związanego z nim trójkąta Pascala), a także rozmaitym dowodom wzoru dwumianowego. Jeszcze obszerniejszym opracowaniem jest spisana wersja referatu Profesora podczas finału OMG w roku 2015 o tytule: *Tożsamości kombinatoryczne. Dowody algebraiczne i kombinatoryczne*, dostępny w pliku umieszczonym pod adresem `https://sem.edu.pl/materialy/FinalOMG.pdf`, str.30-50.

We wzorze dwumianowym różne wymiary matematyki: algebraiczny, kombinatoryczny, analityczny, a nawet geometryczny. Dla samego Newtona, myślenie algebraiczne związane było główne z algebrą szeregów potęgowych, czyli mówiąc nieprecyzyjnie: wielomianów o nieskończenie wielu składnikach. Wychodząc od wzoru dwumianowego $(1+x)^n$, wprowadził jego uogólnienia na wykładniki wymierne.

Trójkąt Pascala znany był już z pewnością matematyce Chińskiej (przynajmniej do poziomu ósmego, Wzór na symbol dwumianowy znany był również od co najmniej XIV wieku. Dlaczego więc podkreślamy XVII-wiecznego uczonego Pascala? Z pewnością dużą rolę odegrała, obok ponownego jego okrycia, unifikacja warstwy algebraicznej, sformułowanie wzoru dwumianowego i udowodnienie go, być może po raz pierwszy w historii, przy pomocy jawnego i świadomie użytego argumentu indukcyjnego, oraz rozwiązanie przy jego pomocy podstawowych zagadnień probabilistycznych tamtego okresu.

Ponowne odkrycie symbolu i wzoru dwumianowego w pierwszej części XVII wieku, otworzyło Fermatowi drogę do rozwoju teorii liczb, w tym do sformułowania faktu znanego jako Małe Twierdzenie Fermata. Co ciekawy, pierwszy (nieopublikowany) dowód tego faktu pochodzi od Leibniza i opiera się o wzór wielomianowy, czyli o stwierdzenie mówiące, że współczynnikiem przy jednomianie $a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n}$ wielomianu $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p$ jest

$$\frac{p!}{q_1! q_2! \cdots q_n!}, \quad gdzie \quad q_1 + \ldots q_n = p.$$

Zobaczmy kilka bardzo prostych zastosowań wzoru dwumianowego. Typowym zastosowaniem teorioliczbowym, zwłaszcza gdy nie znamy teorii kongruencji, jest wyznaczanie reszt z dużych potęg.

Zadanie 42. *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba*

$$3^{2^n} + 1$$

nie jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie. Mamy

$$3^{2n} = (3^2)^{2^{n-1}} = 9^{2^{n-1}} = (8+1)^{2^{n-1}}.$$

Zauważmy, że po rozwinięciu wyrażenia po prawej zgodnie ze wzorem dwumianowym współczynnik stojący przy każdym składniku, poza ostatnim – równym 1 – jest wielokrotnością liczby 8. Stąd liczba $3^{2^n}+1$ daje przy dzieleniu przez 4 resztę 2. ∎

Zadanie 43. *Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczba*

$$(n+1)^n - 1$$

jest podzielna przez n^2.

Rozwiązanie. Sposób I. Skorzystajmy ze wzoru na różnicę n-tych potęg:

$$(n+1)^n - 1 = (n+1)^n - 1^n = n((n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1).$$

Wystarczy zatem udowodnić, że $(n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-2} + \ldots + (n+1) + 1$ jest liczbą podzielną przez n. Dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k liczba $(n+1)^k$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez n. Zatem suma n kolejnych naturalnych potęg liczby $n+1$ jest podzielna przez n. Stąd liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2.

Sposób II. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Dla $n \geqslant 2$ skorzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:

$$(n+1)^n - 1 = \binom{n}{0} n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} n + \binom{n}{n} - 1.$$

Suma ostatnich dwóch składników sumy po prawej stronie powyższej równości jest równa 0. Każdy z pierwszych $n-1$ składników jest natomiast podzielny przez n^2. Pozostaje więc stwierdzić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n mamy

$$\binom{n}{n-1} n = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \cdot n = n^2.$$

W rezultacie liczba $(n+1)^n - 1$ jest podzielna przez n^2. ∎

Ważną techniką jest dodawanie „w dwie strony”. Znamy ją głównie z przypisywanego Gaussowi (co jest nieco obraźliwe) wzoru na sumę n pierwszych dodatnich liczb całkowitych.

Zadanie 44. *Wykaż, że*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Rozwiązanie. Oznaczmy rozważaną sumę przez S. Korzystając ze wzoru $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ dostajemy:

$$S = n\binom{n}{0} + (n-1)\binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1}.$$

Dodając do siebie wyjściowe przedstawienie S z uzyskanym wyżej, otrzymujemy:

$$2S = n\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}\right] = n \cdot 2^n.$$

■

Zadanie 45. *Jeżeli p i q są liczbami całkowitymi, to liczba*

$$a_n = (p + \sqrt{q})^n + (p - \sqrt{q})^n$$

jest całkowita, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

Rozwiązanie. Korzystając z wzoru dwumianowego otrzymujemy

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i} (\sqrt{q})^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i} (-\sqrt{q})^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i} ((\sqrt{q})^i + (-\sqrt{q})^i).$$

Jeśli liczba i jest parzysta, $i = 2m$, to $(\sqrt{q})^i + (-\sqrt{q})^i = 2q^m$. Jeśli zaś liczba i jest nieparzysta, to $(\sqrt{q})^i + (-\sqrt{q})^i = 0$. Zatem każdy składnik sumy znajdującej się po prawej stronie powyższej równości jest liczbą całkowitą. ■

* * *

Możliwa dalsza lektura (pomijam literaturę główną)

Historia

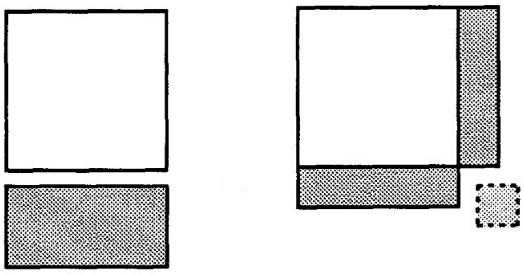
- A. Demby, *Przegląd koncepcji nauczania algebry w polskich programach szkolnych z lat 1949-1990*, Didactica Mathematicae 22 (2000), 25-43, `wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/article/view/6722`.
- W. Dunham, *Euler. The Master of Us All*, Dolciani Mathematical Expositions 22; MAA 1999.
- R. Sznajder, *On known and less known relations of Leonhard Euler with Poland*, Studia Historiae Scientiarum 215 (2016), 75-110.
- M. Szurek, *Leonard Euler, Kompletne wprowadzenie do algebry i jaka nauka z tego wynika*, `https://smp.uph.edu.pl/msn/39/szurek.pdf`.
- *Główne strategie kształcenia matematycznego uczniów*, `ruj.uj.edu.pl/xmlui/bitstream/handle/item/272332/siwek_glowne_strategie_ksztalcenia_matematycznego_uczniow_2004.pdf`.

Ciekawe tożsamości

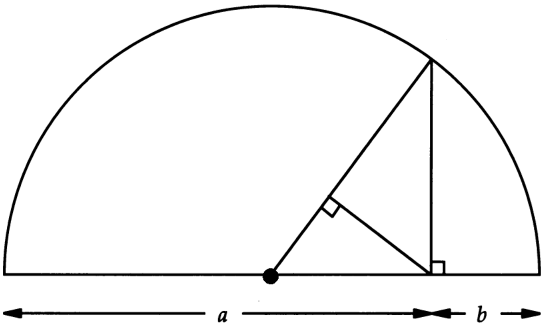
- B. Bzdęga, *Szły raz drogą trzy sześciany*, Bartłomiej Bzdęga, Kącik Początkującego Olimpijczyka, `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/algebra/2019/12/30/2020-01-delta-kpo.pdf`
- W. Guzicki, *Tożsamości kombinatoryczne. Dowody algebraiczne i kombinatoryczne*, `https://sem.edu.pl/materialy/FinalOMG.pdf`, str.30-50.
- J. Górnicki, *Zagnieżdżone pierwiastki*, Delta 9, 2018 `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2018/08/26/2018-09-delta-gornicki.pdf`
- J. Blömer, *How to Denest Remanujan's Nested Radicals*, `https://static.aminer.org/pdf/PDF/001/059/825/simplification_of_nested_radicals.pdf`.
- M. Kieza, *Tożsamość Diofantosa*, Kwadrat 2 (2011), `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat_02-czerwony.pdf`.
- T. Kobos, *Tożsamość Sophie Germain*, Kwadrat 16 (2016), `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-16_p187.pdf`.

Zadania – wyrażenia algebraiczne

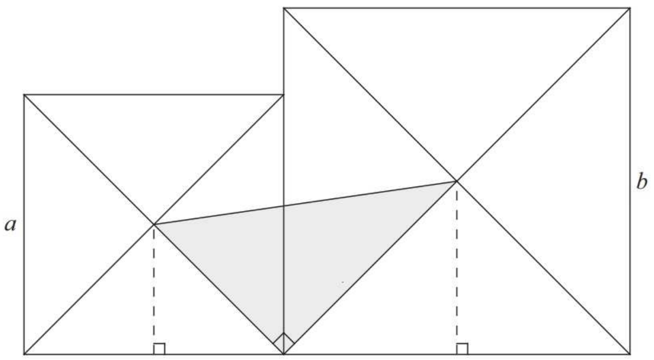
Zadanie 1. *Jaką równość ilustruje poniższy rysunek?*



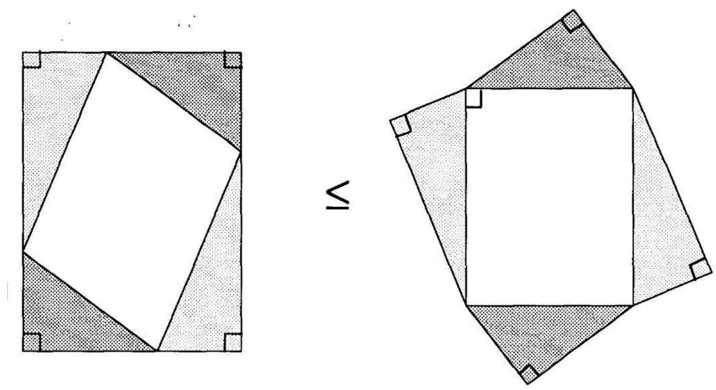
Zadanie 2. *Jaką nierówność ilustruje poniższy rysunek?*



Zadanie 3. *Jaką nierówność ilustruje poniższy rysunek?*



Zadanie 4. *Jaką nierówność ilustruje poniższy rysunek?*



Zadanie 5. *Co jest większe:*

- $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ *czy* $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$*?*
- $3^{100}-2^{150}$ *czy* $3^{50}+2^{75}$*?*

Zadanie 6. *Oblicz:*

- $\sqrt{2}\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}\right)$,
- $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$,

Zadanie 7. *Oblicz:*

- $(\sqrt[3]{2}+1)\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$,
- $\sqrt[3]{1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2}+\sqrt[3]{26}$.

Zadanie 8. *Wyznacz liczby całkowite a, b, c spełniające równość:*

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)$$

oraz liczby całkowite d, e, f, takie że:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{d/9}-\sqrt[3]{e/9}+\sqrt[3]{f/9}.$$

Zadanie 9. *Liczby a, b, c spełniają zależności $3a+4b=4c$ oraz $4a-3b=3c$. Wykaż, że $a^2+b^2=c^2$.*

Zadanie 10. *Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba*

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

jest kwadratem.

Zadanie 11. *Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunki $a \geqslant b \geqslant c$ oraz*

$$\frac{a+b}{bc}=\frac{b+c}{ca}=\frac{c+a}{ab}.$$

Wykaż, że $a=b=c$.

Zadanie 12. *Liczby rzeczywiste a, b i c spełniają równość $abc=1$. Oblicz*

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

Zadanie 13. *Dane są dodatnie liczby a, b, c, d spełniające warunki $b+d=a+c$ oraz $ab=cd$. Wykaż, że $a=d$ i $b=c$.*

Zadanie 14. $(\star)$ *Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b\neq 0, b+c\neq 0, c+a\neq 0$ oraz spełniają równość $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Udowodnij, że $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$.*

Zadanie 15. ($\star$) *Dane są niezerowe liczby rzeczywiste* a, b, *że* $a+b \neq 0$ *oraz spełniona jest przez nie równość* $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$. *Wykaż, że* $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ab}$.

Zadanie 16. ($\star$) *Liczby całkowite* a, b, c, d *spełniają warunek* $a+b+c+d=0$. *Wykaż, że liczba*

$$n = (ab-cd)(bc-ad)(ac-bd)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 17. ($\star$) *Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych* a, b *liczba*

$$2(a^4 + b^4 + (a+b)^4)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 18. ($\star$) *Oblicz sumy*

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot \sqrt{\binom{n}{k}}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} (k^2+k+1)k!.$$

Zadanie 19. ($\star$) *Dodatnie liczby rzeczywiste* a, b, c *spełniają warunek* $a+b+c=1$. *Udowodnij, że zachodzi nierówność:*

$$\frac{ab+c}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc+a}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac+b}{(a+b)(b+c)} \geqslant 3.$$

Zadanie 20. ($\star$) *Niech* a, b, c, d *będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi następujący warunek:* $ad = b^2 + bc + c^2$. *Udowodnij, że* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *jest liczbą złożoną.*

Zadanie 21. ($\star$) *Udowodnij, że jeśli* $a+b+c=0$, *to* $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Zadanie 22. ($\star\star$) *Różne niezerowe liczby rzeczywiste* a, b, c *spełniają zależność*

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Wykaż, że $|abc| = 1$.

Zadanie 23. ($\star\star$) *Wykaż, że jeżeli* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ *oraz* n *jest dowolną liczbą naturalną nieparzystą, to*

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

Zadanie 24. ($\star\star$) *Dodatnie liczby całkowite* n, m *spełniają warunek*

$$n(4n+1) = m(5m+1).$$

Wykaż, że $n-m$ *jest kwadratem liczby całkowitej*

Zadanie 25. ($\star\star$) *Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej* $n > 1$, *liczba*

$$n^n - n^2 + n - 1$$

dzieli się przez $(n-1)^2$.

Rozdział 3

Równania i nierówności

(w przygotowaniu...)

Rozdział 4

Liczby naturalne, zasada indukcji, zasada dobrego porządku

Liczby naturalne obecne są w programie szkolnym od samego początku. Przez pierwsze lata szkoły, a nawet w przedszkolu, ich nauczanie skoncentrowane jest na przybliżaniu ich tzw. ASPEKTÓW, do których zaliczamy: aspekt kardynalny (liczba elementów zbioru), aspekt porządkowy (o który z kolei element zbioru chodzi) i aspekt miarowy (ile razy w danej wielkości mieści się wielkość jednostkowa). Rozwijane są równolegle umiejętności operowania zapisem dziesiętnym oraz algorytmy wykonywania czterech działań arytmetycznych. Poświęcimy im odrobinę miejsca w uwagach metodycznych.

4.1 Zasada indukcji – aksjomat liczb naturalnych

W dalszych klasach mowa jest o podzielności, resztach z dzielenia i rozkładzie na czynniki pierwsze. W liceum mówimy o ciągach o wyrazach w zbiorze Y (najczęściej ciągach liczbowych), czyli o funkcjach ze zbioru liczb naturalnych do zbioru Y i dowodzimy różne ich własności – do niedawna jeszcze korzystając (zanim została wykreślona z programu) z zasady indukcji matematycznej. Chcąc uzasadnić szkolne rezultaty dotyczące liczb naturalnych zaczniemy od określających je aksjomatów.

Definicja 4.1: Aksjomatyka Peano liczb naturalnych

Za terminy pierwotne uznajemy zbiór $\mathbb{N}$, element n_0 oraz relację bycia następnikiem w zbiorze $\mathbb{N}$, to znaczy: m jest następnikiem n, co oznaczamy jako $m = S(n)$.

- **Aksjomat 1.** Element n_0 jest liczbą naturalną, czyli $n_0 \in \mathbb{N}$.
- **Aksjomat 2.** Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ mamy $S(n) \neq n_0$.
- **Aksjomat 3.** Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $m = S(n)$.
- **Aksjomat 4.** Dla dowolnych liczb $n, m \in \mathbb{N}$ równość $S(n) = S(m)$ implikuje $n = m$.
- **Aksjomat 5. Zasada indukcji zupełnej.** Jeśli zbiór $A \subset \mathbb{N}$ spełnia jednocześnie warunki:

  (i) $n_0 \in A$,

  (ii) dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$: jeżeli $n \in A$, to $S(n) \in A$,

  to $A = \mathbb{N}$.

Element n_0 oznacza się najczęściej jako 0 lub 1. Przynależność tzw. zera do zbioru liczb naturalnych to kwestia umowna. Istotne staje się to dopiero z punktu widzenia arytmetyki, czyli gdy chcemy wprowadzić działania w tym zbiorze. **My uznajemy „zero" jako liczbę naturalną** i w dalszym ciągu element n_0 oznaczamy jako 0. Warto odnotować, że jest to również konwencja stosowana (obecnie) w polskiej szkole.

Przypomnijmy, że postulowanie istnienia pewnego obiektu przez układ aksjomatów, wcale nie gwarantuje jego istnienia czy też jednoznaczności (jest jeszcze kwestia niesprzeczności aksjomatów).

Obserwacja 4.1

Każda liczba naturalna $n \neq 0$ jest postaci $S(m)$, dla pewnej liczby $m \in \mathbb{N}$.

Dowód. Rozważmy zbiór $A = \{n \in \mathbb{N} : n = 0 \text{ lub } n = S(m), \text{ dla pewnego } m \in \mathbb{N}\}$. Zauważmy, że zbiór ten spełnia warunki (i) oraz (ii) wymienione w zasadzie indukcji, a więc: $0 \in A$ oraz jeśli $n \in A$, to $S(n) \in A$ (każdy element typu $S(n)$ jest w A). A zatem zgodnie z zasadą indukcji mamy $A = \mathbb{N}$. □

Obserwacja 4.2

Mamy $\mathbb{N} = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$ i wszystkie elementy na tej liście są parami różne.

Dowód. Rozważmy podzbiór $Z = \{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$. Z zasady indukcji łatwo wnioskujemy, że $Z = \mathbb{N}$. Zauważmy też, że jeśli dla pewnych $m > n$ mamy $S^n(0) = S^m(0)$, to na mocy Aksjomatu 4 mamy też $0 = S^{m-n}(0)$, co jest niemożliwe, na mocy Aksjomatu 2. □

Działania dodawania i mnożenia w zbiorze $\mathbb{N}$ postulować można przy pomocy następujących aksjomatów.

Definicja 4.2: Dodawanie w zbiorze liczb naturalnych

Dodawaniem w zbiorze liczb naturalnych nazwiemy taką funkcję $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że

(d1) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $n + 0 = n$,

(d2) dla każdych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy $n + S(m) = S(n + m)$.

Definicja 4.3: Mnożenie w zbiorze liczb naturalnych

Mnożeniem w zbiorze liczb naturalnych nazwiemy taką funkcję $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że

(m1) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $n \cdot 0 = 0$,

(m2) dla każdych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$.

Trzeba pokazać, że funkcje określone powyższymi postulatami są rzeczywiście dobrze określone dla dowolnej pary m, n liczb naturalnych. Przekonajmy się o tym dla działania dodawania.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i niech A_n będzie zbiorem tych liczb naturalnych m, dla których zdefiniowana jest suma $n + m$. Na mocy (d1) zdefiniowana jest suma $n + 0 = n$, a więc $0 \in A_n$. Załóżmy teraz, że $m \in A_n$, czyli że zdefiniowana jest już suma $n + m$. Na mocy (d2) zdefiniowana jest suma $n + S(m)$, a więc $S(m) \in A_n$.

Wykazaliśmy, że dla zbioru A_n spełnione są założenia zasady indukcji zupełnej. Na mocy tej zasady każda liczba naturalna należy do zbioru A_n, a więc dla każdej liczby naturalnej m zdefiniowana jest suma $n + m$. Ponieważ n było w dowodzie dowolną liczbą, zatem suma $n + m$ zdefiniowana jest dla dowolnej pary (n, m) liczb naturalnych.

Czytelnik łatwo sprawdzi, że znane mu działania dodawania i mnożenia w zbiorze liczb naturalnych spełniają powyższe aksjomaty. Na ich podstawie można otrzymać własności arytmetyczne przynależne liczbom naturalnym. Zachęcam do pokazania[1], że $2 + 2 = 4$, przy czym $2 = S(S(0))$ oraz $4 = S(S(2))$.

Na mocy zasady indukcji można wykazać choćby łączność czy przemienność określonych wyżej działań.

[1] Odsyłam też do znakomitej serii dr. Tomasza Millera „Zacznijmy od zera”, `https://youtu.be/0MjpPB3yDRg`.

Obserwacja 4.3

Dla każdej liczby naturalnej k zachodzi równość $k + 0 = 0 + k$.

Dowód. Rozważmy zbiór $A = \{k \in \mathbb{N} : k + 0 = 0 + k\}$. Oczywiście $0 \in A$, gdyż $0 + 0 = 0 + 0$. Wiemy też, że jeśli $k \in A$, to $0 + S(k) = S(0 + k) = S(k + 0) = S(k) = S(k) + 0$. A zatem $A = \mathbb{N}$. □

Dzięki wprowadzeniu operacji dodawania możemy zdefiniować relację nierówności w $\mathbb{N}$.

Definicja 4.4: Porządek liniowy w zbiorze liczb naturalnych

W zbiorze $\mathbb{N}$ wprowadzamy RELACJĘ MNIEJSZOŚCI $<$ w następujący sposób: dla liczb naturalnych m, n warunek $m < n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna k taka, że $m+k = n$.

4.2 Zasada indukcji w języku szkolnym

Obserwacja 4.4: Szkolna zasada indukcji zupełnej

Niech $\{T(k) \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{T(0), T(1), T(2), \ldots\}$ będzie ciągiem zdań[a]. Jeśli zachodzą jednocześnie dwa następujące warunki

(i) $T(0)$ jest zdaniem prawdziwym,

(ii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwość zdania $T(n)$ implikuje prawdziwość zdania $T(n + 1)$,

to wszystkie zdania $T(0), T(1), T(2), \ldots$ w ciągu $\{T(k) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ są prawdziwe.

[a]Bardziej formalnie: niech $T(k)$ oznacza formę zdaniową zmiennej n określoną w dziedzinie $\mathbb{N}$.

Warunek (i) nazywa się zwykle **bazą** lub **podstawą** indukcji. Przy sprawdzaniu warunku (ii) prawdziwość zdania $T(n)$ nazywać będziemy **założeniem indukcyjnym**, a prawdziwość zdania $T(n + 1)$ nazywamy **tezą indukcyjną**. Samo rozumowanie sprawdzające implikację postulowaną w (ii) nazywamy **krokiem indukcyjnym**. Należy zawsze sprawdzać, że obydwa warunki są spełnione[2].

Zasada indukcji nauczania była w liceach polskich przez cały XX wiek, między innymi w wyniku czerpania z zachęt wielkich matematyków: Poincarego czy Hilberta. Jeden z pierwszych systematycznych wykładów arytmetyki opartych o zasadę indukcji pochodzi od wybitnego polskiego matematyka przełomu wieków: Stanisława Zaremby: *Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych*. Można egzemplarz tej książki znaleźć online.

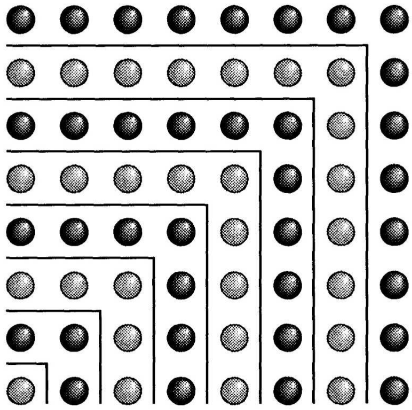
Przez lata dyskutowano i zgłaszano wiele problemów oraz wyzwań dydaktycznych związanych z jej stosowaniem. Przykładem takiego tekstu jest artykuł Anny Żeromskiej z roku 1996 (patrz bibliografia). Zasada indukcji nie jest obecna w programie szkolnym od roku 2009. W dokumencie wprowadzającym[3] nowe zapisy napisano:

> Zasada indukcji matematycznej została usunięta całkowicie, również z zakresu rozszerzonego. Jest specyficznie trudna. Stosowanie jej stało się pewnym rytuałem, którego sens pojmowali nieliczni uczniowie.

Czy rzeczywiście zasada ta jest trudna? Na pewno przydatne jest mówienie o zasadzie indukcji z wykorzystaniem zasady poglądowości, starając się najpierw zbudować właściwe intuicje i zachęcić uczniów do wymyślania własnych wzorów i formuł. Świetną pomocą jest tu seria książek *Proofs without words* Rogera B. Nielsena, prezentujących za pomocą przekonujących obrazów zależności liczbowe lub geometryczne i pozwalających na zabawę w samodzielne wymyślanie wzorów. Oto przykłady.

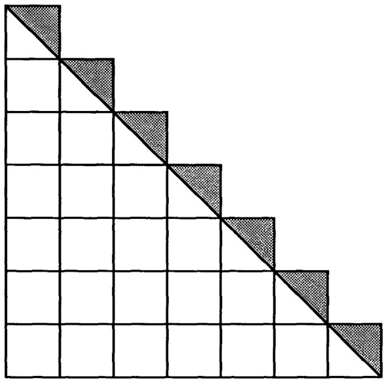
[2]Twierdzenie: „Każda liczba naturalna n równa jest swojemu następnikowi” nie jest prawdziwe dla $n = 0$.
[3]`http://www.bc.ore.edu.pl/Content/229/Tom+6+Edukacja+matematyczna+i+techniczna.pdf`.

Zagadka 1. Ułóż wzór opisujący zależność widoczną na rysunku.

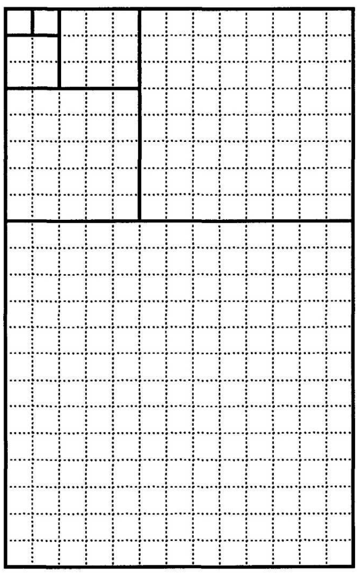


Widzimy, że chodzi tu o zależność pomiędzy sumą pierwszych n nieujemnych liczb nieparzystych oraz n-tym (dodatnim) kwadratem liczby naturalnej. Pozostawiam do rozwiązania dwie inne zagadki.

Zagadka 2. Ułóż wzór opisujący zależność widoczną na rysunku.



Zagadka 3. Ułóż trzy wzory opisujące zależności widoczne na rysunku.



Zdarzają się zadania wymagające drobnego zmodyfikowania zasady indukcji. Oto przykład i odpowiednie sformułowanie wariantu zasady indukcji.

Zadanie 46. *Ciąg a_n dany jest za pomocą rekurencji $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, dla $n \geqslant 3$. Pokazać, że*

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Obserwacja 4.5

Jeśli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ takim, że

(i) $1, 2 \in A$,

(ii) dla każdej liczby naturalnej $n > 2$: jeżeli $n \in A, n+1 \in A$, to $n+2 \in A$,

to każda liczba naturalna $n \geqslant 1$ należy do A.

O ile uczniowie czy studenci modyfikują nierzadko zasadę indukcji zupełnie intuicyjnie, nauczyciel lub prowadzący zajęcia powinien być w stanie zawsze sformułować poprawny wariant zasady stosowanej w określonym zadaniu. W niektórych sytuacjach zasadne może być przedyskutowanie tej kwestii z uczestnikami zajęć. Rozważmy jeszcze jeden przykład, który mógłby zapewne sprawić uczniom trudności.

Zadanie 47. *Pokazać, że dla każdego naturalnego $n > 1$ zachodzi nierówność*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

W powyższym zadaniu trzeba samodzielnie sformułować tezę indukcji. Nie jest ona bowiem sugerowana przez treść zadania. Jak się okazuje, należy pokazać mocniejszą nierówność i pokazać, że dla $n > 1$ lewa strona nierówności jest mniejsza od $1 - \frac{1}{n}$. Wówczas postępowanie jest już standardowe.

Indukcja pozwala przeprowadzić wiele niebanalnych szacowań, czasami bardzo zaskakujących. Każdy student matematyki zna uzasadnienie tego, że szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Polega ono na szacowaniu sum częściowych złożonych z $2^n - 1$ składników przez potęgi liczby 2, dla przykładu:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{4}{8}.$$

Za prof. Szurkiem zachęcam do nieco innego spojrzenia na ten problem, poprzez następujące zadanie..

Zadanie 48. *Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej N suma $\sum\limits_{n=1}^{2^{2N-3}} \frac{1}{n}$ jest większa od N.*

* * *

Należy pamiętać o delikatności pierwszego kroku indukcyjnego zwłaszcza, gdy krok indukcyjny wymaga skoków o duże liczby naturalne. Oto dwa zadania, w którym znajduje się kilka pułapek związanych ze stosowaniem indukcji. Zostawiam je Czytelnikowi do samodzielnego rozważenia.

Zadanie 49. *Znajdź błąd w następującym „dowodzie” zdania: „Wszystkie koty są tego samego koloru”.*

> *Podstawa indukcji to sprawdzenie dla $n = 1$. Oczywiście w zbiorze zawierającym jednego kota wszystkie koty są tego samego koloru.*
>
> *Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie dla wszystkich liczb naturalnych od 1 do $n-1$. Weźmy dowolny zbiór A zawierający n kotów. Pokażemy, że koty ze zbioru A są tego samego koloru.*
>
> *Wyrzucając z A pewnego kota X otrzymamy zbiór zawierający $n-1$ kotów. Korzystając zatem z założenia indukcyjnego stwierdzamy, że wszystkie koty w A oprócz X mają ten sam kolor. Wyrzucając z A kota Y (innego niż X), wnioskujemy z założenia indukcyjnego, że kot X ma ten sam kolor, co pozostałe koty w A. Zatem wszystkie koty w A mają ten sam kolor.*

Zadanie 50. *Wykaż, że dysponując dowolną liczbą znaczków 4-złotowych oraz 5-złotowych można wysłać dowolną przesyłkę kosztującą $n \geqslant 12$ złotych, gdzie n jest liczbą naturalną.*

Poniżej zaprezentowane są dwa rozumowania, obydwa błędne. Na czym te błędy polegają?

Błędne rozumowanie 1. Spróbujmy zastosować zasadę indukcji, formułując zdanie: $P(n)$ – można zapłacić $n \geqslant 12$ złotych za pomocą znaków 4– oraz 5–złotowych.

(i) Baza indukcji $P(12)$ jest jasna – 12 złotych można opłacić za pomocą trzech znaczków 4-złotowych.

(ii) Załóżmy, że zdanie $P(k)$ jest prawdziwe dla każdego $k \geqslant 12$. Chcemy zapłacić $k+1$ złotych za pomocą znaczków. Zgodnie z hipotezą indukcyjną możemy zapłacić $k-3$ złotych za pomocą pewnej liczby znaczków. Dodając znaczek za 4 złote opłacamy $k+1$, co kończy krok indukcyjny.

Błędne rozumowanie 2. Chcemy zapłacić $k+1$ złotych za pomocą znaczków. Z założenia indukcyjnego możemy opłacić k złotych za pomocą znaczków. Wymieńmy jeden ze znaczków 4-złotowych użytych do opłacenia k złotych znaczkiem 5-złotowym i będziemy mieli łącznie znaczki warte $k+1$ złotych.

4.3 Niestandardowe warianty indukcji

Zobaczmy teraz przykład rozumowania, w którym stosuje się tzw. indukcję podwójną, gdzie wykonanie kroku indukcyjnego wymaga przeprowadzenia rozumowania indukcyjnego.

Zadanie 51. *Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych $m \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność:*

$$(m+1)^n > mn.$$

Dowód korzysta z następującej wersji indukcji (zachęcam do przeprowadzenia samodzielnego dowodu).

Obserwacja 4.6: Indukcja podwójna

Rodzina zdań $P(m,n)$ indeksowana liczbami naturalnymi $m \geqslant a$ oraz $n \geqslant b$ spełnia trzy warunki.

(a) Zdanie $P(a,b)$ jest prawdziwe.

(b) Dla każdego $m \geqslant a$, jeśli $P(m,b)$ jest prawdziwe, to $P(m+1,b)$ jest prawdziwe.

(c) Dla każdego $n \geqslant b$, jeśli $P(m,n)$ jest prawdziwe, dla wszystkich $m \geqslant a$, to $P(m,n+1)$ jest prawdziwe dla wszystkich $m \geqslant a$.

Wówczas zdanie $P(m,n)$ jest prawdziwe dla wszystkich par (m,n) spełniających $m \geqslant a$ oraz $n \geqslant b$.

Niech $P(m,n)$ będzie zdaniem mówiącym, że nierówność $(m+1)^n > mn$ jest prawdziwa, dla $m,n \geqslant 1$.

Dla $m = 1$ oraz $n = 1$, zdanie $P(1,1)$ oznacza po prostu nierówność $(1+1)^1 > 1 \cdot 1$, która jest oczywiście prawdziwa.

Załóżmy teraz, że dla $m \neq 1$ zdanie $P(m,1)$ jest prawdziwe. Wówczas:

$$((m+1)+1)^1 = m+2 > m+1 = (m+1) \cdot 1,$$

więc $P(m+1,1)$ jest również prawdą. Używając intuicji przedstawionej wyżej widzimy, że wykonaliśmy w istocie bazę zwykłej indukcji po m. Wykonanie tego kroku wymagało przeprowadzenia kroków (a), (b).

Przechodzimy do kroku indukcyjnego, czyli kroku (c). Niech $n \geqslant 1$ oraz załóżmy, że zdanie $P(m,n)$ jest prawdziwe dla każdego $m \geqslant 1$. Wówczas:

$$(m+1)^{n+1} = (m+1)(m+1)^n > (m+1)mn.$$

Skoro jednak $m \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 1$, to:

$$(m+1)mn = m^2n + mn \geqslant mn + m.$$

Zatem $P(m,n+1)$ jest prawdą dla wszystkich $m \geqslant 1$.

Twierdzenie 4.1: O indukcji „wstecznej”

Niech $T(n)$ oznacza zdanie mówiące, że pewne twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej n. Jeżeli:

- istnieje ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) taki, że $T(n_k)$ zachodzi dla każdego $k \in \mathbb{N}$,
- dla każdego naturalnego $m \geqslant m_0$ prawdziwa jest implikacja $T(m+1) \Rightarrow T(m)$,

to dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant m_0$ zachodzi $T(n)$.

Zadanie 52 (Nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną)**.** *Jeżeli $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to zachodzi nierówność:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Rozwiązanie. Niech $T(n)$ będzie, dla $n \geqslant 1$, zdaniem: dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Za ciąg rosnący (n_k) w twierdzeniu wyżej bierzemy ciąg $n_k = 2^k$.

Dla $k = 1$ mamy klasyczną nierówność szkolną:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 1$ zachodzi $T(2^k)$. Wówczas dla 2^{k+1} liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_{2^{k+1}}$ mamy:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{\dfrac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} + \dfrac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&\overset{T(2^k)}{\geqslant} \frac{\sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}}}}{2} \\
&\overset{T(2)}{\geqslant} \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k} a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}}}} = \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \ldots a_{2^k} a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Wnioskujemy, że $T(2^k)$ zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej k. Przechodzimy do uzasadnienia implikacji $T(m+1) \Rightarrow T(m)$, dla $m \geqslant 1$. Mamy (ładne wykorzystanie tego czym jest średnia arytmetyczna):

$$\frac{a_1 + \ldots + a_m}{m} = \frac{a_1 + \ldots + a_m + \dfrac{a_1 + \ldots + a_m}{m}}{m+1} \overset{T(m+1)}{\geqslant} \sqrt[m+1]{a_1 \ldots a_m} \sqrt[m+1]{\frac{a_1 + \ldots + a_m}{m}}.$$

Ostatnia nierówność redukuje się do postaci:

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_m}{m}\right)^{\dfrac{m}{m+1}} \geqslant (a_1 \ldots a_m)^{\dfrac{1}{m+1}}.$$

Podnosząc uzyskaną nierówność stronami do potęgi $\frac{m+1}{m}$ uzyskujemy $T(m)$, co oznacza, że dowód jest zakończony na mocy przytoczonej wyżej wersji zasady indukcji. ■

W ostatniej części tego rozdziału pokażemy bardziej elementarny dowód nierówności między średnimi, opierający się o zasadę maksimum.

Zachęcam Czytelnika do wykorzystania indukcji wstecznej w dowodzie następującej nierówności, związanej ze słynną formułą Ramanujana (por. M. Sheard, *Backward Induction and a Formula of Ramanujan*, Mathematics Magazine, Vol. 85, No. 5):

$$\sqrt{1 + n\sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + (n+2)\sqrt{1 + (n+3)\sqrt{1 + \ldots}}}}} \leqslant n + 1.$$

Twierdzenie 4.2: Mocna zasada indukcji

Jeśli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ takim, że

(i) $0 \in A$,

(ii) dla każdej liczby naturalnej n: jeżeli $k \in A$, dla wszystkich liczb naturalnych k takich, że $0 \leqslant k \leqslant n$, to $n+1 \in A$

to każda liczba naturalna należy do A.

Dowód. Załóżmy, że A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ oraz, że spełnione są warunki (i), (ii). Przypuśćmy, że istnieje liczba n, taka że $n \notin A$. Stąd zbiór $\mathbb{N} \setminus A$ jest niepustym podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$. Na mocy zasady minimum w zbiorze $\mathbb{N} \setminus A$ jest liczba najmniejsza n_0. Oczywiście $n_0 \neq 0$, gdyż $0 \in A$. Każda liczba naturalna k spełniająca warunek $1 \leqslant k \leqslant n_0 - 1$ nie należy do $\mathbb{N} \setminus A$, a wiec należy od A. Z warunki (ii) wynika, że $n_0 \in A$, co jest sprzeczne z założeniem, że $n_0 \in \mathbb{N} \setminus A$. A zatem każda liczba naturalna należy do A, co kończy dowód. □

Klasycznym przykładem zastosowania silnej indukcji jest dowód faktu mówiącego, że każda liczba naturalna większa od 1 jest iloczynem liczb pierwszych. Innym przykładem jest następujące zadanie.

Zadanie 53. *Wykaż, że jeśli p_n jest n-tą liczbą pierwszą, to $p_n < 2^{2^n}$.*

Niech $P(n)$ będzie zdaniem $p_n < 2^{2^n}$. Oczywiście $P(1)$ jest prawdą: $p_1 = 2 < 2^{2^1}$. Załóżmy teraz, że dla $1 \leqslant s \leqslant k$ zdanie $P(k)$ jest prawdziwe. Mamy zatem:

$$p_1 < 2^{2^1}, \quad p_2 < 2^{2^2}, \quad \ldots \quad p_k < 2^{2^k}.$$

Mnożąc te wszystkie nierówności stronami i korzystając z własności działań na potęgach mamy:

$$p_1 p_2 \ldots p_k + 1 \leqslant 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot \ldots \cdot 2^{2^k} = 2^{2^1+2^2+\ldots+2^k} = 2^{2^{k+1}-2} < 2^{2^{k+1}}.$$

Zauważmy zatem, że każdy dzielnik pierwszy liczby $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ spełnia $p < 2^{2^{k+1}}$. Zauważmy jednak, że żadna z liczb $p_1, \ldots, p_k$ nie jest dzielnikiem pierwszym liczby $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$. A zatem jednym z dzielników pierwszych tej liczby jest p_m dla pewnego $m \geqslant k+1$, co w obliczu $p_m \geqslant p_{k+1}$ kończy dowód

Szacowanie to jest niezwykle słabe. Nieco trudniejsze (ale wciąż stosunkowo elementarne w dowodzie) jest zadanie mówiące, że dla $n \geqslant 2$ iloczyn liczb pierwszych nie większych niż n nie przekracza 4^{n-1}.

4.4 Zasada dobrego porządku (minimum i maksimum)

W pierwszym wykładzie mówiliśmy o podstawowych zastosowaniach zasady minimum i maksimum. Przekonajmy się, że wynika ona w istocie z aksjomatu indukcji.

Twierdzenie 4.3: Zasada minimum ($\mathbb{N}$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym)

W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza, czyli mniejsza lub równa od każdej liczby należącej do tego zbioru. Innymi słowy relacja porządku $\leqslant$ zdefiniowana wcześniej w $\mathbb{N}$ jest dobrym porządkiem.

Dowód. Załóżmy, że A jest niepustym zbiorem liczb naturalnych i że w A nie ma liczby najmniejszej. Niech B będzie zbiorem liczb naturalnych zdefiniowanym w następujący sposób: liczba naturalna n należy do B wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej m, jeśli $m \leqslant n$, to $m \notin A$. Można powiedzieć, że jest to zbiór ograniczeń dolnych zbioru A.

Łatwo zauważyć, że $0 \in B$. W przeciwnym razie 0 byłaby najmniejszą liczbą w A, wbrew założeniu. Załóżmy, że $n \in B$. Z definicji zbioru B wynika, że dla każdej liczby naturalnej m, jeśli $m \leqslant n$, to $m \notin A$. Stąd również $n+1 \notin A$. W przeciwnym razie $n+1$ byłoby najmniejszą liczbą w zbiorze A, wbrew założeniu. W konsekwencji $n+1 \in B$. Wykazaliśmy, że dla zbioru B spełnione są założenia zasady indukcji zupełnej. Stąd $B = \mathbb{N}$. Biorąc pod uwagę definicję zbioru B wnioskujemy, że A jest zbiorem pustym, co przeczy założeniu. □

W powyższym twierdzeniu rozpoznajemy oczywiście szerszy kontekst teorii porządków, która się nie zajmujemy. Z zasady minimum wyprowadzić można także zasadę maksimum.

Definicja 4.5: Zbiór ograniczony

Mówimy, że podzbiór $A \subset \mathbb{N}$ jest OGRANICZONY Z GÓRY liczbą naturalną M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $a \in A$ zachodzi $a \leqslant M$.

Twierdzenie 4.4: Zasada maksimum

W każdym niepustym podzbiorze A liczb naturalnych ograniczonym z góry istnieje element największy, to znaczy istnieje $a \in A$ takie, że dla każdego $b \in A$ mamy $b \leqslant a$.

Dowód. Niech $B \subset \mathbb{N}$ będzie podzbiorem złożonym z górnych ograniczeń zbioru M. Jest to podzbiór niepusty (należy do niego M) zbioru $\mathbb{N}$, więc ma element najmniejszy, nazwijmy go M'. Liczba $M' - 1$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A, więc dla pewnej liczby $n \in A$ zachodzi $M \geqslant n > M - 1$. Wynika stąd, że $n + 1 > M$, a ponieważ między n i $n + 1$ nie ma liczb ze zbioru A, więc $M = n$. □

* * *

Oto ładny przykład zadania wiążącego indukcję z zasadą maksimum.

Zadanie 54. *Wykaż, że jeżeli iloczyn dodatnich $a_1, \dots, a_n$ wynosi 1, to $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.*

ROZWIĄZANIE. Dla $n = 1$ teza jest oczywiście spełniona. Dla $n = 2$ otrzymujemy znaną nierówność $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, dla $x > 0$. Przejdźmy do kroku indukcyjnego i załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego n naturalnego. Rozważmy liczby dodatnie $a_1, \dots, a_{n+1}$, gdzie $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1} = 1$. Przyjmijmy przy tym, że a_1 jest najmniejszym, a a_{n+1} – największym elementem tego ciągu. Stosujemy założenie indukcyjne dla n-tki liczb $a_1 a_{n+1}, a_2, a_3, \dots, a_n$. Mamy zatem:

$$a_1 a_{n+1} + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geqslant n.$$

Skoro a_{n+1} jest największą, a a_1 najmniejszą z liczb, których iloczyn wynosi 1, to mamy iloczyn dwóch liczb nieujemnych:

$$(a_{n+1} - 1)(1 - a_1) \geqslant 0.$$

Zatem:

$$a_{n+1} - a_1 a_{n+1} + a_1 \geqslant 1.$$

Dodając strony otrzymanej nierówności ze stronami nierówności otrzymanej z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \geqslant n + 1$, co jest tezą dla $n + 1$. Zatem tezę otrzymujemy na mocy zasady indukcji. ■

Dowód ten jest dość sprytny, ale pokazuje kreatywne wykorzystanie wyróżnienia najmniejszego i największego elementu. Wywnioskujemy z niego teraz obiecany kolejny dowód nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną. Skorzystamy z poprzedniego zadania bierzemy

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

oraz podstawiamy:

$$x_1 = \frac{a_1}{g}, \quad x_2 = \frac{a_2}{g}, \quad \dots \quad x_n = \frac{a_n}{g},$$

Liczby x_i są nieujemne, a ich iloczyn równy jest 1. W związku z tym na mocy poprzedniego zadania mamy:

$$\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} + \ldots + \frac{a_n}{g} \geqslant n,$$

co pociąga za sobą tezę.

Możliwa dalsza lektura

- B. Bzdęga, *Trzy rodzaje indukcji matematycznej*, Kącik początkującego olimpijczyka, Delta, `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2019/06/30/2019-07-delta-kpo.pdf`.
- J. D. Hamkins, *Proof and the Art of Mathematics*, MIT Press 2020.
- W. Guzicki, *O dwóch metodach rozwiązywania zadań*, konferencja SEM `https://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-2009/materialy/guzicki.pdf`.
- R. B. Nielsen, *Proofs without words: exercises in visual thinking*, tomy I-III, MAA 2003-2016.
- H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, wyd. 14, PWN 2004.
- SEM, *Indukcja wsteczna*, Delta 02/2011 `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/analiza/2011/02/01/Indukcja_wsteczna/`
- M. Szurek, *Dodawanie i odejmowanie. Mnożenie i dzielenie, w: O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, tom 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe 2006.
- A. Żeromska, *Pewne zagadnienia dydaktyczne związane z nauką o indukcji matematycznej*, Dydaktyka Matematyki 18 (1996), `https://bibliotekanauki.pl/articles/749008`.

Zadania – zasada indukcji

Zadanie 1. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 1$ *zachodzi równość*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Zadanie 2. *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 1$ *zachodzi równość:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadanie 3. *Dla każdej liczby naturalnej* n *liczba* $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ *jest podzielna przez* 133.

Zadanie 4. *Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej* $n \geqslant 2$ *zachodzi wzór:*

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Zadanie 5. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej* n *zachodzi nierówność:*

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Zadanie 6 (Nierówność Bernoullego)**.** *Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej* $a > -1$ *i każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 1$ *zachodzi nierówność*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Wykaż też, że dla $n \geqslant 2$ *i* $a \neq 0$, $a > -1$ *mamy nierówność ostrą.*

Zadanie 7. *Ciąg* (F_n)*, tzw. ciąg Fibonacciego, zdefiniowany jest w sposób rekurencyjny warunkami:*

$$F_0 = 1, F_1 = 1 \qquad \textit{oraz} \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Udowodnij, że mają miejsce zależności:

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n, \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Zadanie 8. *Udowodnij, że jeśli* n *jest liczbą całkowitą większą od* 4*, to*

$$2^n > n^2.$$

Zadanie 9. ($\star$) *Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej* $n \geqslant 2$ *liczba* $2^{2^n} - 6$ *jest podzielna przez* 10.

Zadanie 10. ($\star$) *Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 0$ *ma miejsce równość:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}), \qquad \textit{gdzie} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zadanie 11. ($\star$) *Wykaż, że dla dowolnego naturalnego* n *zachodzi:*

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Zadanie 12. ($\star$) *Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej* n *oraz* $k \leqslant n$ *ilość wszystkich* k*-elementowych kombinacji z elementów zbioru* n*-elementowego jest równa* $\binom{n}{k}$*. Uzasadnij prawdziwość wzoru dwumianowego Newtona.*

Zadanie 13. ($\star$) *Wykaż, że każda liczba całkowita dodatnia może być przedstawiona jako suma parami różnych naturalnych potęg liczby* 2.

Zadanie 14. ($\star$) *Niech* $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ *oraz* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$*, dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$*. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej* k *zachodzi nierówność* $a_k \leqslant 2^k$*.*

Zadanie 15. ($\star$) *Wykaż, że*

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n.$$

Zadanie 16. ($\star$) *Wykaż, że dla liczby naturalnej* $n \geqslant 2$ *zachodzi nierówność:*

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3.$$

Zadanie 17. ($\star$) *Niech* (a_n)*,* (b_n) *będą ciągami dodatnich liczb całkowitych spełniającymi warunek*

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n,$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich n*. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej* n *liczby* a_n *i* b_n *są względnie pierwsze.*

Zadanie 18. ($\star\star$) *Przy drodze w kształcie okręgu rozmieszczone są stacje benzynowe. W stacjach znajduje się benzyna w ilości wystarczającej (łącznie) do przejechania całej drogi. Udowodnij, że kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli bak jego pojazdu może zawsze pomieścić całe paliwo, które znajduje się na stacji, do której podjechał.*

Zadanie 19. ($\star\star$) *Dwóch graczy na plaży gra w następującą grę. Na plaży ustawiono w rzędzie skończenie wiele wiader, z których każde zawiera pewną liczbę ryb. Dane jest też bardzo duże dodatkowe skupisko ryb, z którego można je w sposób nieograniczony pobierać. Gra odbywa się w turach, naprzemiennie wykonywanych przez graczy. Każdy z nich w swojej turze zabiera rybę z jednego wiadra i dokłada (ze skupiska) ryby do wiader znajdujących się na lewo od wiadra, z którego wyjął rybę – dokłada tyle ryb ile chce do każdego wiadra (może nic nie dodać). Wygrywa ten, kto wyjmie ostatnią rybę z wiadra tak, że wszystkie pozostaną puste. Wykaż, że niezależnie od przebiegu każda taka gra koczy się w skończenie wielu ruchach.*

Rozdział 5

Relacja podzielności
Rozkład na czynniki pierwsze

5.1 Relacja podzielności, rozmieszczenie dzielników

Zgodnie z zasadą minimum, przedstawioną na ostatnim wykładzie, w każdym niepustym podzbiorze zbioru liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza, czyli mniejsza lub równa od każdej liczby należącej do tego zbioru. W oparciu o tą zasadę wyprowadzimy dziś szereg rezultatów dotyczących podstawowych własności podzielności. Przykład – twierdzenie o dzieleniu z resztą – pojawił się już na ostatnim wykładzie. Podstawą jest jednak zagadnienie rozkładu na czynniki pierwsze.

Definicja 5.1: Podzielność w zbiorze liczb naturalnych

Mówimy, że liczba naturalna $m > 0$ jest DZIELNIKIEM liczby naturalnej n, jeśli istnieje liczba całkowita d taka, że $n = d \cdot m$. Oznaczenie: $m \mid n$.

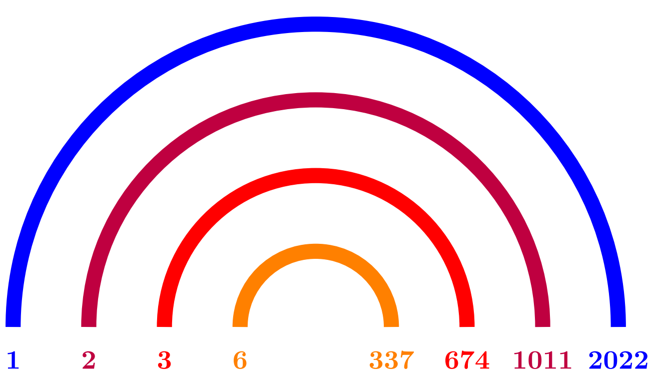
Sformułujmy bez dowodu proste wnioski z definicji.

Wniosek 5.1

Niech $m, n, r \in \mathbb{N}$ będą liczbami dodatnimi.

- Jeśli $m \mid n$ oraz $n \mid r$, to $m \mid r$.
- Jeśli $m \mid n$, to m ma nie więcej dzielników (naturalnych), niż n.
- Jeśli $m \mid n$, to również $\frac{n}{m} \mid n$.

Poniżej znajduje się ilustracja powyższego faktu obrazująca istotną symetrię dzielników dodatniej liczby całkowitej 2022. Ta symetria sięga bardzo głęboko w algebraiczną naturę liczb. Rozumienie owej swoistej samodualności pozwala zupełnie inaczej spojrzeć na strukturę dzielników liczby całkowitej.



Wniosek 5.2

Liczba naturalna ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby naturalnej.

Dowód. Niech
$$A = \{d \,|\, n : d < \sqrt{n}\} \quad \text{oraz} \quad B = \{e \,|\, n : d > \sqrt{n}\}.$$
Na mocy poprzedniego wniosku, zbiory A oraz B są równoliczne. Jeśli bowiem $d < \sqrt{n}$, to $\frac{n}{d} > \sqrt{n}$, i odwrotnie. A zatem liczba dodatnich dzielników liczby n równa jest:

- dwukrotności liczby elementów zbioru A, jeśli $\sqrt{n}$ nie jest dzielnikiem n,
- $2|A| + 1$, jeśli $\sqrt{n}$ jest dzielnikiem n.

Liczba $\sqrt{n}$ jest dzielnikiem n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem. □

Opisane wyżej własności nadają zbiorowi dzielników ustalonej liczby n pewną wewnętrzną symetrię. Każdemu „małemu dzielnikowi" można przypisać odpowiadający mu „duży dzielnik" – poza sytuacją, gdy mowa jest o dzielniku $\sqrt{n}$ (to wyróżnia kwadraty liczb całkowitych). Wszystkie dzielniki liczby naturalnej można ustawić w ciąg rosnący zaczynający się liczbą 1 i kończący się liczbą n:
$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < \frac{n}{d_2} < \frac{n}{d_1} = n. \qquad (\heartsuit)$$

Liczbę dzielników opiszemy później jawnym wzorem, dysponując jej rozkładem na czynniki pierwsze.

Rozwiążmy zadanie pokazujące w jaki sposób powyższe własności mogą być wykorzystane.

Zadanie. Liczby całkowite dodatnie a oraz b mają odpowiednio po 99 oraz 101 dodatnich dzielników. Czy iloczyn ab może mieć dokładnie 150 dodatnich dzielników?

Liczby a oraz b mają nieparzystą liczbę dzielników, a zatem są kwadratami liczb naturalnych, czyli $a = m^2$ oraz $b = n^2$, dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$. Zatem $ab = m^2n^2 = (mn)^2$ również jest kwadratem. Na mocy Wniosku 4.2 liczba ab musi również mieć nieparzystą liczbę dzielników.

5.2 Liczby pierwsze i złożone. Rozkład na czynniki pierwsze

Rozkład na czynniki i podzielność jest fundamentanym zagadnieniem teorii podzielności. Stąd abstrakcyjne stosunkowo pojęcie liczby pierwszej obecne jest już od stosunkowo wczesnych etapów nauczania w szkole podstawowej.

Definicja 5.2: Liczby pierwsze i złożone

Liczbę naturalną $n > 1$ nazywamy LICZBĄ PIERWSZĄ, jeśli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne. Liczbę naturalną $n > 1$ nazywamy LICZBĄ ZŁOŻONĄ, jeśli ma więcej niż dwa dzielniki[a].

[a] Liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona. W programie szkolnym pojawia się czasem stwierdzenie, że 0 jest wielokrotnością liczby naturalnej. Liczby 0 również nie zaliczamy do liczb złożonych.

Obserwacja 5.1

Każda liczba naturalna $n > 1$ ma dzielnik pierwszy.

Dowód. Ponownie skorzystamy z zasady minimum. Zbiór $D_n = \{d \in \mathbb{N} : d > 1 \text{ oraz } d \,|\, n\}$ jest niepusty, bo $n \in D_n$, więc istnieje w D_n element najmniejszy $p > 1$. To musi być liczba pierwsza, bo w przeciwnym przypadku dostaniemy $p = d_1 d_2$, gdzie $1 < d_1, d_2 < p$. Przy tym $d_1 \,|\, n$, co przeczy minimalności p. □

Wniosek 5.3

Każda liczba złożona n ma (najmniejszy) dzielnik pierwszy nie większy od $\sqrt{n}$.

Podstawowe rozważania teorioliczbowe prowadzone były już w starożytności. Szczególnie fascynowały uczonych tzw. liczby doskonałe. Tu jednak przywołujemy jedynie podstawowy fakt.

Twierdzenie 5.1: Euklides

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $p_1, \ldots, p_k$ są wszystkimi liczbami pierwszymi. Rozważmy liczbę

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1.$$

Wówczas żadna z liczb p_i nie jest dzielnikiem liczby n, ponieważ n daje przy dzieleniu przez p_i resztę 1. Zatem liczba n musi mieć inny dzielnik pierwszy niż $p_1, \ldots, p_k$, co daje sprzeczność. $\square$

Wniosek 5.4

Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ pomiędzy n oraz $n! + 1$ znajduje się liczba pierwsza.

Słynne twierdzenie Czebyszewa z połowy XIX wieku mówi, że dla $n > 1$ pomiędzy n, a $2n$ znajduje się liczba pierwsza. Na końcu wykładu przedstawimy szkic pomysłu na dowód. Warto odnotować, że zgodnie z problemem otwartym Legendre'a nie wiadomo czy pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi kwadratami liczb > 1 znajduje się liczba pierwsza.

Istnieją dowolnie długie ciągi liczb naturalnych, nie zawierające liczby pierwszej, np.:

$$n! + 2, \quad n! + 3, \quad n! + 4, \quad \ldots, \quad n! + n.$$

Fakt ten jest o tyle ciekawy, że zapewnia dowód następującego (nieoczywistego) twierdzenia.

Twierdzenie 5.2

Liczba $f(x)$ liczb pierwszych mniejszych lub równych $x \in \mathbb{R}$ nie jest funkcją wielomianową.

Dowód. Gdyby $f(x)$ była funkcją wielomianową stopnia n, to dla $x = (n+2)! + r$, gdzie $r = 2, \ldots, n+2$ funkcja ta przyjmować by musiała tą samą wartość. Jeśli ta wartość równa jest k, to $f(x) - k = 0$ jest równaniem wielomianowym stopnia n z $n + 1$ pierwiastkami, co jest niemożliwe. $\square$

Obserwacja 5.2

Liczba $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, jest albo pierwsza, albo iloczynem (skończonej liczby) liczb pierwszych.

Dowód. Dowód jest indukcją ze względu na n. Liczba 2 jest pierwsza. Weźmy dowolną liczbę $n > 2$. Możliwe są dwa przypadki. Jeśli n jest liczbą pierwszą, to nie ma czego dowodzić. Jeśli n nie jest liczbą pierwszą, to istnieją k, l spełniające $1 < k, l < n$ takie, że $n = k \cdot l$. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje n takie, że n nie jest iloczynem liczb pierwszych. Wówczas zbiór B złożony z takich liczb jest niepusty, więc istnieje w nim najmniejszy element (zasada minimum) m. Skoro m nie jest liczbą pierwszą, to można ją przedstawić jako iloczyn $k \cdot l$, gdzie $1 < k, l < m$. Skoro m było najmniejszym elementem zbioru B, to k, l są iloczynami liczb pierwszych. Zatem $m = kl$ też jest iloczynem liczb pierwszych. Zatem założenie, że B jest niepusty prowadzi do sprzeczności. $\square$

Twierdzenie 5.3

Rozkład liczby naturalnej $n > 1$ na czynniki pierwsze jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników, tzn. jeśli $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, gdzie p_i, q_j są liczbami pierwszymi, to $k = s$ oraz każdy p_i jest równy pewnemu q_j.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne większe niż 1, których rozkład na czynniki pierwsze nie jest jednoznaczny. Niech n będzie najmniejszą taką liczbą. Wówczas

$$n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s,$$

gdzie p_i, q_j to liczby pierwsze. Gdyby np. $p_i = q_j$, to

$$\frac{n}{p_i} = \frac{n}{q_j} < n$$

i rozkład każdego z tych iloczynów na czynniki pierwsze nie jest jednoznaczny, co przeczyłoby minimalności n. A zatem $\{p_i\} \cap \{q_j\} = \emptyset$, Bez straty ogólności możemy zatem założyć, że $p_1 < q_1$. Rozważmy w takim przypadku liczbę:

$$m = n - p_1 q_2 \ldots q_s = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s - p_1 q_2 \ldots q_s = (q_1 - p_1) q_2 \ldots q_s < n.$$

Liczba ta, jako mniejsza od n, ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze, to znaczy: p_1 musi być jedną z liczb

$$q_1 - p_1, q_2, \ldots, q_s.$$

Z tego wynika jednak, że liczba p_1 jest dzielnikiem q_1, co przeczy pierwszości q_1. □

Odnotujmy pewne istotne wnioski z twierdzenia o rozkładzie i jednoznaczności tego rozkładu na czynniki pierwsze. Oto fakt nagminnie stosowany w rozmaitych konkursach.

Wniosek 5.5

Niech p będzie liczbą pierwszą, oraz niech a, r, s, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi

- jeśli p jest dzielnikiem liczby a^n, to również p^n jest dzielnikiem liczby a^n,
- jeśli $rs = p^n$, wówczas tak r, jak i s są potęgami liczby pierwszej p.

Możemy też wrócić do poruszonego już problemu liczby dzielników dodatnich.

Twierdzenie 5.4

Rozłóżmy liczbę $n > 1$ na czynniki pierwsze:

$$n = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{a_1 \text{ razy}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{a_2 \text{ razy}} \cdots \underbrace{p_s \cdot \ldots \cdot p_s}_{a_s \text{ razy}} = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s},$$

gdzie $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ są liczbami pierwszymi oraz $a_1, a_2, \ldots, a_s > 0$ są liczbami naturalnymi. Liczba dzielników n równa jest:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_s + 1).$$

Dowód. Zgodnie z jednoznacznością rozkładu n na czynniki pierwsze, dowolny dzielnik m liczby n ma następujący rozkład na czynniki pierwsze:

$$p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{t_s}, \qquad (\clubsuit)$$

gdzie $t_1 \leqslant a_1, \ldots, t_s \leqslant a_s$. Każdą liczbę t_i można wybrać tak, aby była dowolną liczbą całkowitą od 0 do a_i. Innymi słowy – różne wybory ciągów $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ nieujemnych wykładników w rozkładzie ($\clubsuit$) dają różne dzielniki (i wszystkie możliwe) naturalne dzielniki n. Wnioskujemy ten fakt ponownie z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu. A zatem z zasady mnożenia wynika, że dzielników liczby n jest łącznie $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_s + 1)$. □

5.3 Pojęcia NWD i NWW

Intuicje dotyczące znaczenia pojęcia największego wspólnego dzielnika wywodzić można z bardzo różnych prostych zagadnień praktycznych. Najbardziej podstawowe to: zadania dotyczące grupowania obiektów różnego rodzaju w zestawy (czy też drużyny, grupy, paczki) zawierające tyle samo obiektów tego samego rodzaju. Zobaczmy proste przykłady.

- Mając 15 czekoladek i 5 batonów zrobimy maksymalnie 5 zestawów, z których każdy zawiera tyle samo czekoladek (trzy) i batonów (jeden).
- W grupie 15 chłopców i 6 dziewczynek wskazać można maksymalnie 3 drużyny, z których każda zawiera ustaloną liczbę dziewczynek (pięć) i ustaloną liczbę chłopców (dwóch).
- Zestawu 15 kredek i 7 ołówków nie można rozdzielić „sprawiedliwie" w żadnej grupie dzieci (innej niż jednoosobowa) tak, by każdy otrzymał ustaloną liczbę kredek i ustaloną liczbę ołówków.

Owa „maksymalna liczba zestawów/drużyn/paczek" zawierających tyle samo obiektów jednego i drugiego rodzaju, przy czym obiektów jednego rodzaju jest n, a drugiego jest m wynosi właśnie $\mathrm{NWD}(n, m)$. Definicja ta może być w sposób bardzo prosty rozszerzona do większej liczby obiektów. Jeśli chcemy przygotować paczki zawierające jednakową liczbę czekoladek, batonów i pomarańczy, przy czym liczba tych obiektów wynosi odpowiednio p, q, r, to paczek takich można przygotować maksymalnie $\mathrm{NWD}(p, q, r)$.

Definicja 5.3: Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

Niech a, b dodatnimi liczbami naturalnymi. Określamy NAJWIĘKSZY WSPÓLNY DZIELNIK liczb a, b

$$\mathrm{NWD}(a, b) = \max\{d : d\,|a \text{ oraz } d\,|\,b\}$$

oraz NAJMNIEJSZĄ WSPÓLNĄ WIELOKROTNOŚĆ liczb a, b:

$$\mathrm{NWW}(a, b) = \min(m > 0 : \ a\,|\,m \text{ oraz } \ b|\,m\}.$$

Na tym wykładzie skupimy się jedynie na tych aspektach wprowadzonych wyżej pojęć, które dotyczą liczb naturalnych. Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.6

Niech a, b będą liczbami naturalnymi, przy czym dla pewnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_n$ mamy:

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}, \quad b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n},$$

gdzie a_i oraz b_j są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wówczas:

$$\mathrm{NWD}(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(a_n, b_n)},$$
$$\mathrm{NWW}(a, b) = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(a_n, b_n)}.$$

Korzystając z definicji można zauważyć, że pojęcia NWD oraz NWW rozszerzyć można na dowolne układy liczb całkowitych. Dzieje się to w szczególności w związku z następującą ważną definicją.

Definicja 5.4

Liczby naturalne $a_1, \ldots, a_n > 0$ nazywamy WZGLĘDNIE PIERWSZYMI, gdy $\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

W szczególności, aby liczby $a_1, \ldots, a_n$ były względnie pierwsze potrzeba i wystarcza, aby nie miały one żadnego wspólnego dzielnika pierwszego. Pojęcie względnej pierwszości jest fundamentalne dla wielu zagadnień teoretycznych. Podstawowa jest, dla przykładu, następująca obserwacja.

Obserwacja 5.3

Jeżeli liczby naturalne a, b są względnie pierwsze oraz ich iloczyn ab jest k-tą potęgą niezerowej liczby całkowitej, dla pewnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$, to każda z liczb a, b jest k-tą potęgą liczby naturalnej, tj. istnieją $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a = n^k, \quad b = m^k.$$

Zadanie 55 (VI OMG)**.** *Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b takie, że*

$$a^2 - b^3 = 4.$$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że takie liczby a oraz b istnieją. Wówczas nietrudno widzieć, że $a \geqslant 3$ oraz :

$$b^3 = a^2 - 4 = (a-2)(a+2).$$

Liczby $a - 2$ oraz $a + 2$ są względnie pierwsze, co Czytelnik zechce uzasadnić. Wynika stąd, na mocy Obserwacji wyżej, że liczby $a - 2$ oraz $a + 2$ są sześcianami liczb naturalnych, czyli istnieją $m, n \in \mathbb{N}$, że:

$$a - 2 = m^2 \quad \text{oraz} \quad a + 2 = n^2.$$

Mamy też $m < n$ oraz liczby m, n są nieparzyste. Mamy zatem:

$$n^3 - m^3 = (n-m)(n^2 + mn + n^2) = a + 2 - (a-2) = 4.$$

Jednak liczby m, n są nieparzyste i dodatnie, więc $n - m \geqslant 2$ oraz

$$n^2 + mn + n^2 \geqslant 9 + 3 + 1 \geqslant 13.$$

A zatem iloczyn tych liczb nie może wynosić 4. ■

5.4 Wykładnik p-adyczny

Wygodną metodą patrzenia na teorię podzielności jest wprowadzenie (pozaszkolnego) pojęcia wykładnika p-adycznego. Pozwala ono na przeformułowanie faktów dotyczących podzielności na język algebraiczny (podobne „algebraizacje" zobaczymy wielokrotnie, np. w teorii kongruencji czy trygonometrii).

Definicja 5.5: Wykładnik p-adyczny

Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita dodatnia n. Wykładnikiem p-adycznym liczby n nazywamy taką liczbę całkowitą nieujemną k, że p^k jest dzielnikiem n oraz p^{k+1} nie jest dzielnikiem n. Piszemy wówczas

$$v_p(n) = k.$$

A więc dla przykładu $v_3(24) = 1, \quad v_7(30) = 0, \quad v_5(500) = 3.$

Obserwacja 5.4

Niech x, y będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Następujące warunki są równoważne.

- $x \mid y$,
- dla każdej liczby pierwszej p zachodzi nierówność $v_p(x) \leqslant v_p(y)$

W szczególności $x = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_p(x) = v_p(y)$, dla każdej liczby pierwszej p.

Odnotujmy najpierw kilka bardzo prostych własności, wynikających bezpośrednio z twierdzenia o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

Obserwacja 5.5

Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś a, b niech będą liczbami całkowitymi. Wówczas:

- $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ oraz $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$,
- $v_p(a^n) = nv_p(a)$,
- $v_p(\mathrm{NWD}(a,b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ oraz $v_p(\mathrm{NWW}(a,b)) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$,
- $v_p(a \pm b) \geqslant \min\{v_p(a), v_p(b)\}$. Gdy $v_p(a) \neq v_p(b)$, wówczas mamy równość.

Przykładowe proste zastosowanie powyższych faktów.

Zadanie 56. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że równanie $x^2 - py^2 = 0$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.*

Rozwiązanie. Aby zachodziła równość $x^2 = py^2$ konieczne jest, aby $v_p(x^2) = v_p(py^2)$. Jedna strona tej równości jest liczbą parzystą $2v_p(x)$, druga zaś – liczbą nieparzystą $2v_p(y) + 1$, co jest niemożliwe. ■

Wniosek 5.7

Dla każdej liczby pierwszej p liczba $\sqrt{p}$ jest niewymierna.

Rozważny też drugie zagadnienie.

Zadanie 57. *Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich zachodzi równość* $\mathrm{NWD}(a,b) \cdot \mathrm{NWW}(a,b) = a \cdot b$.

Rozwiązanie. Policzmy wartość wyrażenia $v_p(\mathrm{NWD}(a,b) \cdot \mathrm{NWW}(a,b)) - v_p(ab)$. Zgodnie z własnościami podanymi wyżej wyrażenie to jest równe $\min\{v_p(a), v_p(b)\} + \max\{v_p(a), v_p(b)\} - v_p(a) - v_p(b)$. Jest jasne, że uzyskane wyrażenie jest zawsze równe 0. ■

Obserwacja 5.6: Formuła Legendre'a

Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną oraz p – liczbą pierwszą. Wówczas:

$$v_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots,$$

gdzie $[x]$ jest najmniejszą liczbą całkowitą nie większą niż x.

Zobaczmy krótki szkic dowodu. Mamy

$$v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + \ldots + v_p(n-1) + v_p(n).$$

Jedynie dzielniki liczby p są niezerowymi składnikami tej sumy. Niech r będzie największą liczbą całkowitą dodatnią taką, że $rp \leqslant n$. Wówczas:

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= v_p(p) + v_p(2p) + \ldots + v_p(rp) \\ &= v_p(1) + v_p(2) + \ldots + v_p(r) + r \cdot v_p(p) \\ &= v_p(1) + v_p(2) + \ldots + v_p(r) + r = v_p(r!) + r. \end{aligned}$$

Oczywiście $r = \left[\frac{n}{p}\right]$. Postępując analogicznie jak dla n widzimy, że $v_p(r) = v_p(1) + \ldots + v_p(s) + s$, gdzie

$$s = \left[\frac{r}{p}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right].$$

Wzór powyżej trzeba by oczywiście uzasadnić, podobnie jak wzór

$$\left[\frac{\left[\frac{n}{p^k}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right],$$

dla $k > 1$, co zostawiam jako ćwiczenie. Postępując w ten sposób dalej uzyskujemy kolejne składniki sumy występującej we wzorze Legendre'a. Po pewnej liczbie kroków zostanie nam do obliczenia $v_p(q!)$, gdzie $q < p$, co jest równe 0.

Jeśli komuś powyższy dowód się nie podoba, może się uciec do innego, klasycznego argumentu. Jeśli $k \leqslant n$ oraz $v_p(k) = s$, to owe s kopii liczby p wchodzących do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $k \leqslant n$ wliczamy do sumy $v_p(1) + \ldots + v_p(n)$ poprzez s kroków: raz, gdy liczymy k jako liczbę która spełnia $v_p(k) \geqslant 1$, raz, gdy liczymy k jako liczbę która spełnia $v_p(k) \geqslant 2$, raz, gdy liczymy k jako liczbę która spełnia $v_p(k) \geqslant 3$, ..., wreszcie: raz, gdy liczymy k jako liczbę która spełnia $v_p(k) \geqslant s$.

Typowym (i zapewne jednym z prostszych) zastosowaniem wzoru Legendre'a jest wyznaczanie liczby zer, którą kończy się rozwinięcie dziesiętne liczb typu $n!$, i podobnych.

Na przykład dla 2022! chodzi o przedstawienie jej w postaci $10^x \cdot y$, gdzie y jest liczbą niepodzielną przez 10. Zauważmy, że $x = v_5(2022)$. Istotnie, nietrudno sprawdzić, że

$$v_2(2022!) > v_5(2022!),$$

porównując ze sobą kolejne składniki $[2022/2^k]$ oraz $[2022/5^k]$ sum opisujących te wielkości. A zatem liczba 2022! ma na końcu 503 zera, zgodnie z poniższym rachunkiem.

$$v_5(2022!) = \left[\frac{2022}{5}\right] + \left[\frac{2022}{25}\right] + \left[\frac{2022}{125}\right] + \left[\frac{2022}{625}\right] = 404 + 80 + 16 + 3 = 503.$$

Warto powiedzieć kilka słów o ilorazach silni oraz o tym, że są one niekiedy liczbami całkowitymi.

Obserwacja 5.7: Symbol dwumianowy jest liczbą całkowitą

Dla dowolnych liczb naturalnych n, m następujący iloraz jest liczbą całkowitą:

$$\binom{n+m}{m} := \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$$

Symbol użyty wyżej ma interpretację kombinatoryczną, nad którą się w tym miejscu nie zatrzymujemy. Zobaczymy natomiast, że szereg własności tego symbolu wywieść można z naszych dotychchczasowych obserwacji teorioliczbowych. Zacznijmy od dowodu.

Dowód. Dla dowolnej liczby pierwszej p zachodzi nierówność

$$v_p(n! \cdot m!) = v_p(n!) + v_p(m!) \leqslant v_p((m+n)!).$$

Niech s będzie liczbą naturalną taką, że $p^s \leqslant m + n < p^{s+1}$. Wtedy

$$\begin{array}{ccccccccc} v_p(m!) & \leqslant & \left[\frac{m}{p}\right] & + & \left[\frac{m}{p^2}\right] & + & \ldots & + & \left[\frac{m}{p^s}\right] \\ v_p(n!) & \leqslant & \left[\frac{n}{p}\right] & + & \left[\frac{n}{p^2}\right] & + & \ldots & + & \left[\frac{n}{p^s}\right] \\ v_p((m+n)!) & = & \left[\frac{m+n}{p}\right] & + & \left[\frac{m+n}{p^2}\right] & + & \ldots & + & \left[\frac{m+n}{p^s}\right] \end{array}$$

Pokażemy, że dla dowolnej liczby $1 \leqslant r \leqslant s$ mamy:

$$\left[\frac{m}{p^r}\right] + \left[\frac{n}{p^r}\right] \leqslant \left[\frac{m+n}{p^r}\right]$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy jednak $[x] \leqslant x,$ oraz $[y] \leqslant y$, zatem $[x] + [y] \leqslant x + y$. Skoro jednak liczba $[x] + [y]$ jest całkowita, to $[x] + [y] \leqslant [x + y]$. $\square$

Można podać wiele innych przykładów podobnych podzielności. Do wyjaśnień odsyłam do tekstu prof. Guzickiego (bibliografia). Całkowite są, dla dowolnych m, n naturalnych, na przykład liczby:

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1)!}, \quad \frac{(6n)! \cdot (2n)!}{(4n)! \cdot (3n)! \cdot n!}, \quad \frac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!}.$$

Poszukiwanie dzielników pierwszych symboli dwumianowych miewa bardzo głębokie zastosowania. Pięknym przykładem jest dowód postulatu Bertranda pochodzący od dowód 19-letniego Paula Erdősa z 1932 roku. Pierwszy dowód podał natomiast Czebyszew w roku 1850. Oto ten postulat.

Twierdzenie 5.5: Postulat Bertranda

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje taka liczba pierwsza p, że $n < p < 2n$.

Dowód Erdősa oparty jest na następującej prostej obserwacji.

Obserwacja 5.8: Liczby pierwsze od n do $2n$ są dzielnikami pewnej liczby

Każda liczba pierwsza p spełniająca nierówność $n < p < 2n$ jest dzielnikiem liczby

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Obserwacja ta jest oczywista. Jeśli liczba pierwsza p spełnia nierówność $n < p < 2n$ to jest jednym z czynników licznika powyższego ilorazu. Mianownik jest natomiast iloczynem liczb nie większych niż n, a więc z pewnością p nie jest jego dzielnikiem. A zatem dowód postulatu Bertranda sprowadziliśmy do poszukiwania dzielników pewnego symbolu dwumianowego. Ich wyznaczenie jest pewnym wyzwaniem. Oto kilka prostych uwag.

Wyznaczymy $x_p = v_p\binom{2n}{n}$. Z wzoru Legendre'a jest to suma postaci:

$$\sum_k \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] \right).$$

Dla każdego k mamy:

$$0 \leqslant \left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2.$$

Zatem każdy powyższy składnik równy jest 0 lub 1, zaś x_p szacuje się przez maksymalne k. Zatem otrzymujemy szacowanie

$$p^{x_p} \leqslant 2n.$$

Wniosek 5.8

Niech $x_p = v_p\binom{2n}{n}$. Wówczas:

- $x_p \leqslant 1$, dla $p > \sqrt{2n}$,
- $x_p = 0$, dla p nieparzystych większych od $\frac{2}{3}n$ i nie większych od n.

Dowód. Jeśli $p > \sqrt{2n}$, to $p^2 > 2n$. A zatem w tym przypadku maksymalne k takie, że $p^k \leqslant 2n$ równe jest 1. Stąd $x_p \leqslant 1$, dla $p > \sqrt{2n}$.

Jeśli $p \geqslant 3$ oraz zachodzi warunek $2n < 3p \leqslant 3n$, to w iloczynie $(2n)!$ są tylko dwie wielokrotności p, więc $v_p((2n)!) = 2$, zaś skoro liczba $n!$ ma dokładnie jeden czynnik p (bowiem $\frac{2}{3}n < p < n$), więc $v_p(n! \cdot n!) = 2$. A zatem $x_p = 2 - 2 = 0$, dla p nieparzystych większych od $\frac{2}{3}n$ i nie większych od n. $\square$

Jak zatem oszacować można rozkład $\binom{2n}{n}$ na czynniki pierwsze? Mamy:

$$\binom{2n}{n} \leqslant \prod_{2 \leqslant p_i \leqslant \sqrt{2n}} p_i^{k_i} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leqslant 2n} p,$$

przy czym po prawej stronie mamy:

- iloczyn potęg k_i dzielników pierwszych p_i od 2 do nie dalej niż $\sqrt{2n}$, przy czym zawsze:

$$p_i^{k^i} \leqslant 2n, \text{ bo } k_i = v_{p_i}\binom{2n}{n},$$

- iloczyn tych liczb pierwszych, które są większe niż $\sqrt{2n}$ a nie większe niż $\frac{2}{3}n$, wchodzących do rozkładu $\binom{2n}{n}$ z wykładnikiem równym **co najwyżej** 1,
- iloczyn tych liczb pierwszych, które są większe od n, a mniejsze od $2n$ – takie, o które pyta postulat Bertranda. Jeśli takie p istnieje, to $x_p = 1$.

Do dowodu postulatu Bertranda jest jeszcze wymagane kilka ważnych (i ładnych) kroków. Czytelnika zainteresowanego całością tego rozumowania odsyłam do wykładu prof. Guzickiego (ostatni) lub do mojej prezentacji, pod adresem `https://mimuw.edu.pl/~amecel/popularne/mecel_pierwsze.pdf`.

Możliwa dalsza lektura

1. Bzdęga B.: *Wykładniki p-adyczne*, Kącik Początkującego Olimpijczyka, `www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2020/11/01/2020-11-delta-KPO.pdf`.
2. Guzicki W.: *Algorytmiczna teoria liczb*, Wykład monograficzny na MIM UW, `https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/atl.html`.
3. Guzicki W.: *Silnie i podzielność*, seminarium podczas finału OMG, `http://www.sem.edu.pl/materialy/FinalOMG.pdf`.
4. Jaszuńska J.: *Kwadraty i dzielniki*, Gazetka OMJ Kwadrat (11), `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-11-kolor.pdf`.
5. Męcel A. *Dzielniki małe i duże*, seminarium OMJ, `https://mimuw.edu.pl/~amecel/duzeimale.pdf`.

Zadania – dzielniki i rozkład na czynniki pierwsze

Zadanie 1. *Znajdź wszystkie liczby naturalne podzielne przez* 5 *i mające pięć dzielników dodatnich.*

Zadanie 2. *Wypisano wszystkie dzielniki dodatnie liczby całkowitej* $n \geqslant 1$*, za wyjątkiem liczb* 1 *oraz* n*. Wśród wypisanych liczb największa jest* 45 *razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości* n*.*

Zadanie 3. *Dodatnia liczba całkowita* n *jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że* n *jest liczbą podzielną przez* 6*.*

Zadanie 4. *Czy suma odwrotności* n *parami różnych liczb pierwszych może być liczbą całkowitą?*

Zadanie 5. *Niech* d *będzie dodatnim dzielnikiem liczby całkowitej* $n \geqslant 1$*. Wykaż, że*

$$2\sqrt{n} \leqslant d + \frac{n}{d} \leqslant n + 1.$$

Wykaż, że jeśli s_n *jest średnią arytmetyczną wszystkich dodatnich dzielników liczby* n*, to zachodzą nierówności:*

$$\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Zadanie 6. *Znajdź najwyższą potęgę liczby* 2 *będącą dzielnikiem liczby*

$$L_n = (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot 2n,$$

gdzie n *jest liczbą naturalną.*

Zadanie 7. $(\star)$ *Niech* $n \geqslant 2$ *będzie liczbą całkowitą o dzielnikach* $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$*. Wykaż nierówność*

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k < n^2.$$

Kiedy liczba $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$ *jest dzielnikiem liczby* n^2*?*

Zadanie 8. $(\star)$ *Znajdź wszystkie liczby całkowite* $n \geqslant 2$*, dla których* n *jest dzielnikiem* $(n-1)!$*.*

Zadanie 9. $(\star)$ *Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych* a, b, c *jest równy* 1*. Udowodnij, że jeżeli zachodzi równość*

$$ab = c(b-a),$$

to liczba $b - a$ *jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 10. $(\star)$ *Wykaż, że jeżeli liczby naturalne* a *i* b *spełniają równanie* $a^2 + a = 3b^2$*, to liczba* $a+1$ *jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 11. $(\star)$ *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite* m*,* n*, dla których* $1 + 5 \cdot 2^m = n^2$*.*

Zadanie 12. $(\star)$ *Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych równanie* $4^x + 3^z = z^2$*.*

Zadanie 13. $(\star)$ *Znajdź liczby całkowite* x *oraz* y*, spełniające równanie:*

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Zadanie 14. $(\star\star)$ *Znajdź wszystkie liczby pierwsze* p *o tej własności, że liczba* $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ *jest kwadratem.*

Zadanie 15. $(\star\star)$ *Wyznacz wszystkie liczby pierwsze* p *oraz* q*, takie że* $20p^3 - q^3 = 1$*.*

Zadanie 16. $(\star\star)$ *Dodatnie liczby całkowite spełniają warunek* $n(4n+1) = m(5m+1)$*. Wykaż, że liczba* $n - m$ *jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 17. $(\star\star)$ *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite* n*, takie że liczba* $2^n - 1$ *nie ma żadnego dzielnika pierwszego większego od* 7*.*

Rozdział 6

Kombinacje liczb całkowitych Wokół algorytmu Euklidesa

6.1 Liczby całkowite jako pary

Przejdziemy do rozważań dotyczących liczb całkowitych. W programie szkolnym wprowadzane są one około klasy piątej, w sposób nieformalny, ilustrowany różnymi przykładami. Formalnie rzecz biorąc liczby całkowite definiuje się najczęściej jako klasę równoważności relacji $\sim$ na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definicja 6.1: Liczby całkowite

Określamy w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relację $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Jest to relacja równoważności i klasy $[(a, b)]$ tej relacji nazywamy LICZBAMI CAŁKOWITYMI, ozn. $\mathbb{Z}$. Określamy też, dla każdego $z = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$ element przeciwny $-z = -[(a, b)]$, równy $[(b, a)]$.

Liczby $[(a, b)]$, dla których $a \geqslant b$ nazywamy LICZBAMI CAŁKOWITYMI NIEUJEMNYMI i utożsamiamy z liczbami naturalnymi, tzn. piszemy $[(a, b)] = a - b$, a liczby $[(a, b)]$, dla których $a < b$ nazywamy LICZBAMI CAŁKOWITYMI UJEMNYMI i również utożsamiamy je z liczbami naturalnymi dodatnimi, a zgodnie z konwencją wyżej odróżniamy je od liczb nieujemnych przez dodatnie znaku $-$.

O relacji wyżej można myśleć na wiele sposobów, np. tak, że liczba reprezentująca daną klasę [(a,b)] jest rozwiązaniem równania $x + b = a$. Intuicyjnie więc dana klasa reprezentuje liczbę $a - b$. Zatem $[(2, 0)] = [(4, 2)]$ utożsamiamy z liczbą 2, a $[(0, 2)] = [(1, 3)]$ z liczbą -2. W zbiorze tym wprowadzić możemy działania dodawania i mnożenia, a także relację liniowego porządku:

Definicja 6.2: Dodawanie i mnożenie liczb całkowitych

W zbiorze $\mathbb{Z}$ wprowadzamy działania dwuargumentowe dodawania i mnożenia:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)], \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)].$$

W zbiorze liczb całkowitych wprowadzamy, w oparciu o porządek w liczbach naturalnych, naturalny liniowy porządek, zgodny z porządkiem $\mathbb{N}$ traktowanego jako podzbiór $\mathbb{Z}$.

Definicja 6.3: Porządek w zbiorze liczb całkowitych

Określamy relację $\leqslant$ w zbiorze $\mathbb{Z}$, Mówimy, że $[(n, k)] \leqslant [(p, q)]$, gdy $n + q \leqslant p + k$.

Działania te mają własności znane ze szkoły. Ich przegląd, w sformułowaniu abstrakcyjnym, można znaleźć na przykład pod adresem `http://smurf.mimuw.edu.pl/node/616`. Znajdziemy tu między innymi uzasadnienie dobrego określenia tych działań. Są to czynności rutynowe, ale należy dobrze rozumieć ich uzasadnienie. Chodzi o pokazanie np., że jeśli mamy pary $(n, k), (p, q), (m, l), (r, s)$ liczb naturalnych, spełniające $(n, k) \sim (p, q)$ oraz $(m, l) \sim (r, s)$, to

$$[(n, k)] + [(m, l)] = [(p, q)] + [(r, s)].$$

Nie leży to oczywiście w naturze rozważań szkolnych.

Wszystkie te informacje wyglądają bardzo abstrakcyjnie, ale w istocie zawierają jedynie ścisłe ujęcie treści, o których mówimy w szkole, najczęściej interpretując liczby ujemne w języku „długu”. Np. mówiąc o liczbie -2 możemy mówić tak: gdybym miał oddać Kasi 10 złotych mając jedynie 8 złotych w ręku, wtedy brakuje mi 2 złotych i ten brak nazywam liczbą -2, co opisać można równaniem $x + 10 = 8$, z którego bierze się para $(8, 10)$. Zamiast tych liczb można wstawić 9 i 11 złotych, dostając równanie $x + 11 = 9$ i równoważną do $(10, 8)$ parę opisującą liczbę -2, czyli $(11, 9)$.

6.2 Znak liczby całkowitej, a podzielność

Naszym celem jest naszkicowanie teorii podzielności związanej z liczbami całkowitymi. Teoria ta obejmuje szereg narzędzi i obserwacji, począwszy od elementarnych rozszerzeń pojęcia liczby pierwszej i złożonej. W tym celu wprowadzamy pojęcie wartości bezwzględnej (liczby całkowitej).

Definicja 6.4: Wartość bezwzględna i funkcja signum liczby całkowitej

Niech $x \in \mathbb{Z}$. Wówczas określamy WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNĄ $|x|$ liczby x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, jeśli } x \geqslant 0, \\ -x & \text{, jeśli } x < 0. \end{cases}$$

W szczególności, dla $x \neq 0$ istnieje liczba $\operatorname{sgn}(x) \in \{-1, 1\}$, taka że

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot x,$$

nazywana FUNKCJĄ SIGNUM (lac. *znak*) liczby x. Dla $x = 0$ definiujemy $\operatorname{sgn}(x) = 0$.

Łatwo sprawdzić, że znane własności multiplikatywne znaku wyrazić można elegancko w języku funkcji signum, tzn.

$$\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y),$$

dla dowolnych liczb całkowitych x, y. Możemy teraz przenieść pojęcia dotyczące podzielności na język liczb całkowitych.

Definicja 6.5

Niech m, n, d będą liczbami całkowitymi.

- Liczbę n nazywamy DZIELNIKIEM liczby m, jeśli liczba naturalna $|n|$ jest dzielnikiem liczby naturalnej $|m|$.
- Liczbę m nazywamy PIERWSZĄ (odp. ZŁOŻONĄ), jeśli liczba $|m|$ jest pierwsza (odp. złożona).
- Jeśli założymy, że $m, n \neq 0$, to d określamy jako $\mathrm{NWD}(a, b)$, jeśli $|d| = \mathrm{NWD}(|m|, |n|)$. Analogicznie definiujemy $\mathrm{NWW}(m, n)$ oraz pojęcie WZGLĘDNEJ PIERWSZOŚCI liczb całkowitych.

6.3 Iloczyny liczb całkowitych, a równania

Powyższe definicje mają charakter formalny, ale wiąże się z nimi kilka zagadnień o charakterze konkursowym. Opieramy się tu o dwie obserwacje, których tu nie dowodzimy (jedna wynika z definicji mnożenia liczb całkowitych, a druga – z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze).

Obserwacja 6.1

Niech a, b będą liczbami całkowitymi oraz niech p będzie liczbą pierwszą. Wówczas

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ lub } b = 0, \quad ab = p \Rightarrow a, b \in \{\pm 1, \pm p\}.$$

Zobaczmy kilka przykładów[1]

Zadanie 58. *Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniających równanie $xy + 1 = x + y$.*

Rozwiązanie. Przenosząc x oraz y na drugą stronę, uzyskujemy

$$xy - x - y + 1 = 0 \iff (x-1)(y-1) = 0.$$

Widzimy zatem, że $x = 1$ lub $y = 1$. Rozwiązaniami wyjściowego równania są więc wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) postaci $(1, s)$, $(t, 1)$, gdzie s, t są dowolnymi liczbami całkowitymi. ■

Zadanie 59. *Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie $2xy + 3x + y = -1$.*

Rozwiązanie. Problem wymaga nieco więcej pomysłowości. Zauważmy jednak, że po przemnożeniu tego równania przez 2 i po przy odpowiednim rozbiciu liczby -2 na $1 - 3$ i mamy:

$$4xy + 6x + 2y = -2 \iff (2x+1)(2y+3) = 1.$$

A zatem otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 1 \\ 2y + 3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2y + 3 = -1 \end{cases}.$$

A zatem rozwiązania wyjściowego równania to $(x, y) = (0, -1)$ oraz $(x, y) = (-1, -2)$. ■

Zadanie 60. *Rozwiąż równanie*

$$x^2 - xy - 6y^2 = 6$$

w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie. Lewą stronę równania przedstawiamy w postaci iloczynu, wówczas otrzymujemy równanie:

$$(x - 3y)(x + 2y) = 6.$$

Ponieważ $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-1) \cdot (-6) = (-2) \cdot (-3)$. Mamy zatem do rozważenia 8 przypadków (czyli osiem układów równań):

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ x + 2y = -6 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = -6 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = -2 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - 3y = -3 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie w przypadku pierwszym i drugim to $(4, 1)$ oraz $(3, -1)$. W przypadku trzecim i czwartym rozwiązania nie są liczbami całkowitymi. Podobnie dla pozostałych układów, z których otrzymujemy dodatkowe pary $(-4, -1), (-3, 1)$.

■

[1] Na podstawie artykułu *Sztuczka z iloczynem* Michała Kiezy oraz książki *Koło Matematyczne w gimnazjum.*

6.4 Kombinacje liniowe liczb całkowitych

Zadania powyższego typu mogą być oczywiście bardziej skomplikowane, nie tylko rachunkowo. Aby to zobaczyć przejdziemy teraz do zagadnień związanych z kombinacjami liniowymi liczb całkowitych. Motywacją jest następujące zadanie, jeden z motywów filmów hollywoodzkich.

Zadanie 61. *Dany jest pełen zbiornik mleka o dużej objętości. Jaś jest w posiadaniu dwóch pojemników: jeden ma objętość 5 litrów, a drugi 9 litrów. Jaś może wykonywać następujące operacje:*

- *nabierać mleka ze zbiornika do każdego z pojemników,*
- *odlewać mleko z pojemników z powrotem do zbiornika,*
- *przelewać mleko pomiędzy pojemnikami.*

Czy przy pomocy tych operacji Jaś jest w stanie odmierzyć 2 litry mleka (pojemniki nie mają podziałki)?

Nietrudno przekonać się, że Jaś jest w stanie odliczyć 2 litry mleka. Oto przykładowa procedura:

$$(0,0) \to (5,0) \to (0,5) \to (5,5) \to (1,9) \to (1,0) \to (0,1) \to (5,1) \to (0,6) \to (5,6) \to (2,9),$$

gdzie (x, y) oznacza liczbę litrów w zbiornikach w kolejnych krokach: x to liczba litrów mleka w pojemniku 5-litrowym, zaś y to liczba litrów mleka w zbiorniku 9-litrowym.

W rozwiązaniu tym czterokrotnie napełniliśmy zbiornik 5-litrowy oraz dwukrotnie opróżniliśmy pojemnik 9-litrowy. Poniższe równanie wyjaśnia zatem całą sytuację:

$$2 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 9.$$

W jaki sposób rozwiązywać takie zadania? W istocie rozwiązujemy tu problem, który przekracza program szkolny. Rozwiązujemy bowiem równanie z dwoma niewiadomymi całkowitymi x, y postaci:

$$2 = 5x + 9y.$$

Liczby x, y spełniające powyższe równanie to oczywiście liczby różnych znaków. To równanie nazywane jest liniowym równaniem diofantycznym. Oczywiście znajdowanie różnych par (x, y) spełniających to równanie można interpretować w języku zadania postawionego wyżej. Równania tego typu mają (dwa dwóch i więcej niewiadomych) ciekawą cechę – albo nie mają rozwiązania, albo mają nieskończenie wiele rozwiązań. Pierwszą sytuację łatwo zobaczyć próbując uzyskać 2 litry mleka mając do dyspozycji zbiorniki 4-litrowe i 8-litrowe. Problem ten sprowadza się do znalezienia takich liczb całkowitych x, y, że

$$4x + 8y = 2.$$

Widzimy jednak, że równania napisanego wyżej nie da się rozwiązać. Istotnie, prawa strona tego równania jest, niezależnie od x oraz y liczbą podzielną przez 4. Natomiast 2 nie jest podzielna przez 4.

Definicja 6.6: Kombinacja liniowa liczb całkowitych

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami całkowitymi. Dowolną liczbę postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami całkowitymi nazywamy KOMBINACJĄ LINIOWĄ liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

A zatem, patrząc na przykłady wcześniej:

- 2 jest kombinacją liniową liczb 5 oraz 9
- 2 nie jest kombinacją liniową liczb 4 oraz 8

Czytelnik zaznajomiony z algebrą akademicką rozpozna w zbiorze kombinacji liniowych ideał w pierścieniu $\mathbb{Z}$ generowany przez liczby $a_1, \ldots, a_n$. Może się komuś nie podobać nazewnictwo z algebry liniowej, ale jeśli ktoś potraktuje liczby całkowite jako $\mathbb{Z}$-moduł, to już nie jest to tak dużym problemem.

Obserwacja 6.2

Niech a, b będą liczbami całkowitymi.

- Jeśli liczba d jest dzielnikiem zarówno liczby a, jak i liczby b, to jest również dzielnikiem dowolnej kombinacji liniowej liczb a oraz b.
- Liczba $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem **każdej** liniowej kombinacji liczb a oraz b.

Dowody obydwu tych obserwacji są niemal oczywiste, jeśli umiemy posługiwać się algebraiczną notacją związaną z podzielnością. Jeśli, zgodnie z tezą pierwszej obserwacji, liczba d jest dzielnikiem zarówno a, jak i b, to istnieją liczby całkowite a' oraz b' takie, że $a = d \cdot a'$ oraz $b = d \cdot b'$. W szczególności biorąc dowolną kombinację liniową $ax + by$ liczb a, b mamy:

$$ax + by = (da')x + (db'y) = d(a'x) + d(b'y) = d(a'x + b'y).$$

A zatem d jest dzielnikiem $ax + by$. Skoro każdy wspólny dzielnik liczb a, b jest dzielnikiem każdej kombinacji liniowej tych liczb, to także $\mathrm{NWD}(a, b)$ ma tę własność.

Powyższe obserwacje są niemal oczywiste, a mają bardzo eleganckie skutki. Oto przykłady zadań z konkursów, które można stosunkowo łatwo rozwiązać za pomocą tej obserwacji.

Zadanie 62. *Suma liczba całkowitych a, b jest podzielna przez 3, zaś różnica $a - b$ jest podzielna przez 4. Pokazać, że liczba $13a + b$ jest podzielna przez 6.*

Zauważmy najpierw, że liczba $a + b = (a - b) + 2b$ jest parzysta, a zatem liczba $a + b$ jest podzielna przez 2 i przez 3, czyli jest podzielna przez 6. A zatem liczba $13a + b = 12a + (a + b)$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 63. *Udowodnij, że poniższe ułamki są nieskracalne dla każdego n naturalnego.*

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}.$$

Oto rozwiązanie. Dla każdego n naturalnego rozważmy następującą kombinację liniową:

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1.$$

Z pierwszej równości wynika, że pewna kombinacja liniowa liczb $14n + 3$ oraz $21n + 4$, niezależnie od n, równa jest 1. Zgodnie jednak z obserwacją drugą, liczba $\mathrm{NWD}(14n + 3, 21n + 4)$ jest dzielnikiem każdej kombinacji liniowej tych liczb. W szczególności $\mathrm{NWD}(14n + 3, 21n + 4)$ jest dzielnikiem liczby 1, czyli samo wynosi 1. To oznacza, że ułamek $(21n + 4)/(14n + 3)$ jest zawsze nieskracalny.

Podstawowym twierdzeniem jest następujący rezultat.

Twierdzenie 6.1: Lemat Bezout

Dla każdych liczb całkowitych niezerowych a, b istnieją liczby całkowite x, y takie, że

$$ax + by = \mathrm{NWD}(a, b).$$

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy liczby a, b są dodatnie, dla większej czytelności argumentów. Rozważmy zbiór L wszystkich kombinacji liniowych $ax + by$, gdzie x, y są liczbami całkowitymi oraz $ax + by > 0$. Oczywiście a, b są dodatnie, więc ten zbiór jest niepusty, zawiera choćby $a + b$. Zgodnie z zasadą minimum istnieje zatem **najmniejsza dodatnia kombinacja liniowa** liczb a, b. Nazwijmy ten element jako d. Twierdzimy, że $d = \mathrm{NWD}(a, b)$.

Skoro liczba d jest kombinacją liniową liczb a, b, to istnieją liczby całkowite x, y, że: $d = ax + by$. Wiemy, że $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem każdej kombinacji liniowej liczb a, b. A zatem $NWD(a, b)$ jest również dzielnikiem d. Dzielnik jest nie większy niż liczba dodatnia, którą dzielimy, a zatem $\mathrm{NWD}(a, b) \leqslant d$. Jeżeli pokażemy, że d jest zarówno dzielnikiem a, jak i b, to dowód będzie zakończony. Wykorzystamy założenie, że d jest najmniejszym elementem zbioru L.

Załóżmy, wbrew temu co oczekujemy, że d nie jest dzielnikiem a. Zatem na mocy twierdzenia o dzieleniu z resztą istnieje liczba $0 < r < d$ oraz $k \geqslant 1$ taka, że: $a = kd + r$. To oznacza, że $r = a - kd$, co jest niemożliwe, bo przecież $0 < r = a - kd = a - k(ax + by) = a(1 - lkx) - bky$, jest również elementem zbioru L, i to mniejszym niż d, sprzeczność. A zatem d jest dzielnikiem a. Analogicznie pokazujemy, że d jest dzielnikiem b. A zatem d rzeczywiście jest wspólnym dzielnikiem liczb a oraz b, co oznacza, że $d \leqslant NWD(a, b)$. □

Odnotujmy dwa ważne wnioski. Pierwszemu, zwanego przez W. Sierpińskiego w Teorii Liczb „zasadniczym twierdzeniem arytmetyki”, rrzypisuje się czasem nazwisko Gaussa, choć pochodzi z *Elementów* Euklidesa.

Wniosek 6.1: Zasadnicze twierdzenie arytmetyki, Euklides

Załóżmy, że dane są niezerowe liczby całkowite p, q, r, przy czym $p \neq 0$ oraz $\mathrm{NWD}(p, r) = 1$. Wówczas zachodzi implikacja: $p \,|\, qr \Longrightarrow p \,|\, q$.

Dowód. Istnieją liczby całkowite x, y takie, że $xp + yr = 1$. Mnożąc przez q dostajemy $xpq + yrq = q$. Obydwa składniki po lewej są podzielne przez p, co oznacza, że q również jest podzielne przez p. □

Wniosek 6.2: Charakteryzacja liczb pierwszych wśród liczb całkowitych

Liczba całkowita p jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych niezerowych liczb całkowitych a, b z podzielności $p \,|\, ab$ wynika, że $p \,|\, a$ lub $p \,|\, b$.

Dowód. Załóżmy, że p nie jest dzielnikiem a. Wówczas $\mathrm{NWD}(a, p) = 1$. A zatem korzystając z poprzedniego wniosku dostajemy $p \,|\, b$. □

Z punktu widzenia algebry abstrakcyjnej pokazaliśmy, że dowolny ideał w $\mathbb{Z}$ zawierający elementy niezerowe a, b, zawiera również element $NWD(a, b)$. Analog lematu Bezout sformułować można dla dowolnej podgrupy addytywnej $\mathbb{Z}$ generowanej przez skończony lub nieskończony zbiór elementów pokazując, że $\mathbb{Z}$ jest dziedziną ideałów głównych (dowód jest dokładnie taki sam: weź najmniejszy dodatni element...).

A zatem liczby całkowite a, b są względnie pierwsze, jeśli istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = 1$.

6.5 Algorytm Euklidesa

Jednym z kluczowych narzędzi algebraicznych, nie tylko w teorii liczb całkowitych, jest tak zwany algorytm Euklidesa. Odkrycie tego algorytmu zawdzięczamy prawdopodobnie Teajtetosowi (-410; -368). Podstawą jest twierdzenie o dzieleniu z resztą i następująca obserwacja.

Obserwacja 6.3

Niech a, b będą niezerowymi liczbami całkowitymi i niech $r > 0$ będzie resztą z dzielenia a przez b. Wówczas:

$$\mathrm{NWD}(a, b) = NWD(b, r).$$

Dowód. Liczba r jest kombinacją liniową liczb a, b, więc $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem b oraz r, czyli też $\mathrm{NWD}(b, r)$. Z drugiej strony a jest kombinacją liniową liczb b, r, więc $\mathrm{NWD}(b, r)$ jest dzielnikiem $\mathrm{NWD}(a, b)$. Teza wynika stąd, że przyjmujemy NWD niezerowych liczb całkowitych za dodatnie. □

Uczestnikom wykładów z algebry warto przypomnieć o tym, że NWD dwóch elementów dziedziny całkowitości definiowane jest z dokładnością do relacji stowarzyszenia, to znaczy – NWD jest zdefiniowane z dokładnością do elementu odwracalnego pierścienia. Dla przykładu, w pierścieniu liczb całkowitych Gaussa NWD liczb $8+i$ oraz $4-2i$ równy jest, z dokładnością do mnożenia przez jedną z liczb, $1, i, -1, -i$ liczbie $2-i$ (czyli jest też równy $-1-2i$ oraz $-1-2i$).

Obserwacja 6.4

Niech a, b będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciągi liczb całkowitych $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ oraz $r_!, r_2, r_3, \ldots$ spełniający warunki:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < b \\ b &= r_1 \cdot q_1 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3, \quad 0 \leqslant r_3 < r_2 \\ r_2 &= r_3 \cdot q_3 + r_4, \quad 0 \leqslant r_4 < r_3, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Niech n będzie taką liczbą, że $r_n \neq 0$ oraz $r_{n+1} = 0$. Wówczas $\mathrm{NWD}(a, b) = r_n$.

Dowód. Teza wynika natychmiast z poprzedniej obserwacji. Mamy:

$$\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r_1) = \mathrm{NWD}(r_1, r_2) = \ldots = \mathrm{NWD}(r_{n-1}, r_n).$$

Liczba $r_n \neq 0$ jest dzielnikiem r_{n-1} (bo $r_{n+1} = 0$), czyli oczywiście $\mathrm{NWD}(r_{n-1}, r_n) = r_n$. □

Przykład zastosowania:

$$\mathrm{NWD}(391, 323) = \mathrm{NWD}(323, 68) = \mathrm{NWD}(68, 51) = \mathrm{NWD}(51, 17) = 17.$$

Mamy bowiem $391 = 1 \cdot 323 + 68$, $323 = 4 \cdot 68 + 51$, $68 = 1 \cdot 51 + 17$ i wreszcie $51 = 4 \cdot 17$.

Warto zauważyć, że prawdziwość algorytmu Euklidesa daje nam możliwość przedstawiania $NWD(a, b)$ jako kombinacji liniowej dodatnich liczb a, b, a więc stanowi realizację lematu Bezout. Rzeczywiście, jeśli $x = qy + r$, dla pewnych liczb całkowitych x, y, q, r, to r jest kombinacją liniową liczb x, y. A zatem r_1 jest kombinacją liniową a, b, dalej r_2 jest kombinacją liniową a, r_1, czyli w istocie jest kombinacją liniową liczb a oraz kombinacji liniowej a oraz b. A zatem r_2 również jest kombinacją liniową a, b, itd.

Przykład. Przedstawimy w postaci kombinacji liniowej liczb 391 oraz 323 liczbę 17.

$$17 = 68 - 1 \cdot 51 = 68 - (323 - 4 \cdot 68) = -323 + 5 \cdot 68 = -323 + 5 \cdot (391 - 323) = 5 \cdot 391 + (-6) \cdot 323.$$

Zobaczmy dwa przykłady mniej trywialnego stosowania algorytmu Euklidesa. Więcej zastosowań około-konkursowych znaleźć można w tekstach W. Pompe oraz J. Stevensa, wymienionych pod koniec.

Zadanie 64. *Rozważmy liczby $a_n = 100+n^2$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dla każdego n, niech $d_n = \mathrm{NWD}(a_n, a_{n+1})$, Znajdź największą możliwą wartość d_n.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że d_n musi być dzielnikiem różnicy liczb a_{n+1} oraz a_n, czyli:

$$100 + (n+1)^2 - (100 + n^2) = 2n + 1.$$

A zatem $d_n = (n^2 + 100, 2n + 1)$. Skoro $2n + 1$ jest zawsze nieparzysta, to przemnożenie $n^2 + 100$ przez 4 nie zmienia d_n i mamy:

$$d_n = \mathrm{NWD}(4n^2 + 400, 2n + 1) = \mathrm{NWD}(4n^2 + 400 - (2n+1)(2n-1), 2n + 1) = \mathrm{NWD}(401, 2n + 1).$$

A zatem zmaksymalizowanie d_n jest możliwe dla $n = 200$. Największa możliwa wartość d_n to 401. ■

Zadanie 65. *Niech* $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ *oraz* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ *będzie ciągiem Fibonacciego. Wówczas* $NWD(f_{n+2}, f_{n+1}) = 1$ *i algorytm Euklidesa wymaga dokładnie* n *działań. Co więcej, jeśli* $a > b > 0$ *są całkowite i algorytm Euklidesa wymaga* n *dzieleń do obliczenia* $\mathrm{NWD}(a, b)$, *to* $a \geqslant f_{n+1}$ *oraz* $b \geqslant f_n$.

Rozwiązanie. Pierwszy krok jest jasny

$$\mathrm{NWD}(f_{n+2}, f_{n+1}) = \mathrm{NWD}(f_{n+1} + f_n, f_{n+1}) = \mathrm{NWD}(f_{n+1}, f_n).$$

Powyższe działanie wymagało jednego dzielenia. Wiedząc dodatkowo, że $\mathrm{NWD}(f_3, f_2) = f_1$ wymaga jednego dzielenia dostajemy tezę pierwszej części choćby przez indukcję. Weźmy teraz $a = r_0$ oraz $b = r_1$, Mamy wtedy $r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$, dla pewnego $0 < r_2 < r_1$ i tak dalej aż do $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$, dla pewnego $0 < r_n < r_{n-1}$, i wreszcie w n-tym kroku: $r_{n-1} = r_n \cdot q_n$. Stąd:

$$r_n \geqslant 1 = f_1, \quad r_{n-1} \geqslant 1 = f_2, \quad r_{n-2} \geqslant r_{n-1} + r_n \geqslant f_1 + f_2 = f_3, \quad \ldots \quad b \geqslant r_1 + r_2 \geqslant f_{n-2} + f_{n-1} = f_n.$$

■

Warto poświęcić kilka chwil obserwacjom dotyczącym liczby kroków potrzebnych do wykonania algorytmu Euklidesa. Zagadnienie to interesowało wielu matematyków. Twierdzenie francuskiego matematyka Gabriela Lame (znanego zapewne bardziej z nieudanej próby dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata). Mówi ono, że aby znaleźć $\mathrm{NWD}(m, n)$ należy wykonać nie więcej niż $5k$ działań, gdzie k jest liczbą cyfr (w zapisie dziesiętnym) mniejszej z liczb m, n. Dowód znaleźć można w skrypcie do wykładu prof. Guzickiego, wymienionym w bibliografii. Przykładem osiągania maksimum tego ograniczenia jest wykonywanie algorytmu Euklidesa w rachunku $\mathrm{NWD}(89, 144)$, które wymaga dokładnie 10 kroków. Zachęcam do sprawdzenia, że liczenie $\mathrm{NWD}(89, 144+89k)$ wymaga dokładnie tej samej liczby kroków. Można pokazać ogólniejszą obserwację. Dla ustalonego $m \geqslant 1$ liczba dzieleń potrzebnych do policzenia $\mathrm{NWD}(m, n)$, dla $n \geqslant m$, tworzy ciąg długości m.

6.6 Krótki przegląd znanych równań diofantycznych

Podsumowaniem naszych rozważań, zawierającym jednocześnie ciekawe zastosowania poznanych dotąd metod, będzie krótki przegląd najbardziej znanych równań diofantycznych, to znaczy takich, dla których szukamy rozwiązań w liczbach całkowitych. Czytelnika zainteresowanego przeglądem metod konkursowych dotyczących takich równań odsyłam do książki *An Introduction to Diophantine Equations.* W polskiej literaturze ukazała się natomiast niedawno monografia prof. Ryszarda Andruszkiewicza.

Wniosek 6.3

Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami całkowitymi. Następujące warunki są równoważne.

(1) Równanie diofantyczne $ax + by = c$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych.

(2) Zachodzi podzielność $\mathrm{NWD}(a, b) \mid c$.

Dowód. Oczywiście (1) implikuje (2), bowiem $\mathrm{NWD}(a, b)$ jest dzielnikiem dowolnej kombinacji liniowej liczby a, b. Z drugiej strony, jeśli $d\,\mathrm{NWD}(a, b) = c$, dla pewnego $d \in \mathbb{Z}$, to wiedząc, że dla pewnych $x', y' \in \mathbb{Z}$ mamy $ax' + by' = \mathrm{NWD}(a, b)$, uzyskujemy ostatecznie $ax'd + by'd = c$. □

Wniosek 6.4

Załóżmy, że para liczb całkowitych (x_0, y_0) jest rozwiązaniem równania $ax + by = c$, przy czym $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Przyjmijmy też $\mathrm{NWD}(a, b) = d$. Wówczas równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami

$$x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot n, \quad y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot n,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą.

Dowód. Niech $a = a_1 d$ i $b = b_1 d$. Mamy $ab_1 = a_1 b_1 d = ba_1$, skąd otrzymujemy:

$$ax + by = ax_0 + ab_1 n + by_0 - a_1 bn = ax_0 + by_0 = c.$$

Zatem para liczb (x, y) jest rozwiązaniem równania. Na odwrót, przypuśćmy, że para liczb (x, y) jest rozwiązaniem równania $ax + by = c$. Wiemy, że także $ax_0 + by_0 = c$, a więc odejmując stronami mamy:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Po podzieleniu przez d otrzymujemy $a_1(x-x_0) = b_1(y_0-y)$. Ponieważ $b_1 \mid a_1(x-x_0)$ oraz $\mathrm{NWD}(a_1, b_1) = 1$, więc $b_1 \mid x - x_0$, skąd otrzymujemy

$$x = x_0 + b_1 n \quad \text{oraz} \quad y = y_0 - a_1 n.$$

□

Przytoczmy dwa przykłady kwadratowych równań diofantycznych, bez szczegółowego ich omawiania.

Obserwacja 6.5: Równanie Pitagorasa

Trójką pitagorejską nazywamy dowolne rozwiązanie (x_0, y_0, z_0) równania Pitagorasa

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

gdzie x_0, y_0, z_0 są liczbami całkowitymi. Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać:

$$x = k(m^2 - n^2), \quad y = 2kmn, \quad z = k(m^2 + n^2),$$

gdzie $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $m > n$ oraz $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$.

Odnotujmy jedno zastosowanie tego wyniku, pochodzące od Fermata, będące rozwiązaniem średniowiecznego problemu congruum dla kwadratów. Problem ten pyta (w pewnym uproszczeniu), jakie wartości może przyjmować liczba całkowita h (congruum) taka, że $h = b^2 - a^2 = c^2 - b^2$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi. Pytanie to postawione zostało podczas turnieju matematycznego w Pizie w 1125 roku. Fibonacci pokazał, że wszystkie congrua są podzielne przez 24. Fermat pokazał natomiast kilka wieków później, że congruum nie może być kwadratem. Fakt ten można wysłowić w następujący sposób. Jeśli zachodzą równości $d^2 = b^2 - a^2 = c^2 - b^2$, to jedna z liczb a, b, c, d jest niewymierna.

Obserwacja 6.6: Równanie Pella

Niech $d > 0$ będzie liczbą całkowitą niebędącą kwadratem liczby całkowitej. Wówczas równanie

$$x^2 - dy^2 = 1$$

posiada, poza rozwiązaniem $(x_0, y_0) = (1, 0)$, rozwiązanie w liczbach całkowitych nieujemnych $(x_1, y_1) = (a, b)$, gdzie $b > 0$ jest minimalne możliwe. Pozostałe rozwiązania równania Pella w liczbach całkowitych nieujemnych mają postać ciągu (x_n, y_n), dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$, gdzie

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^n.$$

Rozwiązanie można też zapisać w postaci układu rekurencji

$$x_{n+1} = ax_n + bdy_n, \quad y_{n+1} = bx_n + ay_n.$$

Równanie Pella to kolejny słynny i zarazem niezwykle ważny przykład równania diofantycznego, rozważany w zasadzie od starożytności. Równanie to sformułował wprost Diofantos (choć pytał o rozwiązania wymierne). Jednym z najprostszych jego zastosowań jest możliwość przybliżania pierwiastków z liczb nieujemnych. Archimedes wiedział z pewnością, że pewne zaobserwowane przez niego przybliżenia liczb niewymiernych są rozwiązaniami równań w liczbach całkowitych. Przede wszystkim chodzi o rozwiązanie (x_4, y_4) równania $x^2 - 2y^2 = 1$, wynoszące $(577, 408)$. Rzeczywiście, mamy:

$$\frac{577}{408} \approx 1,4142156, \quad \sqrt{2} \approx 1,4142135.$$

O rozmaitych zastosowaniach równania Pella (zwanego indyjskim), także w kontekście rekurencji, pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ oraz geometrii algebraicznej, można przeczytać na przykład w książce Adama Neugebauera *Algebra i teoria liczb*, wymienionej w podstawowej literaturze całego wykładu. Równanie Pella ma także mnóstwo elementarnych zastosowań, związanych chociażby z dowodzeniem, że rozmaite układy liczb są kwadratami. Można o tych zadaniach poczytać w tekście prof. Nowickiego. Zobaczmy przykład.

Zadanie 66. *Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek parami różnych liczb naturalnych takich, że wszystkie liczby*

$$xy - 1, \quad yz - 1, \quad zx - 1$$

są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie. Równanie $u^2 - 2v^2 = 1$ ma, jako równanie Pella, nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. Jeśli (u, v) jest dowolnym takim rozwiązaniem, to trójka $(x, y, z) = (1, 2, v^2 + 1)$ posiada rozpatrywaną w tym zadaniu własność. Mamy bowiem: $xy - 1 = 1$, $yz - 1 = 2v^2 + 1 = u^2$, $zx - 1 = v^2$. ∎

6.7 Równanie Pella a ułamki łańcuchowe

W jaki sposób wyznaczyć można owo nietrywialne, tzw. fundamentalne rozwiązanie (a, b) równania Pella? Z pomocą przychodzą, jak się okazuje, rozważania dotyczące ułamków łańcuchowych, pochodzące jeszcze od Eulera. Jest to temat związany również z algorytmem Euklidesa. Poświęcimy mu teraz trochę miejsca.

Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą niecałkowitą. Mamy $x = [x] + \{x\}$, gdzie $[x]$ to największa liczba całkowita nie większa od x (tzw. część całkowita – poświęcimy jej więcej miejsca na innym wykładzie). Wówczas odwrotność liczby $\{x\}$ jest większa od 1. Oznaczając $x_1 = \{x\}^{-1}$ możemy zapisać równość $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$, a całość przepisać w postaci:

$$x = [x] + \{x\} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \{x_1\}}.$$

Jeżeli $\{x_1\} = 0$, to rozwijanie w ułamek łańcuchowy jest zakończone. W przeciwnym przypadku kładąc $x_2 = \{x_1\}^{-1} > 1$ mamy:

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \{x_2\}}}.$$

W przypadku liczb wymiernych procedura ta się kończy. Biorąc liczby całkowite $a > b > 0$ mamy:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}},$$

przy czym liczby całkowite q_i oraz r_i dostajemy w kolejnych krokach algorytmu Euklidesa.

Każdej liczbie wymiernej możemy zatem przypisać jednoznacznie następujący ciąg liczb:

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Gdy opisana na starcie procedura nie kończy się, wówczas potrzebne są analityczne argumenty pokazujące, że ciąg liczb wymiernych $[[x]; [x_1], [x_2], \ldots, [x_n]]$, zwanych n-tymi reduktami liczby x, ma granicę, którą oznaczamy jako $x = [[x]; [x_1], [x_2], \ldots]$ i taki ciąg liczbowy nazywamy ułamkiem ciągłym lub ułamkiem łańcuchowym (stosuje się też ułamki łańcuchowe o licznikach różnych od 1). Zobaczmy przykład rachunku, za pomocą którego wyznaczamy ułamek łańcuchowy odpowiadający $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \underbrace{1}_{=[\sqrt{2}]} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{=\{\sqrt{2}\}} = 1 + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2}+1}_{=\{\sqrt{2}\}^{-1}}} = 1 + \frac{1}{\underbrace{2}_{=[\sqrt{2}+1]} + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{=\{\sqrt{2}+1\}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = \ldots$$

Mamy więc $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$. Uzyskaliśmy przykład okresowego (od pewnego miejsca) rozwinięcia w ułamek łańcuchowy, co zapisujemy jako $\sqrt{2} = [1; (2)]$. Podobnie rozwinięcie $\sqrt{3}$ w nieskończony ułamek łańcuchowy zapisuje się jako $\sqrt{3} = [1; (1, 2)]$, zaś rozwiniecie $\sqrt{5}$ – jako $[2; (4)]$.

Jak się okazuje, rozwiązania równania Pella mają bliski związek z reduktami. Licząc przykładowo kolejne redukty rozwinięcia $\sqrt{2}$ w ułamek łańcuchowy mamy:

$$[1; 2] = \frac{3}{2}, \quad [1; 2, 2] = \frac{7}{5}, \quad [1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}, \quad [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{44}{29}, \quad [1; 2, 2, 2, 2, 2] = \frac{99}{70}.$$

Można sprawdzić, że kolejnymi rozwiązaniami równania Pella $x^2 - 2y^2 = 1$ są pary:

$$(3, 2), \quad (17, 12), \quad (99, 70),$$

a nie są nimi pary $(7, 5), (44, 29)$. Widzimy więc, że w tym przypadku co drugi redukt tworzy kolejne rozwiązanie równania Pella. Tak jest dla każdej niewymierności kwadratowej o okresie długości 1.

Ogólna reguła jest bardziej skomplikowana. Zainteresowanych dokładnym rezultatem wiążącym kolejne rozwiązania równania Pella i kolejne redukty z liczby $\sqrt{D}$ odsyłam do artykułu prof. Sławomira Cynka. Dla przykładu, rozwinięcie $\sqrt{61}$ w ułamek łańcuchowy to:

$$\sqrt{61} = [7; (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)],$$

a fundamentalne rozwiązanie równania Pella $x^2 - 61y^2 = 1$, postaci $(1766319049, 226153980)$ pochodzi dopiero od 21. reduktu. Za pomocą innej metody, zostało ono odkryte przez Bhaskarę (!) w XII wieku[2]

Systematyczną teorię ułamków łańcuchowych rozwinął w połowie XVIII wieku Euler i ją zastosował do m.in. do przybliżenia liczb niewymiernych liczbami wymiernymi. Lagrange pokazał 20 lat później, że redukt ułamka łańcuchowego liczby niewymiernej x jest jej najlepszym wymiernym przybliżeniem, to znaczy – jest to takie przybliżenie wymierne, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik. Innymi słowy, jeśli $\frac{p_n}{q_n}$ jest n-tym reduktem liczby x, to jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ leży pomiędzy $\frac{p_n}{q_n}$ oraz $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, to $q > q_{n+1}$. Lagrange pokazał też, że jeśli liczba ma nieskończone i okresowe (od pewnego miejsca) rozwinięcie w ułamek łańcuchowy, to jest to niewymierność kwadratowa, tzn. liczba postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi (Euler pokazał wynik odwrotny). Szczegóły – w tekście dr. Krycha.

[2] Rozwiązanie za pomocą tzw. metody cyklicznej, `https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_%C4%87akrawala`.

Możliwa dalsza lektura – NWD i algorytm Euklidesa

- M. Kieza, *Sztuczka z Iloczynem*, Gazetka OMJ Kwadrat nr 5, https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-05-nieb.pdf
- M. Kieza, *Najmniejsze rozwiązanie*, Gazetka OMJ Kwadrat nr 21, https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat21.pdf
- A. Męcel, *Największy wspólny dzielnik*, seminarium OMJ, https://mimuw.edu.pl/~amecel/semNWD.pdf
- W. Pompe, *Zmagania z ułamkami*, Kwadrat 14, https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat-14_pant321.pdf
- D. A. Santos, Number Theory for Mathematical Contests, rozdział 5, https://www.fmf.uni-lj.si/~lavric/Santos%20-%20Number%20Theory%20for%20Mathematical%20Contests.pdf

Możliwa dalsza lektura – równania diofantyczne

- T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu: *An Introduction to Diophantine Equations*, Birk 2011, https://www.isinj.com/mt-usamo/ (dużo więcej źródeł)
- R. Andruszkiewicz, *Równania diofantyczne*, Białystok 2021, https://repozytorium.uwb.edu.pl/jspui/bitstream/11320/13244/1/RR_Andruszkiewicz_Rownania_%20Diofantyczne.pdf
- S. Cynk, *Równanie Pella*, http://slawomir-cynk.u.matinf.uj.edu.pl/images/videos/pell.pdf
- W. Guzicki, *Algorytmiczna teoria liczb. Wykład monograficzny*, Wydział MIMUW 2001, https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/atl.html
- M. Krych, *Kilka słów o liczbach niewymiernych*, odczyt dla nauczycieli, https://www.mimuw.edu.pl/~krych/odczyty/17-09-14-niewymi.pdf
- A. Nowicki, *Trójki Pitagorasa*, Tom 3. Podróży po Imperium Liczb pt. Liczby kwadratowe
- A. Nowicki, *Zastosowania równania Pella*, Tom 9 Podróży po Imperium Liczb, https://www-users.mat.umk.pl/~anow/imperium/pel09.pdf
- J. Stevens, *Olympiad Number Theory Through Challenging Problems*, https://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/olympiad-number-theory.pdf

Zadania – Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Zadanie 1. *Pewien wieżowiec ma 100 pięter. W windzie tego wieżowca są jedynie dwa przełączniki: pierwszy pozwalający pojechać do góry o 7 pięter i drugi, pozwalający zjechać o 9 pięter w dół. Przełączników można użyć tylko wtedy, gdy możliwe jest wykonanie danej operacji (tzn. nie można zjechać poniżej poziomu parteru i nie można wjechać powyżej poziomu setnego piętra). Czy możliwy jest dojazd tą windą z parteru na każde piętro?*

Zadanie 2. *Wykaż, że wśród dowolnych dziesięciu kolejnych dodatnich liczb całkowitych istnieje taka, która jest względnie pierwsza z pozostałymi czterema.*

Zadanie 3. *Wykaż, że każda liczba całkowita większa od* 6 *może być zapisana jako suma dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych większych niż 1.*

Zadanie 4. *Wykaż, że każda liczba całkowita większa od* 16 *może być zapisana jako suma trzech względnie pierwszych liczb całkowitych.*

Zadanie 5. *Wykaż, że każda liczba całkowita może być zapisana jako różnica dwóch względnie pierwszych liczb złożonych.*

Zadanie 6. *Liczby całkowite x oraz y są względnie pierwsze. Wykaż, że również liczby y^2 oraz $x+y$ są względnie pierwsze.*

Zadanie 7. *Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie*

$$\frac{5}{x}+\frac{7}{y}=1.$$

Zadanie 8. *Ile jest dodatnich liczb naturalnych większych od 3 i mniejszych od 1000, dla których ułamek*

$$\frac{n^2-9}{n^2-4}$$

jest nieskracalny?

Zadanie 9. *Czy istnieją liczby naturalne, które są rozwiązaniem równania*

$$(x+y)(y+z)(z+x)=340?$$

Zadanie 10. *Wyznacz wszystkie trójkąty prostokątne o bokach mających długości w liczbach naturalnych i których pole jest równe obwodowi.*

Zadanie 11. *Udowodnij, że nie istnieje taka liczba nieparzysta, której sześcian jest liczbą o jeden mniejszą od kwadratu liczby całkowitej.*

Zadanie 12. ($\star$) *Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Wykaż, że równanie*

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n},$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

Zadanie 13. ($\star$) *Wyznacz wszystkie pary a,b dodatnich liczb całkowitych, dla których liczba*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

jest całkowita.

Zadanie 14. ($\star$) *Rozwiąż równanie*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}=1,$$

dla liczb naturalnych x,y,z.

Zadanie 15. ($\star$) *Udowodnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie może być kwadratem.*

Zadanie 16. ($\star$) *Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie*

$$2^x + 1 = 3^y.$$

Zadanie 17. ($\star$) *Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) takich, że*

$$a^2 - 2b^3 = 4.$$

Zadanie 18. ($\star$) *Wykaż, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych nie jest sześcianem liczby naturalnej.*

Zadanie 19. ($\star$) *Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których*

$$\frac{a+b}{a-b} = 2^n.$$

Zadanie 20. ($\star$) *Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których ułamek*

$$\frac{n^2+6}{n+1}$$

jest nieskracalny.

Zadanie 21. ($\star$) *Liczby p oraz q są różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.*

Zadanie 22. ($\star$) *Liczby a oraz b są całkowite dodatnie. Wykaż, że jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek*

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

jest nieskracalny.

Zadanie 23. *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite m, n, dla których $1 + 5 \cdot 2^m = n^2$.*

Zadanie 24. ($\star$) *Wykaż, że dla każdego naturalnego $n > 0$ mamy*

$$\mathrm{NWD}(n! + 1, (n+1)! + 1) = 1.$$

Zadanie 25. *Niech $n > 6$ będzie liczbą całkowitą i niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą wszystkimi dodatnimi liczbami całkowitymi mniejszymi od n, które są względnie pierwsze z n — od najmniejszej do największej. Przypuśćmy też, że różnice między kolejnymi tymi liczbami są takie same (i dodatnie), czyli $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$ Wykaż, że n jest albo liczbą pierwszą, albo potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.*

Zadanie 26. ($\star$) *Dla liczb naturalnych $a, m, n > 1$ mamy*

$$\mathrm{NWD}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\mathrm{NWD}(m,n)} - 1.$$

Zadanie 27. ($\star$) *Liczba 361 jest kwadratem (równym 19^2) i po skreśleniu ostatniej cyfry znowu jest kwadratem. Wykaż, że takich liczb jak 361 jest nieskończenie wiele.*

Zadanie 28. ($\star\star$) *Liczby $2n+1$ oraz $3n+1$ są kwadratami, dla pewnego całkowitego dodatniego n. Wykaż, że liczba $5n + 3$ nie jest pierwsza.*

Zadanie 29. ($\star\star$) *Niech $m, n \in \mathbb{Z}$ będą względnie pierwsze. Wyznacz*

$$\mathrm{NWD}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

Zadanie 30. ($\star\star$) *Znajdź wszystkie całkowitoliczbowe rozwiązania równania $x^2 + y^2 = 2z^2$ w liczbach całkowitych (można oprzeć się o rozwiązania równania Pitagorasa).*

Zadanie 31. ($\star\star$) *Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczby $2n+1$ oraz $3n + 1$ są kwadratami liczb naturalnych. Wykaż, że każde takie n jest podzielne przez 40.*

Rozdział 7

Zapis dziesiętny a cechy podzielności Podstawy teorii kongruencji

7.1 Systemy pozycyjne

W szkole poznajemy szereg prostych cech podzielności i niezbędnym elementem warsztatu nauczyciela matematyki jest umiejętność ich elementarnego uzasadnienia. Wypada przy tym także poznać choćby w zarysie ogólny kontekst teorii kongruencji, stanowiącej podstawowy język elementarnej teorii liczb. Zacznijmy od obserwacji, wynikającej bezpośrednio z twierdzenia o dzieleniu z resztą.

Obserwacja 7.1

Niech $b > 1$ będzie liczbą całkowitą zaś $n \geqslant 1$ – liczbą naturalną. Każdą liczbę $N \in \mathbb{N}$ spełniającą warunek $b^{n-1} \leqslant N < b^n$ można zapisać jednoznacznie w postaci:

$$N = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_{n-1} b^{n-1},$$

gdzie:

- $a_{n-1} \neq 0$,
- $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

Piszemy wówczas $N = (a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ i mówimy, że jest to ZAPIS LICZBY N W SYSTEMIE LICZBOWYM (POZYCYJNYM) O BAZIE b. Liczby $a_0, \ldots, a_{n-1}$ nazywamy CYFRAMI N w tym zapisie. Mówimy też, że liczba N jest w tym zapisie n-cyfrowa.

Najbardziej znany jest ZAPIS DZIESIĘTNY liczby N, dla $b = 10$, przy czym stosuje się często notację:

$$(a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10} = \overline{a_{n-1} \ldots a_1 a_0}.$$

Stosuje się także systemy o innych bazach, między innymi:

- SYSTEM DWÓJKOWY (BINARNY) o cyfrach $0, 1$.
- SYSTEM SZESNASTKOWY (HEKSAGONALNY) o cyfrach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.
- SYSTEM SZEŚĆDZIESIĄTKOWY, znany już w starożytnej Mezopotamii, a obecnie stosowany zwłaszcza w zapisie czasu, np. $10:25:56$ oznacza 10 godzin, 25 minut, 56 sekund) oraz miary kątowej, np. $10°25'59''$ oznacza 10 stopni, 25 minut i 59 sekund kątowych (w obydwu przypadkach mniejsze jednostki są już w systemie dziesiętnym. np. milisekunda to $1/1000$ sekundy).

Dowód. Dowód obserwacji jest oczywiście wielokrotną iteracją twierdzenia o dzieleniu z resztą. Jeśli $N \geqslant b^k$, to liczba $a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_{k-1} b^{k-1}$ jest resztą z dzielenia N przez b^n. Reszta wyznaczona jest jednoznacznie, więc i cyfry w zapisie N w systemie o podstawie b są wyznaczone jednoznacznie. □

Przykłady.

$$1010_{10} = 3F2_{16} = 2 + 15 \cdot 16 + 3 \cdot 16^2, \quad 1111011_2 = 123_{10} = 173_8 = 7B_{16}.$$

7.2 Cechy podzielności

W rozważaniu cech podzielności warto odnotować następujący wniosek dotyczący zapisu dziesiętnego.

Wniosek 7.1

Każdą liczbę naturalną N można zapisać w postaci

$$N = k \cdot 10^n + m,$$

gdzie m jest liczbą utworzoną z ostatnich n cyfr liczby N, zaś k jest liczbą naturalną.

Przejdziemy teraz do zastosowania tego faktu, w oparciu o następujący oczywisty (z punktu widzenia wcześniejszych wykładów) wynik.

Obserwacja 7.2

Niech N, k, d, m będą liczbami całkowitymi, przy czym $d \neq 0$ oraz

$$N = k \cdot d + m.$$

Wówczas $d \mid N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \mid m$.

1. **Cechy podzielności przez 2^n oraz 5^n.** Liczba 10^n jest podzielna zarówno przez 2^n jak i 5^n. Na mocy faktów wyżej dostajemy wniosek (bierzemy $d = 10^n$).

   Liczba N dzieli się przez 2^n (odp. przez 5^n) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona[1] z jej ostatniej n-tki cyfr dzieli się przez 2^n (odp. 5^n).

   Szczególne przypadki tego rezultatu to szkolne cechy podzielności przez $2, 4, 8, 5, 25, 125$, itd.

2. **Cechy podzielności przez 3 oraz 9.** Jak wiemy, cecha ta ma następujące sformułowanie.

   Liczba całkowita jest podzielna przez 9 (odp. 3) wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr (w zapisie dziesiętnym) dzieli się przez 9 (odp. 3).

   Zwykle w szkole (zwłaszcza podstawowej) nie przeprowadzamy dowodu tego faktu chcąc uniknąć algebraicznej prezentacji liczby n-cyfrowej N. Rozumowanie przeprowadzone dla liczb o 2, 3 czy 4 cyfrach powinno być dostatecznie przekonujące. Alternatywą jest przeprowadzenie tego dowodu za pomocą zasady minimum. Sprawdzamy najpierw tezę dla liczb jednocyfrowych. Bierzemy najmniejszą liczbę N podzielną przez 3, której suma cyfr nie jest podzielna przez 3. Liczba $N-3$ jest również podzielna przez 3 i jej suma cyfr musi już być (z minimalności N) podzielna przez 3. Nietrudno widzieć, analizując choćby algorytm odejmowania pisemnego, że również suma cyfr liczby N jest podzielna przez 3. Rozumowanie odwrotne jest analogiczne.

   Można sformułować również tzw. blokowe cechy podzielności dla liczb d podzielnych przez liczbę

   $$10^n - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{n}$$

   (liczby naturalne $\geqslant 3$ względnie pierwsze z 10 – widać to modyfikując rozwiązanie Zadania 2). Odsyłam do artykułu *Blokowe cechy podzielności* w czasopiśmie *Delta* autorstwa P. Bielińskiego.

[1] Nie należy mówić/pisać: *gdy jej ostatnie n cyfr* jest podzielne przez 2^n. Więcej tego typu uwag dotyczących poprawności wyprowadzania cech podzielności jest w tekście dr. Jarosława Wróblewskiego z UWr, do którego odsyłam pod koniec.

Zadanie 67. *Udowodnij, że liczba* $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ *nie jest kwadratem liczby naturalnej.*

Rozwiązanie. Suma cyfr podanej liczby to $5\cdot 40 + 1\cdot 40$, czyli 240. Liczba ta jest zatem podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9. Nie może być zatem kwadratem liczby całkowitej. ■

3. **Cecha podzielności przez** 11.

   Nietrudno widzieć, że liczba
$$N = 10a + c = 11a - (a - c)$$
   jest podzielna przez 11 tylko wtedy, gdy liczba $a - c$ dzieli się przez 11, co pozwala w skończonej liczbie kroków stwierdzić podzielność przez 11 i prowadzi do znanej cechy podzielności przez 11.

7.3 Kongruencje

Posługując się technikami związanymi z resztami z dzielenia można sformułować inną niż blokowa „cechę podzielności" przez dowolną liczbę naturalną (większą od 2) względnie pierwszą z 10. Wymaga to powiedzenia o tzw. kongruencjach, które same w sobie są ważnym zagadnieniem teorioliczbowym – przekraczającym wprawdzie program szkolny, ale obecnym (bez stosowania odpowiedniego języka) zarówno w zadaniach szkolnych, jak i konkursowych (na Olimpiadzie w szkole średniej jest to narzędzie podstawowe). Kongruencje pozwalają przełożyć problem podzielności na język algebry.

Resztę z dzielenia liczby całkowitej b przez dodatnią liczbę naturalną k, oznaczamy jako $[b]_k$

Definicja 7.1: Relacja przystawania (kongruencji) liczb całkowitych

Mówimy, że liczby całkowite a, b przystają modulo k, co oznaczamy jako $a \equiv b \pmod{k}$, jeśli a oraz b dają tą samą resztę z dzielenia przez k. Równoważnie – zachodzi warunek $[a]_k = [b]_k$.

Relację przystawania modulo m sformułować można w języku podzielności.

Twierdzenie 7.1

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech a, b będą liczbami całkowitymi. Niech r, s będą odpowiednio resztami z dzielenia liczby a oraz b przez k, tzn. $r = [a]_k, s = [b]_k$. Wówczas:

(i) liczba $a - b$ jest podzielna przez k wtedy i tylko wtedy, gdy reszty r oraz s są równe, tzn.
$$k \mid a - b \iff [a]_k = [b]_k,$$

(ii) reszta z dzielenia liczby $a + b$ przez k jest równa reszcie z dzielenia liczby $r + s$ przez k, tzn.
$$[a + b]_k = [[a]_k + [b_k]]_k,$$

(iii) reszta z dzielenia liczby $a \cdot b$ przez k jest równa reszcie z dzielenia liczby $r \cdot s$ przez k, tzn.
$$[a \cdot b]_k = [[a]_k \cdot [b_k]]_k.$$

Zanim przeprowadzimy dowód, pokażemy dwa elementarne zastosowania faktu powyżej.

Zadanie 68. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr* 0 *i* 1.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że liczba, której wielokrotności szukamy jest równa n. Rozważmy reszty z dzielenia przez n liczb:
$$1, \quad 11, \quad 111, \quad 1111, \quad \ldots, \quad \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ cyfr}}.$$

Zauważmy, że wśród $n+1$ tych liczb pewne dwie muszą dawać tą samą resztę z dzielenia przez n. Które dwie? Nie ma to w istocie znaczenia. Interesuje nas jednak po prostu skorzystanie z punktu (i) twierdzenia wyżej. Mianowicie skoro dwie liczby dają taką samą resztę z dzielenia przez n, to ich różnica jest podzielna przez n. Patrząc na liczby wymienione wyżej widzimy tymczasem, że różnica tych liczb („większa – mniejsza"), jest liczbą, w której rozwinięciu dziesiętnym są jedynie jedynki i zera. ■

Zadanie 69. *Wykaż, że liczba* $73^{33}-33^{73}$ *jest podzielna przez* 10.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $73 \equiv 33 \equiv 3 \pmod{10}$, a zatem korzystając z (ii) mamy:

$$73^{33}-33^{73} \equiv 3^{33}-3^{73} \pmod{10}.$$

Zgodnie z (iii) wiemy, że jeśli $3^n \equiv a \pmod{10}$, to $3^{n+1} \equiv 3a \pmod{10}$. Mamy zatem:

n	0	1	2	3	4	5	6	...	4m	4m+1	4m+2	4m+3	...
$3^n \pmod{10}$	1	3	9	7	1	3	9	...	1	3	9	7	...

Innymi słowy, potęgi naturalne liczby 3 o wykładnikach naturalnych mających te same reszty z dzielenia przez 4 dają takie same reszty z dzielenia przez 10. Obserwację tą można uzasadnić rachunkiem:

$$3^{4m+k} \equiv (3^4)^m \cdot 3^k \equiv 81^m \cdot 3^k \equiv 3^k \pmod{10}.$$

Stąd:

$$73^{33}-33^{73} \equiv 3^{33}-3^{73} \equiv 3^1-3^1 \equiv 0 \pmod{10}.$$

■

Przechodzimy do dowodu twierdzenia. Uzasadnienie (i) wymaga skorzystania z twierdzenia o dzieleniu z resztą. Zacznijmy od założenia, że $r=s$. Wówczas:

$$n-m = xk+r-(yk+r) = (x-y)k,$$

a zatem $n-m$ jest wielokrotnością liczby k.

Odwrotnie, załóżmy, że $a-b$ jest liczbą podzielną przez k. Załóżmy najpierw, że $r \geqslant s$. Wówczas

$$a-b = (x-y)k+r-s,$$

gdzie $k > r-s \geqslant 0$. Liczba $r-s$ jest zatem resztą z dzielenia $a-b$ przez k. Skoro jednak $a-b$ jest liczbą podzielną przez k, mamy $r-s=0$, czyli $r=s$.

Załóżmy teraz, że $r<s$. Skoro $a-b$ jest liczbą podzielną przez k, to liczba $b-a$ jest również podzielna przez k. Dalej rozumujemy analogicznie jak w poprzednim punkcie.

Dowodzimy punkty (ii), (iii). Mamy:

$$\begin{aligned} a+b &= (x+y)k+r+s, \\ a\cdot b &= (xk+r)(yk+s) = (xy+x+y)k+rs. \end{aligned}$$

Widzimy, że $a+b-r-s$ oraz $ab-rs$ są podzielne przez k. Korzystając z (i) dostajemy tezę.

Wniosek 7.2

Warunki $a \equiv b \pmod{k}$ oraz $b \equiv c \pmod{k}$ implikują warunek $a \equiv c \pmod{k}$. Warunki $a \equiv b \pmod{k}$ oraz $c \equiv d \pmod{k}$ implikują

$$a+c \equiv b+d \pmod{k}, \quad ac \equiv bd \pmod{k}.$$

Uzasadnione wyżej własności działania dodawania i mnożenia modulo k mają wiele innych elementarnych zastosowań. Zainteresowany nimi Czytelnik może zajrzeć choćby do tekstu *Kongruencje i ich własności* w broszurze dostępnej na stronie OMJ: `http://www.sem.edu.pl/materialy/seminarium1.pdf`. My też wymienimy poniżej niektóre z nich, zwłaszcza w kontekście teorii podzielności. Zaczniemy od tzw. uogólnionej cechy dzielenia z przez 3 i 9.

Obserwacja 7.3

Każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 3 (odp. przez 9), co jej suma cyfr.

Dowód. Korzystamy z faktu, że dowolna potęga naturalna liczby 10 daje resztę 1 z dzielenia przez 3 oraz przez 9, a także z tego, że każda liczba naturalna N ma zapis w postaci

$$N = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Na mocy powyższych trzech faktów mamy:

$$a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 (\bmod 3)$$

$$a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 (\bmod 9)$$

□

Zadanie 70. *Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Wykaż, że jeśli $S(n) = S(2n)$, to $9 \mid n$.*

Rozwiązanie. Skoro $n \equiv S(n) \pmod 9$, to równość $S(n) = S(2n)$ pociąga za sobą $2n \equiv n \pmod 9$. A zatem $2n - n$ jest liczbą podzielną przez 9. ■

Zadanie 71. *Dla każdej liczby naturalnej możemy przeprowadzić następującą operację: bierzemy sumę wszystkich jej cyfr, następnie sumę wszystkich cyfr tak powstałej liczby itd., dopóki nie otrzymamy liczby jednocyfrowej. Przeprowadźmy tę operację na wszystkich liczbach naturalnych od 1 do 1000. Jakich cyfr otrzymamy więcej – jedynek czy dwójek?*

Rozwiązanie. Dla każdej liczby od 1 do 1000 cyfra otrzymana w wyniku wielokrotnego dodawania cyfr ma taką samą resztę z dzielenia przez 9, co wyjściowa liczba (stosujemy wielokrotnie powyższą obserwację). Każda kolejna liczba całkowita daje kolejną resztę z dzielenia przez 9, a zatem wśród liczb od 1 do 999 jest tyle samo liczb dających resztę 1, co i resztę 2 z dzielenia przez 9. A zatem uwzględniając liczbę $1000 \equiv 1 (\bmod 9)$ widzimy, że więcej otrzymamy jedynek. ■

7.4 Odwrotność modulo liczba pierwsza

Odnotujmy teraz istnienie zależności pomiędzy liczbami względnie pierwszymi, a kongruencjami.

Obserwacja 7.4

Niezerowe liczby całkowite a, b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite p, q, że:

$$ap \equiv 1 \pmod b, \quad bq \equiv 1 \pmod a.$$

Liczby p, q występujące w twierdzeniu wyżej nazywamy czasem odwrotnościami (odpowiednio) liczb a, b modulo (odpowiednio) b, a. Ten fundamentalny fakt można dowodzić w duchu teorii równań, w duchu teorii funkcji oraz w duchu teorii strukturalnej – teorii grup. Odnoszę się tu do wspomnianych we wstępie faz rozwoju algebry. Poniżej pokażemy dowód w języku teorii równań, a dalej – w języku teorii funkcji.

Dowód. Z perspektywy teorii równań, rezultat ten wynika natychmiast z twierdzenia z poprzedniego wykładu mówiącego, że dla dowolnych niezerowych liczb całkowitych a, b istnieją liczby naturalne p, q takie, że $ap + bq = \mathrm{NWD}(a, b)$ oraz z tego, że $\mathrm{NWD}(a, b)$ dzieli dowolną kombinację liniową a, b. A zatem jeśli a, b są względnie pierwsze, to istnieją liczby p, q takie, że $ap + bq = 1$ i liczby te spełniają kongruencje występujące w treści twierdzenia. Odwrotnie zaś, jeśli mamy $ap + bq = 1$, dla pewnych liczb całkowitych a, b, to $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. □

Zobaczmy przykład wyznaczania odwrotności modulo k, dla $k = 14$ oraz względnie pierwszej z nią liczby 9. Z algorytmu Euklidesa wiemy, że

$$14 = 1 \cdot 9 + 5, \quad 9 = 5 + 4, \quad 5 = 4 + 1,$$

czyli

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 - 9 = 2 \cdot (14 - 9) - 9 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9.$$

A zatem dla $x = -3$ mamy $9x = -27 \equiv 1 \pmod{14}$. Dla $y = 2$ mamy też $14y \equiv 1 \pmod 9$.

Gdy mowa o istnieniu odwrotności, przychodzi na myśl dzielenie stronami, co wyrazić można następującym ważnym faktem.

Obserwacja 7.5

Dane są takie liczby całkowite $k \geqslant 2$ oraz $n > 0$, że $NWD(n, k) = 1$ oraz $an \equiv bn \pmod k$. Wówczas zachodzi kongruencja $a \equiv b \pmod k$.

Dowód. Skoro $\mathrm{NWD}(n, k) = 1$, to istnieje $x \neq 0$ takie, że $nx \equiv 1 \pmod k$. Stąd

$$an \equiv bn \pmod k \iff anx \equiv bnx \pmod k \iff a \equiv b \pmod k.$$

□

7.5 Twierdzenie Eulera i małe twierdzenie Fermata

Poważniejsze wyniki teorioliczbowe uzyskujemy w oparciu o teorię układów reszt.

Definicja 7.2: Zredukowany układ reszt

Niech dana będzie liczba naturalna $k \geqslant 2$. Przez $\Phi(k)$ oznaczamy zbiór:

$$\Phi(k) = \{m \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leqslant m \leqslant k, \mathrm{NWD}(k, m) = 1\}$$

liczb naturalnych względnie pierwszych z k i nie większych od k. Moc zbioru $\Phi(k)$ oznaczamy jako $\phi(k)$, Funkcję $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywamy funkcją Eulera (lub tocjentem).

Zbiór liczb całkowitych $\{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\}$, z których każda daje inną resztę z dzielenia przez k i każda jest względnie pierwsza z k nazywamy zredukowanym układem reszt modulo k.

Kluczowa uwaga jest następująca.

Obserwacja 7.6

Jeśli $\{r_1, \ldots, r_s\}$, gdzie $s = \phi(k)$, jest zredukowanym układem reszt modulo k i $a \in \mathbb{Z}$ spełnia $\mathrm{NWD}(a, k) = 1$, to zbiór $\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_s\}$ jest zredukowanym zbiorem reszt modulo k.

Dowód. Gdybyśmy mieli $ar_i \equiv ar_j \pmod k$, to wobec założenia $\mathrm{NWD}(a, k) = 1$ istnieje p takie, że $ap \equiv 1 \pmod k$, a więc $ar_i \equiv ar_j \pmod k \iff apr_i \equiv apr_j \pmod k \iff r_i \equiv r_j \pmod k$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że r_i, r_j dają różne reszty modulo k. □

Fakt ten mówi, że dla dla każdego $x \in \{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\}$ funkcja $f_r : \{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\} \to \{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\}$ określona wzorem $f(x) \equiv rx \pmod k$ jest bijekcją. Daje to „funkcyjny” dowód istnienia odwrotności r modulo k. Istotnie, skoro f_r jest bijekcją, to istnieje x, że $rx \equiv 1 \pmod k$, bo oczywiście $1 \in \{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\}$. Stąd x jest odwrotnością liczby r modulo k. Tu jednak nie mamy narzędzia do wyznaczania odwrotności.

Można zapytać – a co z dowodem „strukturalnym”? Opiera się on o pojęcie grupy i pojęcie rzędu elementu. Dokładniej, okazuje się, że zbiór $\{r_1, \ldots, r_{\phi(k)}\}$ ma strukturę grupy cyklicznej. Oznacza to, nie wchodząc w technikalia, że istnieje taki element r tego zbioru, że każdy inny element x tego zbioru jest jego potęgą modulo k, tzn. istnieje s takie, że $r^s \equiv 1 \pmod k$. O tym jednak szerszej tu nie wspominamy (choć podejście to ma zastosowanie olimpijskie – patrz ostatnie zadanie w zestawie).

Twierdzenie 7.2: Twierdzenie Eulera

Jeśli $\mathrm{NWD}(a,k)=1$, to $a^{\phi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$.

Dowód. Niech $\{r_1,\dots,r_s\}$, gdzie $s=\phi(k)$, będzie zredukowanym układem reszt modulo k. Wiemy, że $\{ar_1,\dots,ar_s\}$ też jest zredukowanym układem reszt modulo k, a więc iloczyny reszt należących do tego zbioru dają tą samą resztą modulo k, tzn.

$$r_1r_2\dots r_s \equiv (ar_1)(ar_2)\dots(ar_s) \pmod{k}.$$

Oznaczając $x=r_1r_2\dots r_s$ dostajemy

$$x \equiv x\cdot a^s \pmod{k}.$$

Wystarczy teraz uprościć przez x, czyli przemnożyć obydwie strony kongruencji przez odwrotność x modulo k. Nietrudno jednak sprawdzić, że iloczyn liczb względnie pierwszych z k sam jest względnie pierwszy z k, co kończy dowód – oznacza bowiem, że x ma odwrotność modulo k. □

Jeśli k jest liczbą pierwszą, to $\phi(k)=k-1$, co daje natychmiastowy wniosek – niezwykle popularne narzędzie konkursowe, możliwe do przejrzystego udowodnienia także bez korzystania z teorii kongruencji (dowodów ma wiele).

Twierdzenie 7.3: Małe Twierdzenie Fermata

Jeśli p jest liczbą pierwszą i p nie jest dzielnikiem liczby całkowitej a, to $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Pokażemy teraz kilka zastosowań powyższych rezultatów.

Zadanie 72. *Wyznacz dwie ostatnie cyfry w zapisie dziesiętnym liczby* 3^{1000}.

Rozwiązanie. Mamy $\phi(100)=\phi(25)\phi(4)=40$. Z twierdzenia Eulera dostajemy zatem $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. Stąd:

$$3^{1000} = (3^{40})^{25} \equiv 1^{25} = 1 \equiv 1 \pmod{100}.$$

A zatem ostatnie dwie cyfry liczby 3^{1000} to $0,1$. ■

Zadanie 73. *Wyznacz resztę z dzielenia liczby* $3^{80}+7^{80}$ *przez* 11.

Rozwiązanie. Oczywiście $\mathrm{NWD}(3,11)=1=\mathrm{NWD}(7,11)$, a zatem z MFT mamy:

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{11}, \quad 7^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

A zatem

$$3^{80}+7^{80} = (3^{10})^8 + (7^{10})^8 \equiv 1^8 + 1^8 \pmod{11}.$$

■

Zadanie 74. *Załóżmy, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby $\underbrace{111\dots1}_{p}$. Udowodnij, że $n=3$.*

Rozwiązanie. Oczywiście p nie jest żadną z liczb $2,5$. Co więcej,

$$\underbrace{999\dots9}_{p} = 10^p - 1$$

Liczba pierwsza p dzieli 10^p-1 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$10^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dodatkowo, skoro $\mathrm{NWD}(p,10)=1$, to z MFT mamy:

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

A zatem mamy:

$$10^p - 10^{p-1} \equiv 10^{p-1}\cdot 9 \equiv 1\cdot 9 \pmod{p}.$$

Skoro liczba ta ma być podzielna przez p, to p jest dzielnikiem liczby 9, czyli $p=3$. ■

Zadanie 75 (OM)**.** *Udowodnij, że nie istnieje taka liczba naturalna $n \geqslant 2$, że $n \mid 2^n - 1$.*

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie, że taka liczba n istnieje. Wówczas niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Mamy wówczas

$$p \mid 2^n - 1.$$

Liczba $2^n - 1$ jest nieparzysta, więc $p \neq 2$. W takim razie mamy $\mathrm{NWD}(p, 2) = 1$ i z MTF dostajemy:

$$p \mid 2^{p-1} - 1.$$

Weźmy teraz najmniejszą taką liczbę $d \geqslant 1$, że $p \mid 2^d - 1$. Wówczas d jest dzielnikiem zarówno liczby n jak i liczby $p - 1$ (jak to uzasadnić?), czyli w szczególności $d \leqslant p - 1$. Z drugiej strony p jest najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n. Skoro jednak d jest mniejsze i również dzieli n, to $d = 1$. To by jednak oznaczało, że $2 \equiv 1 \pmod{p}$, co jest niemożliwe. ∎

I na koniec zdecydowanie trudniejszy przykład z obozu OMJ.

Zadanie 76. *Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wykaż, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba całkowita a_n postaci*

$$a_n = n^1 + (n-1)^2 + (n-2)^3 + \ldots + 3^{n-2} + 2^{n-1} + 1^n$$

daje przy dzieleniu przez p resztę 2023.

Rozwiązanie. Aby wyznaczyć przykładową liczbę n spełniającą warunki zadania rozważymy najpierw liczbę

$$a_{(p-1)p}.$$

Ustalmy niezerową resztę a z dzielenia przez p i rozważmy wszystkie potęgi stanowiące składniki liczby $a_{(p-1)p}$, których podstawy dają resztę a z dzielenia przez p. Suma tych składników, którą oznaczymy przez s_a, to

$$s_a = a^{p(p-1)+1-a} + (a+p)^{p(p-1)+1-p-a} + \ldots + (a + p(p-2))^{p+1-a}.$$

Wszystkie podstawy tych potęg dają resztę a z dzielenia przez p, natomiast kolejne wykładniki dają wszystkie możliwe reszty przy dzieleniu przez $p - 1$, przy czym każdą resztę dają dokładnie raz. Zatem z małego twierdzenia Fermata

$$s_a \equiv 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1} \pmod{p}.$$

Skoro $(1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1})(a - 1) = a^{p-1} - 1$, to ponownie korzystając z małego twierdzenia Fermata, stwierdzamy, że

- $s_a \equiv 0 \pmod{p}$, dla $1 < a \leqslant p - 1$,
- $s_1 = p - 1$.

Zatem

$$a_{p(p-1)} = s_1 + \ldots + s_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wreszcie zauważmy, że jeśli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y, w, z mamy

$$x \equiv y \mod p(p-1) \quad \text{oraz} \quad w \equiv z \mod p(p-1),$$

to

$$x^w \equiv y^z \pmod{p}.$$

Stąd łatwo dostać

$$a_{kp(p-1)} \equiv k \cdot a_{p(p-1)} \equiv -k \pmod{p},$$

czyli szukaną liczbą jest na przykład

$$n = 2023(p-1) \cdot (p-1)p.$$

∎

7.6 Uniwersalna cecha podzielności

Na koniec wrócimy do cech podzielności, wskazując na istnienie procedury, mającej charakter testu podzielności[2] przez dowolną dodatnią liczbę całkowitą k niepodzielną przez 2 i 5. Zacznijmy od zadania.

Zadanie 77. *Po wymazaniu cyfry jedności b pewnej liczby n, a następnie dodaniu do uzyskanej w ten sposób liczby 33-krotności cyfry b uzyskano liczbę 9400. Wykaż, że liczba n jest podzielna przez 47.*

Rozwiązanie. Zapiszmy równanie, które wynika bezpośrednio z warunków zadania:

$$\frac{n-b}{10} + 33b = 9400.$$

A zatem po wymnożeniu przez 10 mamy $n + 329b = 9400$. W szczególności $n = 47(20 - 7b)$. ■

Kluczowe w powyższym zadaniu było znalezienie odwrotności liczby 10 modulo 47, która jest równa 33. Jak się okazuje, jest to demonstracja ogólnej prawidłowości.

Obserwacja 7.7

Rozważmy dodatnią liczbę całkowitą k, niepodzielną przez 2 i przez 5. Niech x będzie taką liczbą całkowitą, że

$$10x \equiv 1 \pmod{k}$$

Niech $n > 9$ będzie liczbą całkowitą oraz niech n' powstaje z n przez usunięcie ostatniej cyfry a_0. Wówczas

$$n \equiv 0 \pmod{k} \iff n' + xa_0 \equiv 0 \pmod{k}.$$

Dowód. Skoro $n = 10n' + a_0$, to

$$n \equiv 0 \pmod{k} \iff 10n' + a_0 \equiv 0 \pmod{k}.$$

Skoro 10 jest odwracalne modulo k, z odwrotnością x, to mamy:

$$10n' + a_0 \equiv 0 \pmod{k} \iff x(10n' + a_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k) \iff n' + xa_0 \equiv 0 \pmod{k}.$$

□

Oto przykładowe zastosowania tej obserwacji do znanych nam cech, przyjmując $x = 1$ dla $k = 3$ oraz $k = 9$ oraz $x = -1$, dla $m = 11$.

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{3} &\iff n' + a_0 \equiv 0 \pmod{3}, \\ n \equiv 0 \pmod{9} &\iff n' + a_0 \equiv 0 \pmod{9}, \\ n \equiv 0 \pmod{11} &\iff n' - a_0 \equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Nietrudno wyprowadzić stąd znane cechy podzielności. Zobaczmy inne przykłady.

Weźmy $k = 13$. Mamy $10 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{13}$, więc

$$n \equiv 0 \pmod{13} \iff n' + 4a_0 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Biorąc na przykład $n = 11382$ i oznaczając przez $\rightsquigarrow$ przejście $n \rightsquigarrow n' + 4a_0$ mamy ciąg:

$$11382 \rightsquigarrow 1138 + 4 \cdot 2 = 1146 \rightsquigarrow 114 + 4 \cdot 6 = 138 \rightsquigarrow 13 + 4 \cdot 8 = 45 \rightsquigarrow 4 + 4 \cdot 5 = 24.$$

Sprawdzenie czy 11382 dzieli się przez 13 sprowadza się zatem do sprawdzenia czy 24 dzieli się przez 13. Stąd oczywiście widać, że ta podzielność nie ma miejsca.

Można dyskutować czy pokazana metoda jest znacznie skuteczniejsza niż zwykłe dzielenie pisemne. Odwrotność 10 modulo k wyznaczamy za pomocą algorytmu Euklidesa szukając liczb x, y takich, że $10x + kq = 1$. Przykłady tego typu przerabialiśmy na poprzednim wykładzie. Ciekawostka jest taka, że w pewnych sytuacjach nasz „test podzielności” może zwiększać liczbę lub prowadzić do pętli, jak w poniższym przykładzie. Jak to wyjaśnić?

$$351 \rightsquigarrow 35 + 4 \cdot 1 = 39 \rightsquigarrow 3 + 4 \cdot 9 = 39 \rightsquigarrow 39 \rightsquigarrow 39 \rightsquigarrow \ldots$$

[2] Na podstawie https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/universaldivtest.pdf.

Możliwa dalsza lektura – zapis dziesiętny i kongruencje

- P. Bieliński, *Blokowe cechy podzielności*, Delta 11/2021,
  `https://www.deltami.edu.pl/2021a/11/2021-11-delta-art-02-bielinski.pdf`
- T. Kobos, *Cyfrowe zadania*, Gazetka OMJ Kwadrat 17,
  `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat17_pantone2727.pdf`
- A. Osękowski, U. Pastwa i J. Jelisiejew, *Kongruencje i ich własności*,
  `https://omj.edu.pl/uploads/attachments/seminaria_1.pdf`
- B. Zawalski, *Teoria cyfr*, Gazetka OMJ Kwadrat 23,
  `https://www.omj.edu.pl/uploads/attachments/kwadrat23.pdf`

Zadania – zapis dziesiętny, kongruencje

Zadanie 1. *Z cyfr* $1, 2, \ldots, 8$ *utworzono dwie liczby* 4*-cyfrowe, wykorzystując każdą cyfrę dokładnie raz. Wykaż, że suma uzyskanych liczb jest podzielna przez 9.*

Zadanie 2. *Czy cyfry* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę podzielną przez 11?*

Zadanie 3. *Znajdź wszystkie liczby pierwsze* p *takie, że* $p^2 + 11$ *ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.*

Zadanie 4. *Udowodnij, że jeśli* a *i* b *są liczbami całkowitymi, to liczba* $N = ab(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ *jest podzielna przez* 30.

Zadanie 5. *Znajdź dwie ostatnie cyfry w zapisie dziesiętnym liczby* $7^{7^{1000}}$.

Zadanie 6. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej* $n \geqslant 0$ *liczba* $3^{4^n} + 23$ *dzieli się przez* 13.

Zadanie 7. ($\star$) *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite* n*, które są równe sumie swoich cyfr powiększonej o iloczyn swoich cyfr.*

Zadanie 8. ($\star$) *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite* n *takie, że liczba* $2^n + 7^n$ *jest kwadratem.*

Zadanie 9. ($\star$) *Wykaż, że nie istnieje liczba naturalna* $n > 1$*, że* 2^n *jest dzielnikiem* $3^n + 1$.

Zadanie 10. ($\star$) *Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze* p*, że* $4p^2 + 1$ *oraz* $6p^2 + 1$ *są również liczbami pierwszymi.*

Zadanie 11. ($\star$) *Dane są dodatnie liczby całkowite* a, b *oraz liczba pierwsza* p*, taka że* $p \mid a^p - b^p$*. Udowodnij, że* $p^2 \mid a^p - b^p$.

Zadanie 12. ($\star$) *Wyznacz wszystkie liczby pierwsze* p*, dla których liczba* $3^p + 4^p$ *jest podzielna przez* 181.

Zadanie 13. ($\star$) *Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych* $n > 0$ *liczba* $1 + 2^{4^n} + 2^{5^n}$ *jest złożona.*

Zadanie 14. ($\star$) *Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite* n*, takie że liczba* $2^n - 1$ *nie ma żadnego dzielnika pierwszego większego od* 7.

Zadanie 15. ($\star$) *Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite* n*, dla których liczba* $4^n - n$ *jest wielokrotnością* 17.

Zadanie 16. ($\star\star$) *Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą* $n > 9$*, której zapis dziesiętny nie zawiera cyfr* 0 *i* 7*, ale zamiana dowolnej cyfry liczby* n *na cyfrę* 7 *daje liczbę podzielną przez* 7.

Zadanie 17. ($\star\star$) *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite* k*, dla których liczba* $3^k + 5^k$ *jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od* 1.

Zadanie 18. ($\star\star$) *Dana jest liczba całkowita* $k \geqslant 2$ *oraz dodatnie liczby całkowite* $n_1, n_2, \ldots, n_k$*, przy czym dla każdej liczby całkowitej od* 1 *do* k *liczba* n_{i+1} *jest dzielnikiem liczby* $2^{n_i} - 1$ *(dla* $i = k$ *przyjmujemy, że* $n_{i+1} = n_1$*). Wykaż, że* $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$.

Rozdział 8

Liczby wymierne i ich przedstawienia

8.1 Definicje szkolne i pozaszkolne

Pojęcie liczby wymiernej pojawia się w szkole podstawowej około klasy siódmej, gdy uczniowie zapoznani są już dostatecznie z działaniami na ułamkach zwykłych i dziesiętnych, a przede wszystkim – z działaniami na liczbach dodatnich i ujemnych. Temu ostatniemu zadaniu wiele miejsca poświęca się w klasie szóstej. W szkole pojawia się oczywiście następująca definicja.

Definicja 8.1: Liczby wymierne (definicja szkolna)

Liczba wymierna to taka liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{l}{m}$, gdzie l, m są liczbami całkowitymi i $m \neq 0$.

Z punktu widzenia podanych przez nas aksjomatów nie jest jasne czym jest dzielenie liczb całkowitych i dlaczego taka operacja jest wykonalna. Innymi słowy: mówiąc, że *liczba wymierna jest liczbą* nie bardzo wiadomo co mamy na myśli. Można to formalne rozstrzygnąć wprowadzając (podobnie jak w przypadku definicji liczb całkowitych) odpowiednią relację równoważności na parach liczb całkowitych.

Definicja 8.2: Liczby wymierne (definicja abstrakcyjna)

Rozważmy pary (m, n), gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$ oraz $n \neq 0$. W zbiorze tym określamy relację równoważności:

$$(m, n) \sim (k, l) \iff ml = kn.$$

Klasy abstrakcji $[(m, n)]$ tej relacji nazywamy liczbami wymiernymi. Ich zbiór oznaczamy przez $\mathbb{Q}$. Definiujemy też:

$$-[(m, n)] = [(-m, n)], \quad [(1, n)]^{-1} = [(n, 1)].$$

Na zbiorze klas abstrakcji $\{[m, n], m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ powyższej relacji wprowadzić można działania arytmetyczne tak, by otrzymać liczby rozważane w szkole. W zbiorze liczb wymiernych wprowadzić możemy również naturalną relację porządku $\geqslant$:

$$[(a, b)] \geqslant [(c, d)] \iff (ad - bc) \cdot bd \geqslant 0, \quad \text{tzn.} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \geqslant 0.$$

W szkole o liczbach wymiernych mówimy w dwóch kontekstach. Pierwszy polega na rozważaniu liczb wymiernych jako liczb zapisywalnych w sposób jednoznaczny w postaci ilorazu liczb całkowitych, a drugi związany z przedstawieniami w postaci ułamków dziesiętnych oraz ułamków prostych.

Obserwacja 8.1: O postaci nieskracalnej

Dla każdej liczby $w \in \mathbb{Q}$ istnieje dokładnie jedna para liczb $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_+$, że $w = \frac{p}{q}$ i $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$.

Dowód. Z definicji liczby wymiernej istnieją liczby całkowite a, b takie, że $w = \frac{a}{b}$. Możemy założyć, że b jest liczbą naturalną, bo $[(a,b)] = [(-a,-b)]$. Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wtedy istnieją liczby całkowite $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$ takie, że $a = pd$ i $b = qd$ oraz $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$. Stąd wynika, że

$$[(a,b)] = [(pd,qd)] = [(p,q)]$$

Załóżmy, że $p, r \in \mathbb{Z}$ oraz $q, s \in \mathbb{N}$ są takie, że $\mathrm{NWD}(p,q) = 1 = \mathrm{NWD}(r,s)$ oraz $[(p,q)] = [(r,s)]$. Wtedy $ps = qr$. Ponieważ $s \mid qr$ i $\mathrm{NWD}(r,s) = 1$, to z uwagi z poprzedniego wykładu wynika, że s jest dzielnikiem q. Tak samo dowodzimy, że $q \leqslant s$. Stąd wynika, że $q = s$. Wobec tego również $p = r$. □

Szereg zadań konkursowych opiera się o obserwację, że działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia przez liczbę niezerową nie wyprowadzają ze zbioru liczb wymiernych. Zobaczmy przykład.

Zadanie 78 (4 OMG, 3 etap). *Dodatnie liczby a, b mają tę własność, że liczba $\dfrac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\dfrac{2a-b}{2a+b}$ jest także wymierna.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że liczba $x = \dfrac{a}{b}$ jest wymierna. Niech $\dfrac{a-b}{a+b} = p$. Wówczas

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = p \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} = p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1+p}{1-p}.$$

Ponieważ liczba p jest wymierna, więc wymierne są także liczby $1+p$ oraz $1-p$. Skąd wniosek, że iloraz liczb $1+p$ oraz $1-p$, czyli liczba x jest także liczbą wymierną. Ponadto:

$$\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{2\frac{a}{b}-1}{2\frac{a}{b}+1} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Ponieważ x jest liczbą wymierną, więc liczby $2x-1$ oraz $2x+1$ są także wymierne. Stąd wynika, że iloraz liczb $2x-1$ oraz $2x+1$ jest liczbą wymierną. □

Wiele zadań konkursowych opiera się o tożsamości algebraiczne związane z ułamkami. Ich przegląd znajdzie Czytelnik w pierwszym tomie *Podróży po Imperium Liczb* prof. Nowickiego (rozdział 1). Jedną z najprostszych takich tożsamości jest następujący fakt.

Obserwacja 8.2

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, takich że $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b \neq d$ oraz $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mamy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Dowód. Rzeczywiście, warunek $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ przekształcamy równoważnie, po przemnożeniu przez $(b-d)b$, do warunku $ab - bc = ab - ad$, równoważnego oczywiście $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. □

Oto przykład zastosowania z obozu naukowego OMJ (2023).

Zadanie 79. *Niech x, y, z będą liczbami rzeczywistymi, takimi że $x \neq 1$, $y \neq 1$ oraz $x \neq y$. Załóżmy również, że dla pewnej liczby rzeczywistej k spełniony jest warunek.*

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{xz - y^2}{1-y} = k.$$

Wykaż, że $k = x + y + z$.

Rozwiązanie. Używając obserwacji wyżej, uzyskujemy:

$$\frac{yz - x^2}{1-x} = \frac{zx - y^2}{1-y} = \frac{(yz - x^2) - (xz - y^2)}{(1-x) - (1-y)} = \frac{z(y-x) + (y+x)(y-x)}{y-x} = x + y + z.$$

■

8.2 Niewymierność pierwiastków

W dyskusjach o wymierności często pojawia się zagadnienie wymierności lub niewymierności pierwiastków z pewnych liczb. Warto uporządkować te sprawy, poruszając przy okazji temat pierwiastków.

Definicja 8.3: Pierwiastek

Niech n będzie liczbą naturalną, zaś $a \geqslant 0$ – liczbą rzeczywistą. Pierwiastkiem (arytmetycznym) stopnia n-tego z liczby a jest taka nieujemna liczba b, dla której zachodzi równość

$$b^n = a.$$

Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, a – dowolną liczbą rzeczywistą i $b^n = a$, to b jest pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby a. Piszemy wtedy $\sqrt[n]{a} = b$.

Powyższa definicja jest o tyle ciekawa (na co rzecz jasna nie zwracamy uwagi w szkole), że wymaga zarówno wykazania poprawności, jak i uzasadnienia istnienia obiektów, które opisuje. Po pierwsze więc trzeba się upewnić czy liczba b jest wyznaczona jednoznacznie przez podane warunki, a po drugie – czy taka liczba w ogóle istnieje. O ile istnienie pierwiastka z liczby rzeczywistej jest zdecydowanie pozaszkolnym twierdzeniem z analizy, o tyle warto wspomnieć o kwestii jednoznaczności.

Jeśli $0 \leqslant c < b$, to dla każdej liczby naturalnej k zachodzi nierówność $c^k < b^k$, co dowodzimy indukcyjnie. Wynika stąd, że dla dowolnego $a \geqslant 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje co najwyżej jedna liczba $b \geqslant 0$, dla której $a = b^n$.

Jeśli n jest liczbą nieparzystą i $a < 0$ i $b^n = a$, to $b < 0$. Jeśli $c < b < 0$, to $-c > -b > 0$, więc dla każdej liczby nieparzystej k zachodzi $-c^k = (-c)^k > (-b)^k = -b^k > 0$, czyli $c^k < b^k < 0$. Wynika stąd, że również w tym przypadku istnieje co najwyżej jeden pierwiastek n-tego stopnia z liczby ujemnej.

W wielu rozumowaniach przydaje się następująca obserwacja mówiąca, że wymierne pierwiastki z liczb całkowitych są w istocie liczbami całkowitymi.

Obserwacja 8.3

Jeśli n jest liczbą naturalną, w – wymierną, a – całkowitą i $w^n = a$, to liczba w jest całkowita.

Dowód. Niech $w = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ oraz $0 \neq q \in \mathbb{N}$ i niech liczby p, q będą względnie pierwsze. Z równości $w^n = a$ wynika, że

$$p^n = aq^n.$$

Dowolna liczba pierwsza r, która dzieli q musi też dzielić q^n, a zatem także p^n, a także p, co jest niemożliwe, bo $\mathrm{NWD}(p, q) = 1$. A zatem $q = 1$. □

Obserwacja 8.4

Jeśli w jest dodatnią liczbą wymierną, to dla każdej liczby naturalnej $k > 1$ liczba $\sqrt[k]{w}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy w jest k-tą potęgą liczby wymiernej.

Rozwiązanie. Dowód jest analogiczny, jak wyżej. Gdybyśmy mieli $\left(\frac{u}{v}\right)^k = \frac{p}{q}$, dla liczb całkowitych u, v, p, q, $u \neq 0$, $v \neq 0$ oraz $\mathrm{NWD}(u, v) = \mathrm{NWD}(p, q) = 1$, wówczas

$$qu^k = pv^k.$$

Skoro $\mathrm{NWD}(u^k, v^k) = 1$, to $q = v^k$ oraz $p = u^k$. Implikacja odwrotna jest oczywista. ■

8.3 Część całkowita i część ułamkowa

O ile temat dowodzenia niewymierności (oraz przestępności) określonych liczb opiera się o liczne techniki teorioliczbowe i analityczne, które pojawiać się będą w różnych momentach wykładu (zwłaszcza gdy mówić będziemy o wielomianach), o tyle ciekawym i szkolnym zagadnieniem jest temat rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych (a czasem też niewymiernych). Podstawowy jest następujący rezultat.

Obserwacja 8.5

Każda liczba wymierna $\frac{p}{q}$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone albo nieskończone okresowe.

„Uzasadnienie” szkolne, o ile można je tak nazwać, odnosi się do algorytmu dzielenia pisemnego dwóch liczb całkowitych (niezerowych). Algorytm w każdym kroku wykonuje pewne dzielenie z resztą przez liczbę q, i jeśli uzyska w wyniku tego dzielenia resztę 0, to się kończy i rozwinięcie dziesiętne jest skończone. Załóżmy więc, że dla pewnej liczby wymiernej algorytm dzielenia z resztą nie kończy się. To znaczy, że w kolejnych krokach uzyskiwane są niezerowe reszty z dzielenia przez liczbę q. Co więcej, znajomość reszty uzyskanej w n-tym kroku algorytmu „determinuje” znajomość kolejnej reszty. Skoro reszt z dzielenia przez q jest skończenie wiele, to w końcu reszty uzyskiwane w kolejnych krokach algorytmu „zapętlą się”.

Formalnie rzecz biorąc na poziomie szkoły podstawowej (ani średniej) uczeń nie ma również narzędzi do pokazania, że liczby rzeczywiste mające rozwinięcie nieskończone okresowe są wymierne. Nie chodzi tylko o to, że uczniowie mogą nie znać ciągów geometrycznych, ale także o wynikający stąd problem nieznajomości formalnej definicji rozwinięcia dziesiętnego, które wymaga uprzednio definicji liczby rzeczywistej. Może jednak argumentować w sposób intuicyjny, podobnie jak zamienia zapis w postaci okresowego ułamka dziesiętnego nieskończonego na zapis w postaci ułamka zwykłego. Nie zna definicji zapisu dziesiętnego, ale zna pewne jego kluczowe własności, zwłaszcza zasadę mówiącą jak zmienia się rozwinięcie dziesiętne przy mnożeniu przez potęgi liczby 10 oraz przy działaniach arytmetycznych na rozwinięciach, które mają identyczne okresy. Dla przykładu, liczba x o zapisie dziesiętnym $1,3(6)$ jest wymierna, bowiem $10x$ można zapisać jako $13,6(6)$, a zatem $9x = 12,3$, czyli $90x = 123$ i mamy $x = \frac{123}{90}$.

Bardziej formalny dowód Obserwacji 8.5 uzyskać można rozważając część całkowitą i część ułamkową liczby rzeczywistej, o których wspomnieliśmy już wcześniej mówiąc o ułamkach łańcuchowych.

Definicja 8.4: Część całkowita (cecha), część ułamkowa (mantysa)

Niech x będzie liczbą rzeczywistą.

- Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x (lub cechą, funkcją podłoga, entier, z fr.) nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od x i oznaczamy symbolem $[x]$ lub $\lfloor x \rfloor$.
- Liczbę $x - [x]$ nazywamy częścią ułamkową lub mantysą liczby x i oznaczamy jako $\{x\}$.

Warto odnotować na początku, że dla liczby wymiernej postaci $\frac{p}{q}$, dla której wykonamy dzielenie z resztą licznika i mianownika $p = kq + r$, gdzie $0 \leqslant r < q$, mamy $[x] = k$ oraz $q\{x\} = r$.

Obserwacja 8.6

Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi oraz n – liczbą naturalną. Wówczas:

(a) Jeśli $x \leqslant y$, to $[x] \leqslant [y]$.

(b) $[x + y] \geqslant [x] + [y]$.

(c) $[x + n] = [x] + n$

(d) $[[x]/n] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

Pokażmy dowód (e). Jeśli oznaczymy $\left[\frac{[x]}{n}\right] = a$, to mamy $a \leqslant \frac{[x]}{n} < a+1 \iff a \cdot n \leqslant [x] < n(a+1)$. Stąd wynika, że również $a \cdot n \leqslant x \leqslant n \cdot (a+1)$, gdyż liczby $a \cdot n$ oraz $n(a+1)$ są całkowite. Zatem

$$a \leqslant \frac{x}{n} < a+1 \quad \Rightarrow \left[\frac{x}{n}\right] = a.$$

Warto wspomnieć, że rozważa się również wyrażenie $\lceil x \rceil$, zwane FUNKCJĄ SUFIT, określoną wzorem

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} [x], & \text{gdy } \{x\} = 0 \\ [x]+1, & \text{gdy } \{x\} \neq 0. \end{cases}.$$

Część całkowita prowadzi do ładnych i nietrudnych zadań związanych z szacowaniem.

Zadanie 80. *Udowodnij, że jeśli n jest dowolną liczbą naturalną, to*

$$\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = a_n$ oraz $\sqrt{4n+2} = b_n$. Zauważmy teraz, że:

$$4n+1 < a_n^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 = b_n^2, \text{ bo } 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1.$$

A zatem $a_n < b_n$, czyli $[a_n] \leqslant [b_n]$. Z drugiej strony $[b_n]^2 < 4n+2$, gdyż liczba $4n+2$ nie jest kwadratem liczby naturalnej (patrz mod 4). Zatem $[b_n] \leqslant \sqrt{4n+1} < a_n$, skąd wynika, że $[b_k] \leqslant [a_n]$. ■

Zadanie 81. *Ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots$ złożony jest z liczb całkowitych dodatnich, które nie są kwadratami. Wykaż, że n-ty wyraz tego ciągu jest równy*

$$n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

ROZWIĄZANIE. Pokażemy, że liczba $n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ leży między dwoma kolejnymi kwadratami. Dokładniej:

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2 < n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] < \left(\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] + 1\right)^2. \qquad (\dagger)$$

Jeśli wykażemy tę nierówność, wówczas wśród liczb

$$1, 2, \ldots, n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

znajdować się będzie dokładnie $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$ kwadratów: $1^2, 2^2, \ldots, \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]^2$. To oczywiście da nam tezę. Dowodzimy ($\dagger$). Zauważmy, że $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \neq \frac{1}{2}$ dla dowolnego n całkowitego dodatniego.

Przypadek 1, gdy $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < \frac{1}{2}$. Wówczas $[\sqrt{n}]^2 \leqslant n < \left([\sqrt{n}] + \frac{1}{2}\right)^2$. Zatem

$$[\sqrt{n}]^2 \leqslant n < [\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] + \frac{1}{4}.$$

Stąd $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = [\sqrt{n}] = k$. A zatem nierówność ($\dagger$) przybiera oczywistą postać

$$k^2 < k^2 + k < n + k < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

Przypadek 2, gdy $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] > \frac{1}{2}$. Wówczas: $\left([\sqrt{n}] + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant n < ([\sqrt{n}] + 1)^2$, czyli

$$[\sqrt{n}]^2 + [\sqrt{n}] + \frac{1}{4} < n < [\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}] + 1.$$

Stąd $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = [\sqrt{n}] + 1 = k+1$. A zatem nierówność ($\dagger$) przybiera oczywistą postać

$$(k+1)^2 = (k^2 + k) + k + 1 < n + k + 1 < (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4.$$

■

8.4 Rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej

Przejdziemy do rozumowania dotyczącego nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego liczby wymiernej x. Wykażemy, że liczba wymierna x o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym ma rozwinięcie okresowe.

Załóżmy, że $x_1 = \{x\}$ jest liczbą wymierną o cyfrach (po przecinku) $c_1, c_2, c_3, \ldots$, czyli $x = [x], c_1c_2c_3\ldots$ Jest jasne, że liczba $10x_1$ ma cyfrę jedności c_1, czyli $c_1 = [10x_1]$. Co więcej, biorąc $x_2 = \{10x_1\}$ widzimy, że $c_2 = [10x_2]$. Kładąc $x_3 = \{10x_2\}$ mamy $c_3 = [10x_3]$, itd. Innymi słowy

$$x_i = 0, c_ic_{i+1}c_{i+2}\ldots$$

Innymi słowy $x_n = \{10^{n-1}x\}$. Ta ostatnia obserwacja wymaga prostego dowodu indukcyjnego.

Rzeczywiście, jeśli $x_{n+1} = \{10x_n\}$, to z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \big\{10\{10^{n-1}x\}\big\} = 10\{10^{n-1}x\} - [10\{10^{n-1}x\}] \\ &= 10^nx - 10[10^{n-1}x] - [10^nx - 10[10^{n-1}x]] \\ &\overset{(d)}{=} 10^nx - 10[10^{n-1}x] - [10^nx] + 10[10^{n-1}x] = \{10^nx\} \end{aligned}$$

Przyjmijmy teraz, że liczba wymierna x równa jest ułamkowi $\frac{l}{m}$ i ma ona nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Oznacza to, że $x_n \neq 0$, dla każdego $n \geqslant 1$. Rozważamy ciąg elementów

$$\rho_n = mx_n$$

Mamy w istocie:

$$\rho_n = m \cdot \{10^{n-1}x\} = m \cdot \left\{\frac{10^{n-1}l}{m}\right\} = 10^{n-1}l - m\left[\frac{10^{n-1}l}{m}\right],$$

skąd widać, że ρ_n jest liczbą całkowitą. Wobec nierówności $0 \leqslant x_n < 1$ oraz założenia, że $x_n \neq 0$ (rozwinięcie ma być przecież nieskończone), wnosimy, że:

$$0 < \rho_n < m.$$

Liczby ρ_n są zatem niezerowymi resztami z dzielenia $10^{n-1}l$ przez m, czyli elementami ciągu złożonego z $m-1$ wyrazów $1, 2, \ldots, m-1$. A więc w ciągu $\rho_1, \ldots, \rho_m$, w którym jest m wyrazów, co najmniej dwa wyrazy musza być równe, np. $\rho_h = \rho_{h+s}$, gdzie h, s są liczbami naturalnymi mniejszymi od m. Stąd również $x_h = x_{h+s}$, Stąd zaś, w myśl definicji ciągu x_i, natychmiast dostajemy $x_n = x_{n+s}$, dla $n \geqslant h$, a stąd skoro $c_i = \{10x_i\}$ mamy też $c_n = c_{n+h}$, dla $n \geqslant h$. Liczba wymierna x o nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym ma zatem rozwinięcie okresowe.

Kluczowa była zatem obserwacja, uzyskana nieco „od tyłu”, że „ogon” nieskończonego rozwinięcia liczby wymiernej przedstawialnej w postaci ułamka $\frac{l}{m}$ po przemnożeniu przez m jest liczbą całkowitą.

Wniosek 8.1: Gauss

Jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5, to rozwinięcie dziesiętne liczby $1/p$ jest ułamkiem okresowym, którego okres dzieli $p-1$.

Dowód. Niech $0, c_1c_2c_3\ldots$ będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{p}$. Aby znaleźć to rozwinięcie zauważamy, naśladując dowód wyżej, że liczba ρ_n jest równa reszcie z dzielenia 10^{n-1} przez p (patrz ($\heartsuit$)). Jest to bowiem

$$\rho_n = p \cdot \left\{\frac{10^{n-1}}{p}\right\}.$$

Aby ułamek $\frac{1}{p}$ był okresowy, dla pewnych liczb naturalnych k, l musi zachodzić $\rho_{l+k} = \rho_k$. Okresem tego ułamka jest najmniejsza liczba l o tej własności. Zauważmy jednak, że po pierwsze mamy $\rho_1 = 1$, a po drugie skoro liczba p jest różna od 2 i 5, to reszta $\rho_2 = r$ z dzielenia 10 przez p jest niezerowa, a zatem z Małego Twierdzenia Fermata mamy

$$10^{p-1} \equiv r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mamy zatem $\rho_p = \rho_1$. Zatem ułamek $\frac{1}{p}$ jest okresowy, a jego okres dzieli $p-1$. □

Przykłady.

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \quad \frac{1}{11} = 0,(09), \quad \frac{1}{29} = 0,(0344827586206896551724137931), \quad \frac{1}{31} = 0,(032258064516129).$$

Na podobnej zasadzie można udowodnić ogólniejsze twierdzenie (np. korzystając z tw. Eulera).

Wniosek 8.2

Liczba wymierna $x = \frac{m}{n}$, gdzie $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$ ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy $v_p(n) = 0$, dla $p \neq 2, 3$. Jeśli $n = 2^k 5^l c$, gdzie $\mathrm{NWD}(c, 10) = 1$, wówczas rozwinięcie dziesiętne liczby x jest okresowe i długość okresu jest dzielnikiem liczby[a] $\phi(c)$. Liczba cyfr po przecinku, stojących przed okresem rozwinięcia dziesiętnego liczby x jest równa liczbie $\max(k, l)$.

[a] Funkcja Eulera $\phi(n)$ to liczba liczb całkowitych od 1 do n, ktore są względnie pierwsze z liczbą n.

Przykłady.

$$\frac{1}{30} = 0,0(3), \quad \frac{1}{60} = 0,01(6), \quad \frac{1}{44} = 0,02(27), \quad \frac{1}{48} = 0,0208(3).$$

Zobaczmy elementarny przykład stwierdzania niewymierności na podstawie zapisu dziesiętnego.

Zadanie 82. *Pewna liczba dodatnia x mniejsza od 1 ma rozwinięcie dziesiętne, którego kolejne cyfry są (czytanymi od lewej) cyframi w zapisie dziesiętnym kolejnych liczb naturalnych:*

$$x = 0,123456789101112131415...$$

Pokazać, że x jest niewymierna.

Rozwiązanie. Załóżmy, że od pewnego miejsca rozwinięcie opisywanej liczby jest okresowe i okres ten ma długość K. Oznacza to, że od pewnej pozycji po przecinku rozwinięcia x albo wszystkie cyfry są takie same ($K = 1$), albo wśród każdych K kolejnych cyfr są przynajmniej dwie **różne**. Na tym też polega okres długości > 1. Jest jasne, że pierwsza możliwość nie zachodzi, bo wtedy mielibyśmy do czynienia z liczbą wymierną. Także druga sytuacja nie może mieć miejsca, bo w rozwinięciu naszej liczby występują dowolnie długie ciągi jednakowych cyfr. A zatem rozwinięcie x jest nieokresowe i jest ona niewymierna.

Nadmienić należy, że x to słynna liczba wskazana w latach 30. przez studenta Champernowne'a. Pokazał on znacznie więcej niż jej niewymierność. Rozwinięcie dziesiętne tej liczby charakteryzuje się tym, że każdy blok (kolejnych) cyfr występuje w tym rozwinięciu z taką samą `częstością` – dla ilustracji (nieprecyzyjnej): po rozważeniu tryliona elementów rozwinięcia x i przeliczeniu ile jest w nich cyfr $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ dowiemy się, że jest ich prawie po tyle samo. A „licząc dalej" będzie ich średnio tyle samo (wiję się tu mocno aby nie użyć żadnych poważnych pojęć). O liczbach tego rodzaju jest słynna hipoteza Borela z 1909 roku. Nie wiadomo czy $\sqrt{2}$ lub π są tego rodzaju (testy ilościowe temu nie przeczą). Ba – nie wiemy nawet czy w rozwinięciu dziesiętnym $\sqrt{2}$ jest nieskończenie wiele jedynek. Więcej o tym zagadnieniu przeczytać można w artykule Łukasza Rajkowskiego *Czy π jest normalna?* w *Delcie.*

8.5 Rozkład na ułamki proste

Warto wspomnieć na koniec o możliwości zapisu postaci ułamkowej liczby wymiernej jako sumy ułamków prostych, znanego już w starożytnym Egipcie, a którego uzasadnienie przypisuje się Fibonacciemu.

Obserwacja 8.7

Niech $0 < x < 1$ będzie liczbą wymierną. Wówczas x jest sumą różnych ułamków prostych.

Dowód. Niech $x = \frac{a}{b}$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi i $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną (dodatnią) taką, że:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k} \geqslant 0.$$

Twierdzimy, że jeśli różnica wyżej jest dodatnia, to może być zapisana jako ułamek o liczniku mniejszym niż a oraz mianowniku większym niż b. To oczywiście wystarczy do dowodu twierdzenia.

Oczywiście $k > 1$, bo $x < 1$. Dla $k \geqslant 2$ mamy:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{k} = \frac{ka-b}{bk} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{1}{k} + \frac{ka-b}{bk}.$$

Skoro $\frac{1}{k}$ jest największym ułamkiem prostym, który można odjąć od $\frac{a}{b}$ (i dostać wynik dodatni), wówczas:

$$\frac{1}{k-1} > \frac{a}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{b}{k-1} > a \qquad \Longleftrightarrow \qquad b > a(k-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ka - b < a.$$

Oczywiście $\frac{a}{b} > \frac{1}{k}$, więc $ka - b > 0$. $\square$

Warto zwrócić uwagę na to, że w istocie liczbę k występującą wyżej i spełniającą

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{1}{k-1}$$

można zapisać jako $k = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$.

Oczywiście rozkład na ułamki proste[1] nie jest jednoznaczny, na przykład

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{435} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}.$$

Dokładniej, biorąc pod uwagę znaną nam już równość, prawdziwą dla każdego naturalnego $n > 0$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

widzimy, że każdą liczbę wymierną można przedstawić na nieskończenie wiele sposobów w postaci sumy ułamków prostych. O jakich ograniczeniach warto wspomnieć? Algorytm Fibonacciego (przykład algorytmu zachłannego) daje nam np.

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231},$$

ale można też dostać rozkład o mniejszych mianownikach niż 231, na przykład:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

Można zadać w związku z tym choćby następujące pytanie: ilu co najmniej ułamków potrzeba do rozkładu na ułamki proste? Okazuje się, że nie jest to pytanie rozstrzygnięte. Ciągi Sloane'a A097049 oraz A097048 opisują liczniki i mianowniki najmniejszych ułamków, których rozkłady wymagają co najmniej $2, 3, 4, 5, ...$ ułamków prostych. Dla przykładu, 8/11 nie można rozłożyć na trzy ułamki proste. Nie jest wiadomo jaka jest najmniejsza liczba, której nie da się rozłożyć na mniej niż 9 ułamków prostych.

Dla ułamków prostych niektórych typów łatwo określić długość możliwego rozkładu na ułamki proste. Dla każdego n naturalnego dodatniego zachodzą równości

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}, \quad \frac{3}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

Dla ułamków $3/n$ pokazano w 2000 roku[2], że są one sumami trzech ułamków prostych, gdy 3 nie dzieli n. Dla ułamków $4/n$ oraz $5/n$ nie wiadomo czy dla $n > 4$ ułamki te musza być zawsze sumami trzech ułamków prostych. Problemy te znane są jako hipoteza Erdösa-Straussa oraz hipoteza Sierpińskiego.[3].

Znane są różne redukcje np. problemu Erdösa-Straussa. Oto prosty przykład.: zachodzi implikacja

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{kn} = \frac{1}{kx} + \frac{1}{ky} + \frac{1}{kz}.$$

Jeśli więc hipoteza jest prawdziwa dla pewnej liczby naturalnej n, to jest prawdziwa dla każdej jej wielokrotności. Wystarczy więc rozwiązać problem dla liczb pierwszych n.

[1] Przegląd rozmaitych metod rozkładów na ułamki proste znaleźć można w tekście „Egyptian fractions" w bibliografii.
[2] T. R. Hagedorn, *A Proof of a Conjecture on Egyptian Fractions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 107, (2000), pages 62-63
[3] https://r-knott.surrey.ac.uk/Fractions/egyptian.html

Możliwa dalsza lektura

- *Ułamki egipskie* na stronie dr. Rona Ktotta na Uniwersytecie w Surrey, `https://r-knott.surrey.ac.uk/Fractions/egyptian.html`
- A. Nowicki. *Liczby wymierne*, Podróże po Imperium Liczb (tom 1.)
- H. Pawłowski, *Część całkowita liczby rzeczywistej* w: *Kółko matematyczne dla olimpijczyków*, Turpress 1994.
- Ł. Rajkowski, *Czy π jest normalna?* Delta, 3/2020, `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2020/02/29/2020-03-delta-rajkowski.pdf`
- W. Sierpiński, Teoria Liczb, Monografie Matematyczne 19 (1950). `http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/mon/mon19/mon1909.pdf`

Zadania – liczby wymierne

Zadanie 1. *Dane są dodatnie liczby całkowite a, b o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ ułamek*

$$\frac{a+n}{b+n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a = b$.

Zadanie 2. *Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie $(a+b+c)(a+b-c) = c^2$. Wykaż, że $a+b+c = 0$.*

Zadanie 3. *Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b, dla których liczba $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$ jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ są wymierne.*

Zadanie 4. *Dana jest taka liczba rzeczywista a, że liczby $a^2 + a$ oraz $a^3 + a$ są wymierne. Wykaż, że a jest liczbą wymierną.*

Zadanie 5. *Rozwiąż równanie $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$.*

Zadanie 6. *Liczba rzeczywista $x \notin \{-1, 0, 1\}$ ma tę własność, że zarówno x jak i jej odwrotność $\dfrac{1}{x}$ mają identyczne rozwinięcia dziesiętne po przecinku. Wykaż, że x jest liczbą niewymierną.*

Zadanie 7. $(\star)$ *Dane są liczby dodatnie x, y, mniejsze od 1 i takie, że n-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby y jest 2^n-tą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby x. Wykaż, że jeśli x jest liczbą wymierną, to y też jest liczbą wymierną.*

Zadanie 8. $(\star)$ *Liczby a, b są całkowite dodatnie, przy czym a jest nieparzysta. Określamy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurencją o warunku początkowym $a_1 = b$ i określoną dla $n \geqslant 1$ wzorem:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest parzysta,} \\ a_n + a, & \text{gdy } a_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Niech $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ będzie liczbą rzeczywistą, której rozwinięcie dziesiętne zawiera na n-tym miejscu po przecinku cyfrę jedności liczby a_n, dla $n \geqslant 1$. Rozstrzygnij czy x jest liczbą wymierną, czy nie.

Zadanie 9. $(\star)$ *Rozwiąż równanie $x^3 - [x] = 3$.*

Zadanie 10. $(\star)$ *Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi*

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]\,.$$

Zadanie 11. $(\star)$ *Wykaż, że żadna liczba wymierna postaci $\dfrac{3}{7^n}$ nie jest sumą dwóch ułamków prostych.*

Zadanie 12. $(\star)$ *Dane są liczby niewymierne dodatnie a, b, c, d, przy czym $a + b = 1$. Udowodnij, że $c+d = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $[na]+[nb] = [nc]+[nd]$.*

Zadanie 13. $(\star\star)$ *Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi o tej własności, że $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Wykaż, że*

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

Zadanie 14. $(\star\star)$ *Na tablicy znajdują się liczby $1, 2, \ldots, n$, gdzie $n > 1$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Dopóki na tablicy nie pozostanie jedna liczba, z tablicy wybierane są w kolejnych krokach pewne dwie liczby a i b, następnie liczby te są ścierane i w ich miejscu zapisana jest jedna liczba $\dfrac{ab}{a+b}$. Udowodnij, że po wykonaniu $n-1$ kroków liczba pozostała na tablicy jest mniejsza od $\dfrac{n+1}{2n}$.*

Zadanie 15. $(\star\star)$ *Ile jest liczb całkowitych dodatnich n mniejszych od 2023, dla których istnieje dodatnia liczba rzeczywista x, taka że $n = x \cdot \lfloor x \rfloor$?*

Rozdział 9

Liczby rzeczywiste
Wartość bezwzględna

9.1 Elementy definicji liczb rzeczywistych

W szkole nie przeprowadza się konstrukcji liczb rzeczywistych. Natomiast już na początkowych etapach nauki matematyki mowa jest o osi liczbowej i reprezentacji „dowolnych" liczb za pomocą punktów na osi. Liczby rzeczywiste posiadają ważną własność, którą wyraża tzw. zasada Dedekinda (zasada ciągłości).

Definicja 9.1: Zasada ciągłości Dedekinda

Jeżeli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ podzielimy na dwa rozłączne podzbiory A, B w ten sposób, że każda liczba należąca do podzbioru A jest mniejsza od każdej liczby należącej do podzbioru B, to albo w zbiorze A będzie liczba największa, albo w części B będzie liczba najmniejsza.

Liczby wymierne nie posiadają własności wymienionej powyżej. Jeśli do zbioru A zaliczymy wszystkie liczby wymierne, liczbę 0 oraz te liczby wymierne dodatnie, których kwadrat jest mniejszy od 2, a do zbioru B – pozostałe liczby wymierne, to nietrudno wykazać, że zbiór A nie posiada elementu największego, a zbiór B – elementu najmniejszego. Przykład takiego rozbicia zbioru liczb wymiernych nazywamy przekrojem Dedekinda.

Definicja 9.2: Przekrój Dedekinda

Dowolną uporządkowaną parę (A, B) podzbiorów zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy przekrojem Dedekinda, jeśli

- podzbiory A, B są właściwe, czyli $A \neq \mathbb{Q}$, $B \neq \mathbb{Q}$,
- zbiór $\mathbb{Q}$ jest sumą mnogościową A oraz B, tzn. $\mathbb{Q} = A \cup B$,
- każdy element zbioru A jest mniejszy od każdego elementu zbioru B.

Liczby rzeczywiste utożsamiamy formalnie z owymi przekrojami. Możemy wprowadzić relację porządku, działania na przekrojach i całą strukturę ciała liczbowego. Tym się nie zajmujemy. Zwrócimy uwagę natomiast na konstrukcję osi liczbowej. Z tego punktu widzenia istotne jest wspomnienie jeszcze jednej zasady, wynikającej bezpośrednio z zasady ciągłości.

Obserwacja 9.1: Zasada Archimedesa

Niech $n \cdot 1 = 1 + 1 + \ldots + 1$ oznacza n-krotną sumę liczby 1 w zbiorze liczb rzeczywistych. Wówczas dla każdej liczby $a > 0$ istnieje $k \in \mathbb{N}$, takie że $k \cdot 1 > a$.

9.2 Oś liczbowa

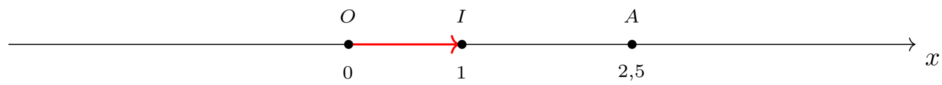
Formalnie oś konstruujemy w następujący sposób. Bierzemy prostą x i definiujemy na niej trzy obiekty:

- punkt O, który nazywamy PUNKTEM POCZĄTKOWYM, i który dzieli prostą x na dwie półproste (półosie), i który odpowiada liczbie 0,
- ZWROT, poprzez nazwanie jednej z powyższych półprostych PÓŁOSIĄ DODATNIĄ, a drugą – PÓŁOSIĄ UJEMNĄ,
- wektor jednostkowy, czyli WERSOR $\vec{e}$ o początku w punkcie O oraz końcu I na półprostej o kierunku dodatnim, który odpowiada liczbie 1.

Dysponując osią obierzmy na prostej x dowolny punkt A. Wiadomo (a raczej – należy o tym myśleć jak o aksjomacie, a kwestia nie jest banalna, co wychodzi przy dowodzie twierdzenia Talesa), że istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista a, dla której spełniony jest warunek

$$\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{OI}, \quad \text{czyli} \quad \vec{OA} = x \cdot \overrightarrow{e}.$$

W ten sposób każdemu punktowi A prostej x możemy przypisać jednoznacznie liczbę rzeczywistą a, zwaną WSPÓŁRZĘDNĄ tego punktu. To przyporządkowanie nazywamy zbudowanym na prostej x UKŁADEM WSPÓŁRZĘDNYCH o początku O i wersorze $\vec{e}$.



Powyższa definicja posiada naturalne praktyczne modele, typu linijka czy termometr. Warto dodać jednak szerszy kontekst, dziś wycofany z nauczania, ale obecny wciąż w terminologii. Zaglądając do starych podręczników, choćby *Algebra dla II klasy gimnazjalnej* Banacha z 1934 roku, znajdziemy rozdział pt. *Wprowadzenie liczb względnych*, gdzie poznajemy pewną konwencję służącą oznaczaniu zmian dodatnich i ujemnych (przyrostów lub ubytków). I tak można powiedzieć, że jeśli liczba mieszkańców pewnego miasta wzrosła np. o 5000, to zmiana liczby mieszkańców jest dodatnia i wynosi $+5000$ mieszkańców. Jeśli liczba mieszkańców zmalała o 5000, to zmiana jest ujemna i wynosi -5000 mieszkańców.

Same liczby DODATNIE wraz z zerem – a więc same wielkości zmian nazywano liczbami BEZWZGLĘDNYMI. Banach w oparciu o nie określa liczby UJEMNE – jako te, które powstały przez wpisanie przed liczbą bezwzględną znaku $-$. Wszystkie zaś otrzymane liczby: dodatnie i ujemne nazywa łącznie: WZGLĘDNYMI. Ten swego rodzaju niezrozumiały dla nas zabieg można tłumaczyć tak: nie definiuje się liczb rzeczywistych, bowiem te wymagają niezwykle skomplikowanej (i jeszcze wówczas stosunkowo nowej) konstrukcji. Zamiast tego definiujemy liczby względne: jako wszystkie znane liczby. W ujęciu Banacha na osi liczbowej zaznaczamy własnie liczby względne, a więc po prawej stronie zera są liczby ze znakami $+$.

Następnie Banach poświęca kolejne 50 stron swojego podręcznika bardzo drobiazgowemu omówieniu działań arytmetycznych na liczbach względnych – nie tylko definiując te działania oraz metody porównywania liczb, ale także szczegółowo omawiając kolejne praca tych działań, takie jak prawo przemienności i łączności, uwalnianie od nawisu, znak iloczynu, prawo rozdzielności, metody redukcji wyrazów podobnych, działania na wyrażeniach ułamkowych, przeznaczając dla każdej własności szereg zadań zarówno czysto rachunkowych, jak i praktycznych.

Na modelu prostej rzeczywistej można również obrazować działania dodawania i odejmowania liczb oraz ich własności, np. prawo przemienności dodawania, łączność itd. Może to być pomocne nawet przy poznawaniu działań na liczbach ujemnych. Poprzez „skakanie” po osi liczbowej o stałą wartość naturalną dojść można do pojęcia wielokrotności. Przy odrobinie cierpliwości za pomocą osi liczbowej tłumaczyć można nawet rozwinięcie dziesiętne liczb wymiernych i sens przybliżania liczb rzeczywistych. Kluczowym narzędziem jest tu pojęcie odległości oraz niezwykle ważne pojęcie WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ.

Odległość pomiędzy punktami A, B na osi liczbowej oznaczamy przez $|AB|$. Jeśli współrzędne punktów A i B na osi liczbowej są równe odpowiednio a i b, to odległość tę oznaczamy przez $|a-b|$.

9.3 Wartość bezwzględna

Definicja 9.3

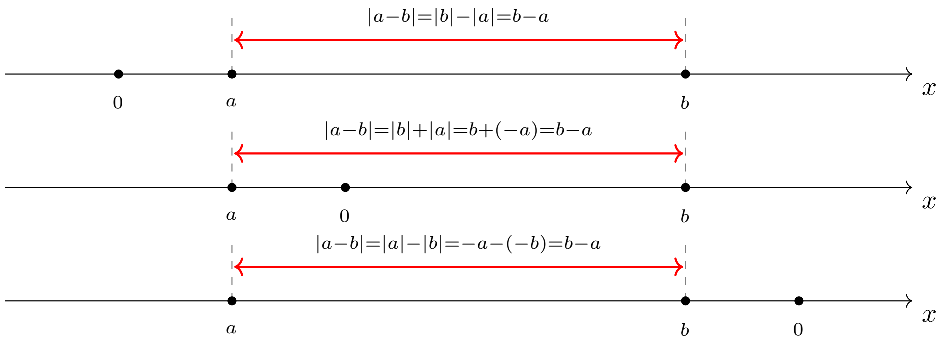
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b określamy:

$$|a-b| = \begin{cases} b-a, & \text{dla } b > a \\ a-b, & \text{dla } a > b \\ 0, & \text{dla } a = b \end{cases}.$$

W szczególności odległość liczby x od zera oznaczamy $|x|$ i nazywamy WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ liczby rzeczywistej x.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Oto ilustracja powyższej definicji przy założeniu, że $b > a$, dla różnych przypadków znaków.



Rys. 2. Odległość punktów a, b na osi liczbowej równa jest $|a-b|$. Ilustracja dla $b > a$.

Podstawowe własności wartości bezwzględnej są następujące.

Obserwacja 9.2

Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to zachodzą następujące równości i nierówności

$$|-a| = |a|, \quad |a| \geqslant a, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

Nierówność $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ traktować można jako „nierówność trójkąta" o wierzchołkach 0, a, b, leżących na jednej prostej (dlatego nierówność nie jest ostra). Powyżej widać ilustrację dla $b > a$.

Obserwacja 9.3

Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ustalmy notację dotyczącą przedziałów na prostej rzeczywistej. Dla liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ określamy:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Stosujemy też następującą notację:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\},$$

$$(b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, b < x\}, \quad [b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, b \leqslant x\}.$$

Przyjmujemy też standardowe oznaczenia $\cup$ oraz $\cap$ na odpowiednio: sumę i część wspólną zbiorów.

Wniosek 9.1

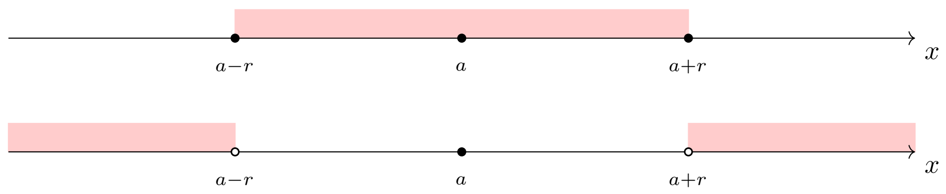
Dla liczb rzeczywistych a oraz $r \geqslant 0$ mamy

$$|x-a| \leqslant r \iff a-r \leqslant x \leqslant a+r \iff x \in [a-r; a+r],$$

oraz

$$|x-a| > r \iff x < a-r \text{ lub } x > a+r \iff x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty).$$

Oto ilustracje powyższych zbiorów.



Rys. 3. Przedziały punktów spełniających odpowiednio (wyżej) warunek $|x-a| \leqslant r$ oraz (niżej) $|x-a| > r$.

Zobaczmy przykład rozwiązania kilku zadań z użyciem wartości bezwzględnej[1].

Zadanie 83. *Rozwiąż równanie*

$$|x+1| = 2|x-5|.$$

Rozwiązanie. Pokażemy trzy rozwiązania, odwołujące się zarówno do definicji, jak i do interpretacji geometrycznej, a także do jednego ze wspomnianych wyżej rezultatów.

Sposób pierwszy. Rozwiązujemy równanie badając znak wyrażeń $|x+1|$ oraz $|x-5|$ na odpowiednich przedziałach prostej, tzn.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{dla } x \in [-1, \infty) \\ -x-1, & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \end{cases},$$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{dla } x \in [5, \infty) \\ -x+5, & \text{dla } x \in (-\infty, 5) \end{cases}.$$

Oto stosowna tabela:

	$x \in (-\infty; -1)$	$x \in [-1; 5)$	$x \in [5; \infty)$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x-5\rvert$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$
$\lvert x+1\rvert = 2\lvert x-5\rvert$	$-x-1 = 2(-x+5)$	$x+1 = 2(-x+5)$	$x+1 = 2(x-5)$

Pozostało rozważenie odpowiednich przypadków.

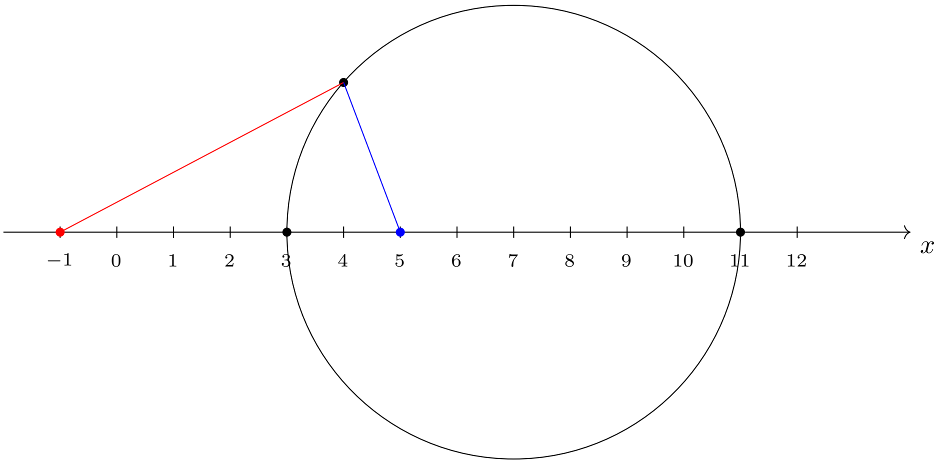
- Równanie $-x-1 = 2(-x+5)$ ma rozwiązanie $x = 11$, które nie należy do przedziału $(-\infty, -1)$.
- Równanie $x+1 = 2(-x+5)$ ma rozwiązanie $x = 3$, które należy do przedziału $[-1, 5)$.
- Równanie $x+1 = 2(x-5)$ ma rozwiązanie $x = 11$, które należy do przedziału $[5, \infty)$.

Odpowiedź to: $x \in \{3; 11\}$.

Sposób drugi. Rozwiązaniem danego równania są te liczby rzeczywiste x, których odległość od -1 na osi liczbowej jest 2 razy większa niż odległość od 5. Innymi słowy szukamy punktów, które dzielą odcinek o końcach -1 oraz 5 w stosunku $2:1$. Odcinek ten ma długość 6, więc jeden z punktów dzieli go na odcinki długości 4 oraz 2, a drugi dzieli go na odcinki długości 12 oraz 6. Dwa rozwiązania wynikają z tego, że w istocie rozkładamy wektor na sumę wektorów, z których jeden jest dwa razy dłuższy niż drugi, ale które mogą mieć różny zwrot. Dokładniej mamy $x-(-1) = 2(5-x)$ lub $x-(-1) = 2(x-5)$.

[1] Powołuję się tu na udostępnione mi materiały p. Pawła Kwiatkowskiego i p. Tomasza Szymczyka.

Ogólniej, jeśli $\gamma > 0$ oraz $\gamma \neq 1$ to dla dowolnych punktów $A \neq B$ zbiór punktów P na płaszczyźnie spełniających $|AP| = \gamma|BP|$ jest okręgiem. Punkty przecięcia tego okręgu z prostą AB dzielą wektor $\overrightarrow{AB}$ w stosunku $\pm\gamma$. Są to spodki dwusiecznej wewnętrznej i zewnętrznej każdego z kątów APB, patrz twierdzenie o dwusiecznej oraz `https://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius`.



Rys. 4. Okrąg Apoloniusza złożony z punktów, których odległość od punktu -1 jest 2 razy większa niż odległość od punktu 5.

Sposób trzeci. Podnosimy każdą stronę do kwadratu, a potem przekształcamy równoważnie.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 = (2x-10)^2 &\iff (2x-10)^2 - (x+1)^2 = 0\\ &\iff (2x-10+x+1)(2x-10-x-1) = 0\\ &\iff 3(x-3)(x-11) = 0.\end{aligned}$$

Czy postępując tym sposobem konieczne jest wykonanie sprawdzenia? ■

9.4 Zastosowania nierówności trójkąta

Zobaczmy kilka zastosowań nierówności trójkąta.

Zadanie 84. *Wykaż, że równanie* $|x-2| + |x+3| = 4$ *nie ma rozwiązań.*

Rozwiązanie. Możemy rozpatrywać problem podobnie jak w sposobie pierwszym poprzedniego rozwiązania przyglądając się postaci wyrażeń $|x-2|$ oraz $|x+3|$ w przedziałach $(-\infty,-3), [-3,2), [2,\infty)$. Możemy też spojrzeć na interpretację w języku odległości: szukamy na osi liczbowej liczb rzeczywistych x, których suma odległości od liczb 2 oraz -3 jest równa 4. Możemy jednak rozumować w sposób następujący.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|x-2| = |-(x-2)| = |-x+2| \quad \text{wiec} \quad |x-2| + |x+3| = |2-x| + |x+3|.$$

Z nierówności trójkąta otrzymujemy ponadto:

$$|2-x| + |x+3| \geqslant |2-x+x+3| = 5.$$

Zatem lewa strona nierówności jest liczbą niemniejszą niż 5, więc nierówność nie ma rozwiązań. ■

Zadanie 85. *Rozwiąż równanie* $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Rozwiązanie. Nierówność ma sens dla $x \geqslant 1$. Mamy:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}\\ &= |\sqrt{x-1}-2| + |3-\sqrt{x-1}|\\ &\geqslant |3-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-2| = 1.\end{aligned}$$

Równość zachodzi jedynie, gdy $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$, a więc gdy $4 \leqslant x-1 \leqslant 9$, co oznacza, że $x \in [5,10]$. ■

Zadanie 86. *Dany jest taki zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ liczb rzeczywistych, że dla dowolnych a_i, a_j należących do zbioru A zachodzi nierówność $|a_i + a_j| \leqslant 2$. Wykazać, że $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant n$.*

Rozwiązanie. Mamy:

$$\begin{aligned} 2|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| &= |2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n| = \\ &= |(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)| \leqslant \\ &\leqslant |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \ldots + |a_{n-1} + a_n| + |a_n + a_1| \leqslant 2n \end{aligned}$$

■

Zadanie 87. *Dane są liczby rzeczywiste $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia*

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|, \qquad dla \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, korzystając z nierówności trójkąta, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a < b$ mamy

$$|x - a| + |x - b| \geqslant b - a,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant x \leqslant b$. Rozpatrujemy dwa przypadki.

Jeśli n jest liczbą parzystą, to

$$|x-a_1|+|x-a_n| \geqslant a_n-a_1, \quad |x-a_2|+|x-a_{n-1}| \geqslant a_{n-1}-a_2, \quad \ldots \quad |x-a_{\frac{n}{2}}|+|x-a_{\frac{n}{2}+1}| \geqslant a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}.$$

Dodając stronami te oszacowania dostajemy $S \geqslant a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{\frac{n}{2}+1} - a_{\frac{n}{2}} - a_{\frac{n}{2}-1} - \ldots - a_2 - a_1$. Dla każdego x spełniającego $a_{\frac{n}{2}} \leqslant x \leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$, powyższe nierówności są wszystkie równościami, a więc uzyskane oszacowanie dolne jest osiągane.

Gdy n jest liczbą nieparzystą – postępujemy analogicznie. Ten przypadek zostawiam Czytelnikowi. ■

Jak wiadomo pojęcie wartości bezwzględnej pojawia się w definicji granicy ciągu, o której będziemy jeszcze mówić. Innymi słowy – pojęcie to pojawia się, gdy szacujemy odległości liczb rzeczywistych, w szczególności – gdy zajmujemy się przybliżeniami. Stąd też kluczowa rola nierówności trójkąta – na każdym wykładzie z analizy stanowi ona bowiem podstawowe narzędzie przy dowodzeniu.

9.5 Elementy teorii aproksymacji

Niezależnie od zastosowań analitycznych, warto też wspomnieć kilka pozaszkolnych rezultatów, pozwalających lepiej zrozumieć problem przybliżania. Są one elementami tzw. aproksymacji diofantycznej, czyli zagadnienia przybliżania liczb niewymiernych liczbami wymiernymi. Zanim rozpoczniemy te rozważania przypomnijmy podstawowe definicje szkolne związane z teorią pomiaru.

Definicja 9.4: Błąd przybliżenia; względny i bezwzględny

Błąd przybliżenia to różnica między wartością przybliżoną x_0 (tą, którą obliczamy, szacujemy lub mierzymy), a wartością dokładną (prawdziwą, dokładną) – x. Błąd bezwzględny przybliżenia oznaczany przez Δ_x wyznaczamy ze wzoru $\Delta_x = |x - x_0|$. Błąd względny przybliżenia liczby x za pomocą x_0 to z definicji liczba Δ_x / x.

Przykład. Oszacowaliśmy, że za zakupy zapłacimy 350 złotych, podczas gdy okazało się, że faktyczny koszt to 317, 71 złotych. Wówczas błąd bezwzględny naszego szacowania to

$$|317,71 - 350| \text{ złotych } = 32,29 \text{ złotych}$$

natomiast błąd względny równy jest

$$\frac{32,29}{350} \approx 0,0922,$$

co można również wyrazić w procentach. W tym przypadku błąd względny wynosi ok. $9,22\%$.

Obserwacja 9.4: Trywialne szacowanie

Każda liczba rzeczywista x można być oszacowana przez liczbę wymierną $\frac{p}{q}$ o danym mianowniku $q \geqslant 1$ i błędzie bezwzględnym nie przekraczającym $\frac{1}{2q}$.

Dowód. W przedziale domkniętym $\left[qx - \frac{1}{2}, qx + \frac{1}{2}\right]$ długości 1, znajduje się co najmniej jedna liczba całkowita. Oznaczając tą liczbę przez p dostajemy natychmiast poszukiwany rezultat. Oznacza to bowiem, że:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2q}.$$

□

Czy możemy uzyskać lepszy błąd przybliżenia?

Twierdzenie 9.1: Dirichlet, 1842

Niech x będzie liczbą rzeczywistą oraz niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Wówczas istnieje liczba wymierna $\frac{p}{q}$ taka, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

Twierdzenie sugeruje, że ułamkiem o mianowniku q możemy nie być wstanie przybliżyć liczby niewymiernej z błędem bezwzględnym mniejszym niż $1/q^2$. Przykładem takiej sytuacji jest jedno z zadań zostawionych po ostatnim wykładzie. Argumentując bardzo podobnie jak w rozwiązaniu tamtego zadania można pokazać, że

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{4b^2}.$$

Dowodzimy twierdzenie Dirichleta. Rozważmy części ułamkowe liczb $0, x, 2x, 3x, \ldots, nx$, czyli

$$\{0x\}, \{1x\}, \{2x\}, \ldots, \{nx\} \in [0, 1).$$

Podzielmy przedział $[0, 1)$ na n rozłącznych podzbiorów:

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Skoro owych części ułamkowych mamy $n+1$, a przedziałów tylko n, to dla pewnych $0 \leqslant k < l \leqslant n$ części ułamkowe $\{kx\}$ oraz $\{lx\}$ należą do tego samego przedziału. Stąd liczba $(l-k)x$ różni się o mniej niż $\frac{1}{n}$ od pewnej liczby całkowitej p. Innymi słowy:

$$|(l-k)x - p| < \frac{1}{n}.$$

Dzieląc przez $q = l - k$ mamy:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

Wniosek 9.2

Jeśli x jest liczbą niewymierną, to istnieje nieskończenie ułamków nieskracalnych $\frac{p}{q}$ takich, że:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Dowód. Dla każdego $n \geqslant 1$ znaleźć można ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$, gdzie $1 \leqslant Q_n \leqslant n$ taki, że:

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{nQ_n}.$$

Jeśli założymy, że $\frac{p_n}{q_n} = \frac{P_n}{Q_n}$ oraz $NWD(p_n, q_n) = 1$, to

$$\frac{1}{nQ_n} \leqslant \frac{1}{Q_n^2} \leqslant \frac{1}{q_n^2}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że wśród ułamków $\frac{p_n}{q_n}$ jest nieskończenie wiele różnych liczb. Zauważmy jednak, że odległość x od n-tego ułamka nie przekracza $1/n$, która to liczba może być ustalona jako dowolnie mała dla odpowiednio dużych n. Gdyby wiec zbiór ułamków p_n/q_n był skończony, odległość tych liczb od x byłaby ograniczona przez pewną liczbą dodatnią. □

Czy jest jakieś naturalne wyjaśnienie powyższych fenomenów, a zwłaszcza niemożliwości uzyskiwania dowolnie małych przybliżeń przy pomocy ułamków o mianowniku q? Zauważmy, że dwie liczby rzeczywiste są blisko siebie, gdy ich rozwinięcia dziesiętne zaczynają się wieloma jednakowymi cyframi. Wiemy, że każda liczba wymierna p/q ma rozwinięcie skończone lub nieskończone o okresie nie dłuższym niż $|q| - 1$. Z drugiej strony, liczba niewymierna może być traktowana jako liczba o „nieskończonym okresie”. A więc jeśli przybliżenie ma być bliskie liczbie niewymiernej, $|b|$ musi być dużą liczbą. Z drugiej strony, jeśli $|b|$ jest duże, to przedział wokół p/q jest mały, czasem za mały by „złapać” liczbę niewymierną.

Wniosek 9.3: Twierdzenie o jednoczesnym przybliżaniu

Jeśli $x_1, \ldots, x_m$ są liczbami rzeczywistymi oraz $n \geqslant 1$ jest liczbą naturalną, to istnieje liczba całkowita q spełniająca $1 \leqslant q \leqslant n^m$ oraz liczby całkowite $p_1, \ldots, p_m$ takie, że:

$$\left| x_j - \frac{p_j}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

Dowód jest podobny jak wyżej, przy czym tym razem rozważamy $n^m + 1$ wektorów postaci

$$(\{kx_1\}, \ldots, \{kx_m\}) \in [0,1)^m, \quad k = 0, \ldots, n^m$$

dzielimy kostkę m-wymiarową $[0,1)^m$ na n^m kostek.

Rezultat ten ma nieoczekiwane zastosowanie geometryczne (istnieje też wiele innych dowodów).

Twierdzenie 9.2: Dehn (1903)

Prostokąt można pociąć na skończenie wiele kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek długości jego boków jest liczbą wymierną.

Dowód. Jest jasne, że gdy stosunek długości boków prostokąta jest liczbą wymierną, to można go podzielić na skończenie wiele kwadratów (jak?). Dowodzimy implikację odwrotną. Załóżmy, że pewien prostokąt można podzielić na skończoną liczbę kwadratów o bokach długości $s_1, \ldots, s_n$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $s_i > 1$ oraz, że boki rozważanego prostokąta (oraz kwadratów) są równoległe do prostopadłych osi współrzędnych. Na mocy tw. Dirichleta istnieje liczba całkowita q taka, że iloczyny qx_i oraz qy_i każdej współrzędnej x_i, y_i każdego wierzchołka (x_i, y_j) każdego kwadratu w naszym podziale prostokąta spełniają

$$|qx_i - p_i| < \frac{1}{5}, \quad |qy_i - r_i| < \frac{1}{5},$$

dla pewnych liczb całkowitych p_i, q_i. Krótko mówiąc możemy tak przeskalować nasz prostokąt, by boki wszystkich kwadratów w naszym podziale miały współrzędne „bliskie” (nie dalsze niż $1/5$) liczbom całkowitym (nie chcemy, by część ułamkowa jakiejkolwiek współrzędnej któregokolwiek kwadratu była równa

1/2 i chcemy, by każdy kwadrat był odpowiednio duży).

Niech a oraz b będą długościami boków tego prostokąta (a – bok równoległy do osi OX, zaś b – bok równoległy do OY). Niech $\widetilde{x}$ oznacza liczbę całkowitą najbliższą liczbie x. Poprowadźmy proste poziome złożone z punktów o drugiej współrzędnej równej połówce liczby całkowitej (tzn. $\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$) i popatrzmy na całkowitą długość L odcinków tych prostych zawartych w naszym prostokącie.

Z jednej strony mamy $L = a \cdot \widetilde{b}$, bowiem mamy $\widetilde{b}$ odcinków prostych przecinających nasz prostokąt i każdy odcinek ma długość a. Z drugiej strony, patrząc na to co dzieje się w każdym kwadracie widzimy (żadna z prostych nie zawiera boku kwadratu i przez każdy kwadrat przechodzi prosta), że:

$$L = \sum_i s_i \widetilde{s_i} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \widetilde{b} = \sum_i s_i \widetilde{s_i}.$$

Analogicznie, prowadząc pionowe proste złożone z punktów, których pierwsze współrzędne są połówkami liczb całkowitych widzimy, że odcinki tych prostych zawarte w prostokącie mają w sumie długość

$$b\widetilde{a} = \sum_i s_i \widetilde{s_i}.$$

A zatem $a\widetilde{b} = b\widetilde{a}$, czyli $\frac{a}{b} = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} \in \mathbb{Q}$. □

Powyższy problem ma bardzo liczne rozwiązania, gromadzone od ponad stulecia. Piękne podejście kombinatoryczne, korzystające jedynie z pojęcia parzystości, zapisane jest w książce *The Art and Craft of Problem Solving* (str. 98-99). Podejście algebroliniowe opisane jest np. u Matouska w popularnych *33 miniaturach*. Możliwych podejść jest znacznie więcej. Zainteresowanych odsyłam do bibliografii.

Możliwa dalsza lektura– wartość bezwzględna i przybliżanie

- S. Banach, *Algebra dla II klasy gimnazjalnej*, Książnica-Atlas 1934, `https://polona.pl/sets?searchLike=banach&searchCategory=objectSets`.
- Ł. Bożyk, *Zabawy z laserem*, Konferencja SEM (2021), `http://sem.edu.pl/konferencja-2021/materialy/Bozyk_zabawy-z-laserem-slajdy.pdf`
- W. Czerwiński, *O przybliżaniu ułamkami*, Delta 3/2021 `https://www.deltami.edu.pl/2021a/03/2021-03-delta-art-07-czerwinski.pdf`
- K. Szymiczek, *Aproksymacje diofantyczne*, XIV Szkoła Matematyki Poglądowej (1995) `https://smp.uph.edu.pl/msn/15/36-48.pdf`
- S. Wagon, *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle*, `https://www.maa.org/sites/default/files/images/images/upload_library/22/Ford/Wagon601-617.pdf`

Zadania – wartość bezwzględna

Zadanie 1. *Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie*

$$|x+3|+|x+1|+|x-5|=8.$$

Zadanie 2. *Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność:*

$$|a+b-c|+|b+c-a|+|c+a-b| \geqslant |a|+|b|+|c|.$$

Zadanie 3. *Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości, jakie przyjąć może wyrażenie:*

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}.$$

Zadanie 4. *Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest co najmniej jedna z równości:*

$$|a+b|=|a|+|b|, \quad |b+c|=|b|+|c|, \quad |c+a|=|c|+|a|.$$

Zadanie 5. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają warunek*

$$|x-1|+|y-1|=|x+1|+|y+1|=|x|+|y|.$$

Znajdź najmniejszą możliwą wartość $|x-y|$.

Zadanie 6. ($\star$) *Znajdź największą i najmniejszą wartość wyrażenia*

$$\frac{|a+b|+|a+c|+|b+c|}{|a|+|b|+|c|},$$

gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi, nie wszystkimi równymi 0.

Zadanie 7. ($\star$) *Liczby rzeczywiste x, y spełniają warunek $xy \geqslant 0$. Wykaż, że:*

$$\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|.$$

Zadanie 8. ($\star$) *Naszkicować w układzie współrzędnych zbiór par punktów (x, y), których współrzędne spełniają równanie*

$$||x|-1|+||y|-1|=1.$$

Zadanie 9. ($\star$) *Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której w przedziale $(-1;1)$ istnieją takie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że spełniona jest równość:*

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=99+|a_1+a_2+\ldots+a_n|.$$

Zadanie 10. ($\star\star$) *Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $|(a+b)(b+c)(c+a)|=|(a-b)(b-c)(c-a)|$. Wykaż, że:*

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right| \geqslant 1.$$

Zadanie 11. ($\star\star$) *Wykaż, że dla każdego skończonego zbioru $\{x_1, \ldots, x_n\}$ liczb rzeczywistych wskazać można niepusty jego podzbiór postaci $\{y_1, \ldots, y_s\}$ oraz liczbę całkowitą m takie, że:*

$$|m+y_1+y_2+\ldots+y_s| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Zadanie 12. ($\star\star$) *Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Rozwiąż układ równań*

$$\begin{cases} x_1|x_1|=x_2|x_2|+(x_1-1)|x_1-1| \\ x_2|x_2|=x_3|x_3|+(x_2-1)|x_2-1| \\ \qquad\vdots \\ x_n|x_n|=x_1|x_1|+(x_n-1)|x_n-1| \end{cases}.$$

Rozdział 10

Ciągi liczbowe i ich własności. Wzór ogólny i postać rekurencyjna

10.1 Ciągi liczbowe i sposoby ich definiowania

Zanim przejdziemy do omówienia rozmaitych typów funkcji i ich własności, przyjrzymy się najważniejszym klasom ciągów rozważanych w szkole. Formalnie rzecz biorąc ciąg o wyrazach ze zbioru X jest funkcją ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór X. Na tym wykładzie skupimy się na ciągach liczbowych. Przygotujemy też grunt pod pojęcie granicy, którym zajmiemy się w przyszłości.

Definicja 10.1: Ciąg

Każdej dodatniej liczbie naturalnej n przyporządkowujemy dokładnie jedną liczbę rzeczywistą oznaczaną przez a_n, Przyporządkowanie to nazywamy CIĄGIEM LICZBOWYM i oznaczamy je przez $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ lub krótko (a_n). Liczbę a_n nazywamy n-tym WYRAZEM ciągu (a_n).

Już w szkole podstawowej poznajemy wiele przykładów ciągów (bez takiego nazewnictwa):

(a) ciąg (a_n) dodatnich liczb naturalnych, w którym n-ty wyraz a_n równy jest n,

(b) ciąg (a_n) potęg dwójki postaci $a_n = 2^n$ o kolejnych wyrazach $2, 4, 8, \dots$

(c) ciąg (a_n) wielokrotności naturalnych liczby 3, $a_n = n \cdot 3$ o wyrazach: $3, 6, 9, 12, \dots$

(d) ciąg (a_n) liczb pierwszych, tzn. a_n jest n-tą liczbą pierwszą,

(e) ciąg (a_n) odwrotności dodatnich liczb naturalnych postaci $a_n = \frac{1}{n}$,

(f) ciąg stały, tzn. taki, że $a_n = c$, dla pewnego $c \in \mathbb{R}$,

(g) ciąg, którego n-ty wyraz jest n-tą po przecinku cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym l. niewymiernej x.

Niekiedy numerujemy ciąg nie od wyrazu pierwszego, a nie zerowego (jak w skrypcie dr. Krycha). Ma to sens np. dla ciągów (a), (b) i (c), które reprezentują w jakimś sensie funkcje rzeczywiste x, 2^x oraz $3x$. Ciągi (d)-(g) nie mają większego sensu dla $n = 0$. Czasami też mówi się o ciągach skończonych mając na myśli zbiór liczb ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 (lub np. od 0) do n.

Ciągi definiować można na różne sposoby, ale dwa podstawowe to: WZÓR OGÓLNY i REKURENCJA. Pierwszy sposób oznacza, że znając liczbę n możemy wyznaczyć n-ty wyraz ciągu. Drugi zaś oznacza, że aby wyznaczyć n-ty wyraz ciągu musimy znać k-te wyrazy ciągu, dla wszystkich $k < n$.

Wspominając o różnych sposobach definiowania, nie sposób nie odesłać Czytelnika do OESIS, czyli zdalnej encyklopedii ciągów liczb całkowitych, założonej w 1964 roku przez N. Sloane'a. Znajduje się ona pod adresem `https://oeis.org/`. Encyklopedia ta zawiera 364 tysięcy ciągów, począwszy od zwyczajnego ciągu liczb naturalnych, przez tajemniczy ciąg liczb pierwszych. Jeśli do wyszukiwarki ciągów wpiszemy pierwsze sześć liczb pierwszych $2, 3, 5, 7, 11, 13$, uzyskamy ponad 500 wyników.

10.2 Ciąg arytmetyczny, geometryczny i pokrewne konstrukcje

Przypomnijmy definicje dwóch najbardziej znanych ciągów rozważanych w szkole.

Definicja 10.2: Ciąg arytmetyczny

Niech a_1 oraz r będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas CIĄGIEM ARYTMETYCZNYM O RÓŻNICY r i wyrazie początkowym a_1 nazywamy ciąg (a_n), którego n-ty wyraz spełnia, dla $n > 1$:

$$a_n - a_{n-1} = r.$$

Powyższa definicja ma charakter rekurencyjny. Znając a_1 możemy wyznaczyć a_2, dalej za pomocą a_2 możemy wyznaczyć a_3 i tak dalej. Nietrudno udowodnić, choćby przez indukcję, że zachodzi równość zadająca wzór ogólny ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Definicja 10.3: Ciąg geometryczny

Niech a_1 oraz q będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas CIĄGIEM GEOMETRYCZNYM O ILORAZIE q i wyrazie początkowym a_1 nazywamy ciąg, którego n-ty wyraz spełnia, dla $n > 1$:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Ciąg zerowy traktujemy również jako ciąg geometryczny. Gdy $q \neq 0$, wówczas $q = a_n/a_{n-1}$. Łatwo pokazać indukcyjnie, dla ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_0 i ilorazie q mamy $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Ładny alternatywny do indukcji sposób wyprowadzania wzorów ogólnych z formuł rekurencyjnych proponuje prof. Guzicki w cytowanej przez nas wielokrotnie *Arytmetyce i algebrze*. Nie korzysta ono z indukcji i prowadzi do pewnej ogólnej wartościowej metody. Oto rozumowanie dla ciągu arytmetycznego.

Wypisujemy wzór rekurencyjny dla $n-1$ wyrazów $a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Dodając stronami owe $n-1$ równości otrzymujemy:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n-1)r.$$

Suma $a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$ występuje po obydwu stronach otrzymanej równości, więc po redukcji mamy:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla ciągu geometrycznego. Sztuczkę tą można wykorzystać także dla innego typu ciągów zadanych przy pomocy rekurencji (jako alternatywę dla rozumowań indukcyjnych). Oto przykład.

Zadanie 88. *Wyznaczyć wzór ogólny ciągu (a_n) spełniającego następujące warunki*

$$a_1 = 2, \qquad \textit{oraz} \qquad a_{n+1} = 3a_n + 2.$$

ROZWIĄZANIE. Gdybyśmy wiedzieli jakiego wzoru szukamy, wówczas dowód prawdziwości tego wzoru byłby banalnym rozumowaniem indukcyjnym. Musimy jednak tą formułę wyprowadzić. Postępujemy jak wyżej:

$$\begin{aligned}
a_2 &= 3a_1 + 2\\
a_3 &= 3a_2 + 2\\
a_4 &= 3a_3 + 2\\
&\vdots\\
a_n &= 3a_{n-1} + 2
\end{aligned}$$

Zobaczmy co się dzieje, gdy podzielimy kolejne równanie przez 3^n, dla n od 2 do n:

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{3^2} &= \frac{a_1}{3} + \frac{2}{3^2}\\
\frac{a_3}{3^3} &= \frac{a_2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\\
\frac{a_4}{3^4} &= \frac{a_3}{3^3} + \frac{2}{3^4}\\
&\vdots\\
\frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}
\end{aligned}$$

Chcąc skorzystać ze sztuczki wyżej. W tym celu wprowadzamy podstawienie: definiujemy ciąg

$$b_n = \frac{a_n}{3^n}$$

dostając:

$$\begin{aligned}
b_2 &= b_1 + \frac{2}{3^2}\\
b_3 &= b_2 + \frac{2}{3^3}\\
b_4 &= b_3 + \frac{2}{3^4}\\
&\vdots\\
b_n &= b_{n-1} + \frac{2}{3^n}
\end{aligned}$$

Dodajemy powyższe nierówności stronami, redukujemy wyrazy po obydwu stronach i dostajemy:

$$b_n = b_1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3^n}.$$

Wstawiając $b_1 = \frac{2}{3}$ i mnożąc obydwie strony przez 3^n dostajemy:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + 2 \cdot 3^1 + 2 = 2(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n).$$

■

Widzimy zatem, że a_n jest sumą n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie 3. Korzystając ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego (omówimy ją niżej) dostajemy

$$a_n = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 3^n - 1.$$

Obserwacja 10.1: Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego

Niech (a_n) – ciąg arytmetycznym o różnicy r, zaś (b_n) – ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 1$. Wówczas dla każdego $n \geqslant 1$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)n}{2} \cdot r = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dowód. Rozumowanie dla ciągu arytmetycznego wynika ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ oraz na sumę $1+2+\ldots+n$. Przejdźmy do ciągu geometrycznego. Poszukiwana formuła wynika natychmiast z formuły $b_n = b_1 q^{n-1}$ oraz ze wzoru skróconego mnożenia $q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$. □

Zadanie 89. *Obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu:*

$$2, 22, 222, 2222, \ldots$$

Rozwiązanie. Niech $S_n = \underbrace{222...2}_{n}$. Oznaczmy szukaną sumę przez S. Każda z liczb S_i jest sumą pierwszych i wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 2 i ilorazie 10. A zatem $S_i = 2 \cdot \frac{10^{i+1}-1}{9}$. A więc sumę $S_1 + \ldots + S_n$ można przedstawić w postaci:

$$S = \frac{2}{9}(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^1) - \frac{2}{9}n = \frac{2}{9}\left(\frac{10(10^{n-1} - 1)}{9}\right).$$

■

Zobaczmy przykład nieco bardziej skomplikowanego zadania, które wykorzystuje przejście z rekurencji do wzoru ogólnego za pomocą znajomości wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 90 (XXXIV OM (1982), 2 etap; Olimpiada Matematyczna RFN 1982, 1 etap)**.**
Niech $a(k)$ będzie największą liczbą nieparzystą, przez którą dzieli się k. Udowodnić, że:

$$\sum_{k=1}^{2^n} a(k) = \frac{1}{3}(4^n + 2).$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że zachodzą następujące zależności

$$p(k) = \begin{cases} k & \text{, gdy k jest liczbą nieparzystą,} \\ p(k/2) & \text{, gdy k jest liczbą parzystą.} \end{cases}$$

Niech $S(a, b, c, \ldots)$ oznacza sumę największych dzielników nieparzystych liczb $a, b, c \ldots$ W szczególności niech

$$S_n = S(1, 2, 3, \ldots, 2^n)$$

będzie szukaną przez nas sumą.

Korzystamy z obserwacji poczynionej w poprzednim zadaniu, na mocy której otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S_n = S(1, 2, 3, \ldots, 2^n) &= S(1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1) + S(2, 4, 6, \ldots, 2^n) \\ &= (1 + 3 + 5 + \ldots + 2^n - 1) + S(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Suma pierwszych k dodatnich liczb nieparzystych (to jest ciąg arytmetyczny) równa jest k^2. Skoro $2^n - 1$ jest 2^{n-1}-wszą liczbą nieparzystą, to:

$$S_n = (2^{n-1})^2 + S(1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}) = 4^{n-1} + S_{n-1} \quad \Longrightarrow \quad S_n - S_{n-1} = 4^{n-1}.$$

Używając wielokrotnie powyższego warunku mamy:

$$S_n - S_1 = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) - \ldots - (S_2 - S_1) = 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} \Rightarrow S_n = 2 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}.$$

■

10.3 Rekurencje liniowe

Poświęćmy kilka słów szczególnym typom ciągów zadanych przez rekurencję – rekurencjom liniowym.

Definicja 10.4

LINIOWYM JEDNORODNYM RÓWNANIEM REKURENCYJNYM RZĘDU k (krócej: REKURENCJĄ LINIOWĄ RZĘDU k nazywamy równanie postaci:

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \ldots + c_k x_n, \tag{10.1}$$

gdzie $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest dowolny ciąg (a_n) spełniający równości (10.1) dla każdego $n \geqslant 0$, nazywany CIĄGIEM REKURENCYJNYM rzędu k.

Zauważmy, że dowolne rozwiązanie (a_n) rekurencji rzędu k uzyskać można poprzez określenie pierwszych k wyrazów $a_1, \ldots, a_k$. Na ich podstawie pozostałe wyrazy wyznaczamy ze wzoru (10.1). Najsłynniejszą zapewne rekurencja to równanie rzędu drugiego postaci

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Dla $a_1 = 1, a_2 = 1$ rozwiązaniem tej rekurencji jest słynny ciąg Fibonacciego. Pochodzi on z rozważania następującego problemu.

> Ile par królików będziemy mieli na końcu roku, jeśli zaczniemy w styczniu z jedną parą królików, ta w każdym miesiącu, poczynając od marca, wyda na świat kolejną parę królików i z każdej pary urodzą się kolejne pary po dwóch miesiącach od narodzin?

Rozwiązania rekurencji są w pewnych szczególnych przypadkach ciągami „kombinacjami liniowymi” ciągów geometrycznych, w następującym sensie.

Definicja 10.5: Równanie charakterystyczne

Rekurencji rzędu k opisanej warunkami (10.1) przypisać można równanie

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_{k-1} x - c_k = 0, \qquad (\heartsuit)$$

zwane RÓWNANIEM CHARAKTERYSTYCZNYM

Dla przykładu, równaniem charakterystycznym rekurencji $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ jest $x^2 - x - 1 = 0$. Jak pokazywaliśmy w ramach ćwiczenia indukcji, wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego ma postać:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}), \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wzór ten, zwany też wzorem Bineta, znany był już w XVIII wieku Bernoullemu, Eulerowi czy de Moivre'owi. Skąd się wziął ten wzór? To prawdziwa zagadka. Zauważmy, że α, β są rozwiązaniami równania charakterystycznego. To ogólna zależność, mająca jednak pod spodem istotny element strukturalny.

Obserwacja 10.2

Niech $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ciąg geometryczny (a_n) dany wzorem $a_n = \alpha^n$ spełnia rekurencję (10.1) wtedy i tylko wtedy, gdy α jest rozwiązaniem równania charakterystycznego $(\heartsuit)$.

Dowód. Jeśli $\alpha^{n+k} = c_1\alpha^{n+k-1} + c_2\alpha^{n+k-2} + \ldots + c_k\alpha^n$. W zatem oczywiście po wyłączeniu $\alpha^n \neq 0$ widzimy, że α spełnia równanie charakterystyczne. Dowód w drugą stronę jest analogiczny. □

Zauważmy, że jeśli ciągi (a_n) oraz (b_n) spełniają równanie rekurencyjne (10.1), to również dowolny ciąg (c_n) o wyrazach $c_n = ra_n + sb_n$ spełnia (10.1), dla dowolnych $r, s \in \mathbb{R}$. W języku matematyki wyższej oznacza to, że zbiór ciągów spełniających powyższą rekurencję jest przestrzenią liniową. Jak się okazuje, jeśli równanie charakterystyczne rekurencji rzędu k ma dokładnie k parami różnych pierwiastków rzeczywistych, wówczas pierwiastki te wyznaczają k liniowo niezależnych ciągów geometrycznych. Dowolne rozwiązanie naszej rekurencji jest kombinacją liniową tychże ciągów (one właśnie rozpinają ową podprzestrzeń). Tak jest dokładnie w przypadku ciągu Fibonacciego, gdzie α, β wypisane wyżej są pierwiastkami równania $x^2 - x - 1$. Wiemy swoją drogą, że główny problem wyznaczenia wzoru ogólnego tego ciągu polega właśnie na „odgadnięciu" tych pierwiastków. Sam dowód poprawności formuły można przecież uzyskać indukcyjnie, bez żadnej matematyki wyższej. Ona pomaga (na tym poziomie) stwierdzić czego szukamy.

Rozważmy przykład ciągu (a_n) określonego rekurencją postaci $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, gdzie $a_1 = 3, a_2 = 1$. Wówczas równanie charakterystyczne rej rekurencji ma postać:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0.$$

Skoro równanie charakterystyczne ma dwa różne rozwiązania, n-ty wyraz naszego ciągu ma być (zgodnie z nieudowodnioną przez nas zasadą), dla pewnych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, postaci

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n.$$

Wiedząc, że $a_1 = 3$ mamy $c_1 + 2c_2 = 3$. Mamy też $a_2 = 1$, czyli $c_1 + 4c_2 = 1$. A zatem $-2c_2 = 2$ i $c_2 = -1$. Zatem $c_1 = 5$ i mamy

$$a_n = 5 - 2^n.$$

Rzeczywiście, $a_1 = 3$ oraz $a_2 = 1$. Jest natomiast tylko jeden ciąg (a_n), który może spełniać rekurencję $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ dla ustalonych a_1, a_2 i teraz sprawdzimy, że jest to ciąg o n-tym wyrazie $5 - 2^n$. Zakładając, że $a_n = 5 - 2^n$ oraz $a_{n+1} = 5 - 2^{n+1}$, mamy $a_{n+2} = 3(5 - 2^{n+1}) - 2(5 - 2^n) = 5 - 2^{n+2}$. A zatem ciąg $5 - 2^n$ jest jedynym rozwiązaniem naszej rekurencji (przy danych warunkach początkowych).

Czytelnik domyśla się zapewne, że gdy rozwiązania równania charakterystycznego nie są różne, wówczas sprawa nieco się komplikuje. Z punktu widzenia algebry linowej problemem tym zajmuje się teoria Jordana. Odsyłam Czytelnika do tekstu prof. Guzickiego „Równania rekurencyjne" (bibliografia na końcu), gdzie rozwinięty jest wątek kombinatoryczny rekurencji, a tymczasem proszę sprawdzić poniższy fakt.

Obserwacja 10.3

Ciąg $a_n = n\alpha^n$ spełnia rekurencję o równaniu $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, tzn. $x^2 - px - q = (x - \alpha)^2$.

W przypadku dowolnych ciągów przechodzenie pomiędzy definicją poprzez rekurencję oraz poprzez wzór ogólny może być trudne, jak jest choćby w przypadku omawianego już ciągu Fibonacciego. Czasem wypisanie jakiejkolwiek zależności nie jest możliwe, jak w przypadku ciągu (p_n), gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą (dla $n \geqslant 1$). Nawet bez formuł wyznaczających wprost n-ty wyraz ciągu można rozważać różne istotne jego własności. Mówiliśmy o tym w rozdziale o indukcji oraz przywołując twierdzenie Czebyszewa. Można zastanawiać się też na przykład czy jeden ciąg zachowuje się podobnie jak drugi w jakimś sensie, choćby czy jest przez niego jakoś ograniczony. Dla przykładu, twierdzenie Rossera z 1939 roku mówi, że dla $n \geqslant 1$ mamy $p_n > n \log n$. Klasyczne twierdzenie o liczbach pierwszych, pochodzące niezależnie od Hadamarda i de la Poussina z 1896 roku mówi na przykład, że dla „dużych" n różnica

$$|p_n - n\log(n)|$$

„zbliża się do zera". Aby to precyzyjnie wyjaśnić konieczne jest pojęcie granicy, do którego się tu przybliżamy.

10.4 Monotoniczność i ograniczoność ciągów liczbowych

Definicja 10.6: Ciągi monotoniczne i ciągi ograniczone

Ciąg (a_n) nazywamy:

- NIEMALEJĄCYM (odp. ROSNĄCYM) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n zachodzi nierówność
$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad \text{(odp. } a_n < a_{n+1}\text{)}$$
- NIEROSNĄCYM (odp. MALEJĄCYM) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n zachodzi nierówność
$$a_n \geqslant a_{n+1} \quad \text{(odp. } a_n > a_{n+1}\text{)}$$
- OGRANICZONYM Z GÓRY wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista M, taka że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \leqslant M$,
- OGRANICZONYM Z DOŁU wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista M, taka że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n \geqslant M$.

Rozważmy proste przykłady.

- Ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = \frac{3n+3}{n+2}$ jest rosnący i ograniczony z góry (i dołu). Rzeczywiście, mamy:
$$a_n = 3 - \frac{3}{n+2} < 3 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(n+1)+3}{(n+2)+1} : \frac{3n+3}{n+2} = 3 \cdot \frac{n+3}{3n+3} = \frac{3n+9}{3n+3} > 1.$$
- Ciąg zadany rekurencją $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ jest malejący i ograniczony z góry, i z dołu. Rzeczywiście, zauważmy najpierw przez prostą indukcję, że $1 < a_n < 2$. Liczba a_n jest dodatnia, więc $\sqrt{a_n+2} > \sqrt{2}$. Z drugiej strony jeśli $a_n < 2$, to $a_n + 2 < 4$, skąd $\sqrt{a_n+2} < 2$. Wreszcie, monotoniczność uzyskujemy poprzez badanie znaku różnicy $a_{n+1} - a_n$
$$a_{n+1} - a_n < 0 \iff \sqrt{a_n+2} < a_n \iff a_n + 2 < a_n^2 \iff (a_n+1)(a_n-2) > 0.$$

Jedna z częstych obserwacji konkursowych dotyczących ciągów monotonicznych i ograniczonych, które muszą być od pewnego punktu stałe.

Zadanie 91 (USAMO, 1993)**.** *Niech f_1, f_2 będą nieparzystymi liczbami dodatnimi. Dla $n \geqslant 3$ określamy f_n jako największy nieparzysty dzielnik liczby $f_{n-2} + f_{n-1}$. Wykaż, że ciąg f_n jest od pewnego miejsca stały, tzn. istnieje N takie, że dla $n \geqslant N$ wartość f_n jest stała.*

ROZWIĄZANIE. Rozwiązanie ma trzy etapy, stanowiące dość charakterystyczne typy rozumowań.

- Pokażemy, że jeśli pewne dwa kolejne wyrazy rozważanego ciągu są sobie równe, to kolejne też.
- Pokażemy, że pewne dwa kolejne wyrazy ciągu muszą być równe.
- Pokażemy, że NWD kolejnych par wyrazów ciągu są takie same.

Pierwsza uwaga jest taka, że wszystkie elementy rozważanego ciągu są liczbami nieparzystymi. Istotnie, począwszy od dwóch liczb nieparzystych f_1, f_2, każdy kolejny element ciągu jest dzielnikiem nieparzystym sumy dwóch poprzednich wyrazów, a więc jest liczbą nieparzystą.

Przypuśćmy teraz, że trzy kolejne wyrazy naszego ciągu mają postać a, a, b. Wiemy, że b to największy nieparzysty dzielnik liczby $a + a$, gdzie a jest liczbą nieparzystą. W szczególności $b = a$. A zatem jeśli dwa wyrazy naszego ciągu są równe, to wszystkie dalsze też.

Załóżmy teraz, że żadne dwa kolejne wyrazy wypisywanego ciągu nie są równe. Weźmy zatem cztery kolejne wyrazy a, b, c, d. Mamy nierówność $c \leqslant \frac{a+b}{2} < \max\{a, b\}$. Rzeczywiście c jest największym dzielnikiem nieparzystym a oraz b, więc jego uzyskanie wymaga podzielenia przez pewną dodatnią potęgę 2, bo suma $a+b$ jest zawsze parzysta. A druga nierówność? Otóż skoro liczby a, b są różne, to ich średnia nie może być równa żadnej z nich, a zatem jest mniejsza od większej z nich. Podobną nierówność dostajemy dla b, c, d – mianowicie $d \leqslant \frac{c+b}{2} < \max\{b, c\} \leqslant \max\{a, b\}$. Łącząc uzyskane nierówności otrzymujemy $\max\{a, b\} < \max\{c, d\}$. To jest jednak niemożliwe, bo nieskończony ciąg liczb dodatnich $\max\{f_n, f_{n+1}\}$ nie może być ściśle malejący. A zatem rzeczywiście pewne dwa elementy naszego ciągu muszą być równe, a jak pokazaliśmy wyżej, z tego wynika, że od pewnego miejsca ciąg ma tę samą wartość.

Teraz pokażemy, że ta wartość to $\mathrm{NWD}(f_1, f_2)$. Niech a, b, c to trzy kolejne wyrazy naszego ciągu. Niech $\mathrm{NWD}(a, b) = x$, $\mathrm{NWD}(b, c) = y$. Teza jest taka, że $x = y$. Oczywiście $c = \frac{a+b}{2^n}$, dla pewnego n całkowitego dodatniego. A zatem przekształcając to wyrażenie dostajemy $2^n c - b = a$. Liczby b, c są podzielne przez y. A zatem także a jest podzielna przez y. Wiemy jednak, że to x jest największym wspólnym dzielnikiem a, b, więc $y \leqslant x$.

Z drugiej strony, $a = xa'$ oraz $b = xb'$. Oczywiście x jest liczbą nieparzystą. A zatem c, jako największy dzielnik nieparzysty liczby $a + b$ równe jest iloczynowi x oraz największego dzielnika nieparzystego liczby $a' + b'$. W szczególności x jest wspólnym dzielnikiem zarówno b, jak i c. Zatem $x \leqslant y$. W rezultacie dostajemy $x = y$.

A zatem wszystkie kolejne NWD kolejnych wyrazów rozważanego ciągu są takie same i wynoszą $\mathrm{NWD}(f_1.f_2)$. Skoro, na mocy pierwszej części dowodu od pewnego momentu ciąg ten jest stały, to właśnie owa stała wartość wynosi $\mathrm{NWD}(f_1, f_2)$.

■

Fakt, że ograniczony i monotoniczny ciąg liczb całkowitych jest od pewnego momentu stały ma swój odpowiednik dla ciągów o dowolnych wyrazach. Oto kluczowy przykład, wywodzący się od następującego problemu praktycznego. Mamy kwotę N złotych i wpłacamy ją na konto z kapitalizacją roczną na poziomie x (procent). Po roku mamy $N + Nx = N(1 + x)$. Gdyby jednak wypłać pieniądze po pół roku i wpłacić je ponownie, wówczas otrzyma się po roku $N(1 + \frac{x}{2})^2$. Odwiedzając bank co miesiąc, wypłacając i wpłacają po roku mamy $N(1+\frac{x}{12})^{12}$. Czy jest sens tego zwiększania częstotliwości wypłat i wpłat?

Przykład. Niech $x \in \mathbb{R}$. Rozważmy ciąg (a_n) określony wzorem:

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Zauważmy, że $1 + \frac{x}{n} > 0$, o ile $n > -x \neq 0$. Pokażemy, że dla takich n mamy $a_{n+1} > a_n$, a więc, że ciąg (a_n) jest ROSNĄCY OD PEWNEGO MOMENTU. Gdy $x > 0$ jest po prostu rosnący, ale dla $x < 0$ mogą pojawić się wyrazy ujemne (tylko do pewnego momentu).

Mamy równoważność:

$$a_n < a_{n+1} \iff \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

a skoro $1 + x/n > 0$, to ostatnia nierówność równoważna jest następującej

$$\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} > \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n + x}.$$

Chcemy skorzystać w następujący sposób z nierówności Bernoullego

$$\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \geqslant 1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$$

i to ma sens, bowiem dla każdego $x \neq 0$ mamy (proszę to wykazać):

$$\frac{x}{(n+x)(n+1)} > -1.$$

Wykazaliśmy więc, że od momentu, w którym wyrażenie $1+\frac{x}{n}$ staje się dodatnie, ciąg (a_n) zaczyna rosnąć.

Zauważmy też, że ciąg (a_n) jest ograniczony z góry. Oczywiście tak jest, dla $x < 0$, bo jak wiemy od pewnego miejsca (od pewnego n) nasz ciąg jest dodatni i przy $x < 0$ mamy $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$, czyli też $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1$. Jeśli natomiast $n > x > 0$, to:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} < \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}.$$

Wyrażenie $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$ maleje wraz ze wzrostem n, bo jak wiemy dla $n > x$ mianownik rośnie. A zatem dla dowolnego całkowitego $k > x$ liczba

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^k} = \left(\frac{k}{k-x}\right)^k$$

jest ograniczeniem górnym ciągu (a_n).

Za tekstem dr. Krycha przytaczam szereg przybliżeń kolejnych wyrazów powyższego ciągu dla $x = -4$. gdzie dla pierwszego i trzeciego wyrazu dostajemy wartości ujemne:

$$\left(1+\frac{-4}{1}\right)^1 = -3, \quad \left(1+\frac{-4}{2}\right)^2 = 1, \quad \left(1+\frac{-4}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27} \approx -0,37, \quad \left(1+\frac{-4}{4}\right)^4 = 0,$$

$$\left(1+\frac{-4}{5}\right)^5 \approx 0,00032, \quad \left(1+\frac{-4}{6}\right)^6 \approx 0,0014, \quad \left(1+\frac{-4}{7}\right)^7 \approx 0,0027, \quad \left(1+\frac{-4}{8}\right)^8 \approx 0,0039.$$

Jednym z ważnych pytań, na które zwróciliśmy już uwagę jest różne tempo wzrostu wartości różnych ciągów. Podstawowym narzędziem, którego używa się przy uzyskiwaniu podstawowych wyników na temat zbieżności rozmaitych ciągów czy szeregów jest porównywanie ich z ciągiem lub szeregiem geometrycznym. Tym zajmiemy się (oczywiście w kontekście) szkolnym, na jednych z kolejnych zajęć.

Możliwa dalsza lektura – ciągi

- B. Bzdęga, *Całkowita dyskrecja*, Kącik Początkującego Olimpijczyka 1
  `www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2019/01/16/2019-01-delta-kpo.pdf`
- M. Krych, *Ciągi i ich granice*, Skrypt z analizy dla XIV LO, rozdział 15,
  `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt15-ciagi_D.pdf`.
- M. Krych, *Granica ciągu*, skrypt dla studentów Chemii,
  `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/chemia/2016-2017/ch13-14_ciagi-granice.pdf`.
- The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®), `https://oeis.org/`,
- A. Nowicki, *Ciągi rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, tom 7.
- W. Guzicki, *Równania rekurencyjne*, Wykłady z kombinatoryki (MIMUW),
  `https://www.mimuw.edu.pl/~guzicki/materialy/Rekurencja.pdf`.

Zadania – ciągi

Zadanie 1. *Wykaż, że w ciągu geometrycznym o wyrazach rzeczywistych mogą występować co najwyżej dwie liczby pierwsze.*

Zadanie 2. *Załóżmy, że* (a_n) *jest ciągiem geometrycznym liczb dodatnich, przy czym zachodzi równość* $a_4 + a_3 - a_2 - a_1 = 5$*. Znajdź (bez użycia pochodnej :) minimalną wartość wyrażenia* $a_5 + a_6$*.*

Zadanie 3. *Niech* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach całkowitych. Wykaż, że jeśli suma* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *jest potęgą dwójki, to* n *jest również potęgą dwójki.*

Zadanie 4. *Wykaż, że ciąg* $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ *jest arytmetyczny* $\iff$ *ciąg* a^2, b^2, c^2 *jest arytmetyczny.*

Zadanie 5. *Dla każdej liczby naturalnej* n *suma pierwszych* n *wyrazów pewnego ciągu* (x_n) *wynosi* $3n^2$*. Wykaż, że ciąg ten jest arytmetyczny.*

Zadanie 6. *Rozstrzygnij czy istnieje nieskończony, rosnący ciąg liczb naturalnych* (a_n)*, który spełnia warunki:* $a_n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ *oraz* $a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ *dla wszystkich* $n \geqslant 4$*.*

Zadanie 7. *Znajdź wzór wyrażający sumę* $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$*.*

Zadanie 8. $(\star)$ *Udowodnij, że jeżeli liczby* $a_1, \ldots, a_n$ *tworzą ciąg arytmetyczny* $(n \geqslant 2)$ *i żadna z nich nie jest zerem, to*

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Zadanie 9. $(\star)$ *Czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *spełniający równanie*

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}?$$

Zadanie 10. $(\star)$ *Znajdź* n*-ty wyraz ciągu* (a_n)*, w którym* $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6$ *oraz dla naturalnego* $k \geqslant 3$ *mamy* $a_{k-3} - 3a_{k-2} + 3a_{k-1} - a_k = 0$*.*

Zadanie 11. $(\star)$ *Ciąg* (x_n) *jest określony następująco:*

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2n-3}{2n} \cdot x_{n-1}, \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ *zachodzi nierówność* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1$*.*

Zadanie 12. $(\star)$ *Dla danej liczby naturalnej* $n > 1$ *określamy ciąg* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*:*

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{k+1} = a_k + \frac{a_k}{n^2}, \qquad \text{dla } k = 0, \ldots, n-1.$$

Udowodnij, że $a_n < 1$*.*

Zadanie 13. $(\star)$ *Znajdź wszystkie liczby całkowite* m*, które można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb nieparzystych.*

Zadanie 14. $(\star\star)$ *Ciągi* (a_n) *i* (b_n) *określone są układem równań rekurencyjnych*

$$\begin{cases} a_1 = 4, \quad b_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n \end{cases}$$

Wyznacz wzory ogólne ciągów $(a_n), (b_n)$*.*

Zadanie 15. ($\star\star$) *Dany jest ciąg* (a_n) *liczb rzeczywistych oreślony wzorem rekurencyjnym*

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}, \qquad \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wykaz, że dla każdeg liczby naturalnej n *poniższa liczba jest całkowita*

$$(1+a_1)(1+a_2)+(1+a_2)(1+a_3)+\ldots+(1+a_n)(1+a_{n+1})-2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Zadanie 16. ($\star\star$) *Ciągi* $(a_n),(b_n),(c_n)$ *są określone przez warunki*

$$a_1=4, \quad a_{n+1}=a_n(a_n-1), \quad 2^{b_n}=a_n, \quad 2^{n-c_n}=b_n$$

dla $n=1,2,3,\ldots$. *Wykaż, że ciąg* (c_n) *jest ograniczony.*

Rozdział 11

Pojęcie funkcji

11.1 Funkcja – ku formalnej definicji

Na początku szkoły średniej uczniowie zapoznają się z ważnym pojęciem funkcji.

Definicja 11.1: Funkcja

Niech X, Y będą zbiorami. Jeśli każdemu elementowi $x \in X$ przypisany został **dokładnie jeden** element $y \in Y$, to mówimy, że zdefiniowana została FUNKCJA przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli tę funkcję oznaczymy przez f, to piszemy: $f : X \longrightarrow Y$.

- Zbiór X nazywamy DZIEDZINĄ lub ZBIOREM ARGUMENTÓW FUNKCJI f, zbiór Y nazywamy PRZECIWDZIEDZINĄ funkcji f.
- Element $y \in Y$ przypisany ARGUMENTOWI $x \in X$ oznaczamy symbolem $f(x)$, tzn. $y = f(x)$, i nazywamy go WARTOŚCIĄ FUNKCJI f w punkcie x.
- Podzbiór zbioru Y złożony ze wszystkich wartości funkcji f nazywamy ZBIOREM WARTOŚCI FUNKCJI f.

Definicję tę można nieco poprawić jeśli dysponujemy pojęciem iloczynu kartezjańskiego zbiorów $X \times Y$, czyli zbioru złożonego z uporządkowanych par elementów (x, y), gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$. Oto ta definicja.

Definicja 11.2: Funkcja (oraz jej wykres)

Niech X, Y będą zbiorami. Podzbiór $f \subseteq X \times Y$ nazywamy FUNKCJĄ przekształcającą zbiór X w zbiór Y, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki element $y \in Y$, że $(x, y) \in f$. Ten element y nazywamy wartością funkcji f w punkcie x i oznaczamy symbolem $f(x)$.

Z formalnego punktu widzenia druga definicja jest w zasadzie definicją wykresu funkcji. Oczywiście pojęcie funkcji odnosimy przede wszystkim do FUNKCJI LICZBOWYCH, czyli takich, gdzie X, Y są podzbiorami liczb rzeczywistych. Dobrze by jednak było, by z pojęciem funkcji kojarzone były również podstawowe przekształcenia geometryczne (obroty, symetrie, a może nawet ich złożenia), kombinatoryczne (permutacje) czy nawet probabilistyczne (prawdopodobieństwo – w pewnych ujęciach) czym się tu nie zajmujemy.

Mówiąc dokładniej zajmować się będziemy sytuacją, gdy $D \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem, a $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją. Najczęściej w kontekście szkolnym rozważa się funkcje określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$, na półprostych, na przedziałach lub sumach przedziałów i półprostych. Oczywiście mówimy też o funkcjach „dyskretnych”, czyli określonych na liczbach całkowitych, naturalnych, czy na skończonych zbiorach.

Podejścia przedstawione wyżej różnią się od „szkolnego” chyba przede wszystkim w tym, że w szkole forsowana jest intuicja „zależności funkcyjnej”, wyrażanej najczęściej poprzez wzór, tabelkę wartości lub wykres (lub jego część). Nawet przyjmując, że dziedzinę określamy jako podzbiór zbioru $\mathbb{R}$, to jaka jest dziedzina funkcji określonej za pomocą wzoru

$$f(x) = \frac{x}{x-1}?$$

Oczywiście największy (pod względem inkluzji) podzbiór $\mathbb{R}$, dla którego wzór powyżej ma sens, to zbiór $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Równie dobrze można jednak rozważać funkcje o dziedzinie $[2, 5)$ lub $\{0, \sqrt{2}, \pi\}$, zadane tym samym wzorem. Miewa to (formalnie) praktyczne znaczenie w kontekście liczenia granic.

Zgodnie z uwagami przedstawionymi przez dr. Krycha w tekście o funkcjach liczbowych, w praktyce (a nawet w rozważaniach analitycznych) często zapisujemy funkcje w postaci $f(x)$ zamiast f i mówimy o funkcjach za pomocą ich wzorów: $\frac{x}{x-1}$, x^2, $x - 14$, $\sqrt{x}$ itd. Przyjmujemy wtedy, że dziedziną jest największy zbiór, na którym funkcję można zdefiniować danym wzorem. Gdy nie jest to jasne, trzeba napisać czym jest dziedzina funkcji. Przy takiej umowie należy również pamiętać, że równość typu $f(x) = g(x)$ oznacza równość wartości funkcji f i g we wspólnym punkcie dziedziny x, a nie równość funkcji f i g.

11.2 Podstawowe typy funkcji rozważane w szkole

Określimy teraz podstawowe typy funkcji rozważanych w szkole.

Definicja 11.3: Funkcje wielomianowe

Funkcją wielomianową stopnia n nazywamy funkcję $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną (dla każdego $x \in \mathbb{R}$) wzorem:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie n to pewna nieujemna liczba całkowita, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ to liczby rzeczywiste oraz $a_n \neq 0$. Ważne klasy:

- Funkcją stałą nazywamy funkcję wielomianową stopnia 0 określoną wzorem $f(x) = a$. Jeśli $a = 0$, to funkcja stała określona wzorem $f(x) = 0$ nazywana jest też funkcją zerową.
- Funkcją liniową nazywamy funkcję wielomianową stopnia 1 określoną wzorem $f(x) = ax+b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
- Funkcją kwadratową nazywamy funkcję wielomianową stopnia 2 określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Przypomnijmy, że wprowadzamy tu rozróżnienie między wielomianem, traktowanym jako pewien formalny napis (a raczej ciąg liczb rzeczywistych o skończenie wielu wyrazach niezerowych), a funkcją wielomianową. Biorąc pod uwagę, że współczynniki rozważanych przez nas wielomianów są zbiorami nieskończonymi, ma to raczej znaczenie dydaktyczne (omówimy je na kolejnym wykładzie). W podręcznikach pojęcia te rozdziela się; mowa jest osobno o wielomianach, równaniach wielomianowych i funkcjach wielomianowych.

Definicja 11.4: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Funkcję o dziedzinie będącej zbiorem liczb rzeczywistych zadaną wzorem

$$f(x) = a^x$$

nazywamy funkcją wykładniczą. Niech $a > 0$ oraz $a \neq 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Funkcję o dziedzinie $(0, \infty)$ zadaną wzorem

$$f(x) = \log_a x,$$

gdzie $a^{f(x)} = x$, nazywamy funkcją logarytmiczną.

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest przedział $(0, \infty)$. O własnościach tej funkcji rozmawiać będziemy osobno. Również w tym przypadku rozdziela się pojęcie funkcji od pewnego typu równań, zwanych wykładniczymi i logarytmicznymi. Mimo wszystko w rozwiązywaniu tych równań korzysta się z własności tych funkcji. Warto powiedzieć kilka słów o definicji funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym. Niekiedy, np. w przywoływanych podręcznikach H. Pawłowskiego (klasa 3) mówi się o tym temacie w pełnej ogólności, choć nie jest to zagadnienie elementarne (trzeba wykazać np. istnienie liczby $2^{\sqrt{2}}$).

Definicja 11.5: Funkcja potęgowa o wykładniku rzeczywistym

Niech $r \in \mathbb{R}$. Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = x^r$ określamy, dla:

- $D = \mathbb{R}$, gdy r jest dodatnią liczbą naturalną,
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy r jest ujemną liczbą całkowitą lub zerem,
- $D = [0, \infty)$, gdy r dodatnią liczbą wymierną, ale nie całkowitą,
- $D = (0, \infty)$, gdy r jest ujemną liczbą wymierną (ale nie w $\mathbb{Z}$) lub dowolną liczbą niewymierną.

Czy dla wykładników wymiernych dziedzinę można rozszerzyć? Nie bardzo. Nie chcę wnikać w tą tematykę, ewentualnie odsyłając do wykładów dr. Krycha z analizy matematycznej (pierwszy wykład pod adresem `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM1skrypt/am1_cz_01-ciagi.pdf`, str. 19.) ale chcę zauważyć, że przyjmujemy $(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{(-1)^1} = -1$, ale z drugiej strony $(-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$.

Definicja 11.6: Funkcja homograficzna

Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, przy czym $ad - bc \neq 0$ oraz $c \neq 0$. Jeżeli funkcję f określoną na zbiorze $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, \infty)$ można zapisać wzorem:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Definicja 11.7: Funkcja wymierna

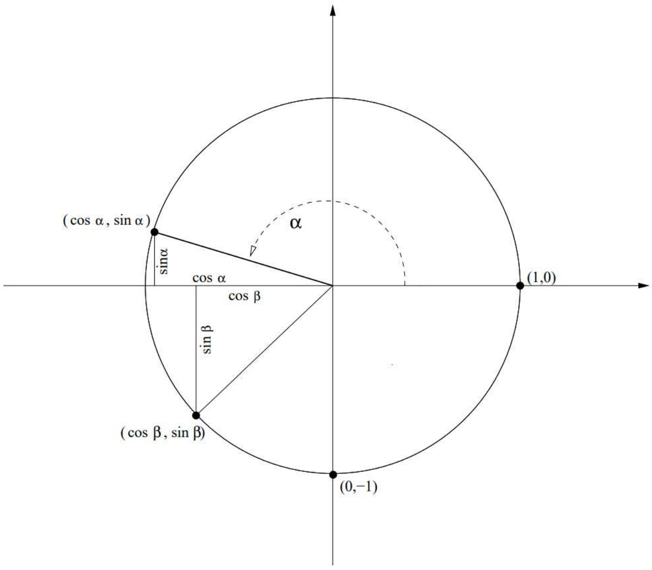
Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ oraz $w(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ będą wielomianami, przy czym $v(x)$ nie jest wielomianem zerowym oraz niech D będzie zbiorem liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczb rzeczywistych x takich, że $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$. Funkcję o dziedzinie D, którą można zapisać w postaci

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

nazywamy FUNKCJĘ WYMIERNĄ.

W szkole rozważa się również funkcje trygonometryczne. Funkcje te związane są z miarami kątów, które utożsamiamy z liczbami rzeczywistymi. Oto jak to robimy. Rozważamy kąty w wierzchołku w początku układu współrzędnych, których pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś pozioma. Mówimy, że kąt ma t radianów, jeśli drugie ramię przecina okrąg O o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1, w punkcie P takim, że długość łuku okręgu O zaczynającego się w punkcie $(1, 0)$ i kończącego się w punkcie P jest równa t. Kąt prosty ma więc miarę równą $\frac{\pi}{2}$, kąt półpełny ($180°$, ma miarę π. Również kąt $-90°$ o mierze $-\pi/2$ jest również prosty, ale odmierzony w przeciwnym kierunku.

Załóżmy, że odmierzyliśmy łuk o mierze t od punktu $(1, 0)$ do punktu P. Wtedy współrzędnymi punktu p są liczby, które oznaczamy jako $\cos t$ oraz $\sin t$ – to jest definicja SINUSA i KOSINUSA kąta o mierze t.



Rys. 1 Definicja sinusa i cosinusa kąta o mierze $t \in \mathbb{R}$. Rysunek na podstawie materiałów dr. Krycha.

Funkcje sinus i cosinus mają dziedzinę rzeczywistą. definiujemy też:

- dla $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ określamy funkcje TANGENS $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
- dla $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ określamy funkcje COTANGENS $\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

11.3 Operacje na funkcjach, złożenie, odwrotność

Funkcje liczbowe określone na tym samym zbiorze można dodawać, odejmować i mnożyć oraz mnożyć przez liczbę. Mamy wtedy oznaczenia $f+g$, $f-g$, fg i λf. Jeśli funkcja f nie znika w żadnym punkcie tzn. jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to dopuszczalne jest też definiowanie ilorazu $\frac{f}{g}$.
Nowe funkcje można określać również poprzez niezwykle istotną operację składania.

Definicja 11.8: Złożenie funkcji, funkcja odwrotna

Jeśli dane są dwie funkcje $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ to funkcja $h : X \to Z$ zdefiniowana wzorem

$$h(x) = g(f(x))$$

nazywana jest ZŁOŻENIEM (lub SUPERPOZYCJĄ funkcji g z funkcję f. Oznaczamy ją symbolem $g \circ f$. Funkcję f nazywamy w tym złożeniu funkcją WEWNĘTRZNĄ, zaś g – funkcją ZEWNĘTRZNĄ.

Funkcję $g : Y \to X$ nazywamy ODWROTNĄ do funkcji $f : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są identycznościami, to znaczy dla dowolnych $x \in X$ oraz $y \in Y$ mamy

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y.$$

Własności algebraiczne składania funkcji zupełnie nie przypominają własności mnożenia. Można rozważyć na przykład funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorami:

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = 3.$$

Wówczas

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3) = 3^3 = 27, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 3.$$

A zatem nawet jeśli $X = Z$, to zwykle $g \circ f \neq f \circ g$.

Funkcją odwrotną do funkcji x^2, określonej na zbiorze $(0, \infty)$ jest funkcja $\sqrt{x}$. Widzimy więc, że wybór dziedziny funkcji może mieć istotne znaczenie dla kwestii istnienia funkcji odwrotnej. Czy funkcja ta jest jednoznacznie wyznaczona? Tak w istocie jest i w tym celu wprowadza się kolejne podstawowe pojęcia.

Definicja 11.9: Funkcje różnowartościowe i na.

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$:

- przekształca zbiór X NA zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości funkcji f równy jest jej przeciwdziedzinie.
- jest RÓŻNOWARTOŚCIOWA, jeśli różnym elementom dziedziny przypisuje różne wartości, tzn. gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi implikacja

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_! = x_2.$$

Funkcja $f(x) = x^2$ określona w dziedzinie rzeczywistej nie jest różnowartościowa. Różnowartościowe są natomiast zarówno funkcje wykładnicze (dla $a \neq 1$) jak i logarytmiczne, co w zasadzie jest wynikiem przekraczającym w pełnej ogólności ramy szkolne, a jednak niezbędnym do rozwiązywania choćby równań tego typu. Oczywiście ostatnie dwie definicje mają sens nie tylko dla funkcji liczbowych.

Twierdzenie 11.1: O istnieniu funkcji odwrotnej

Funkcja $f : X \to Y$ ma funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa i przekształca zbiór X *na* zbiór Y (funkcje takie nazywamy *bijekcjami*).

Dowód. Twierdzenie jest sformułowane w postaci równoważności. Załóżmy najpierw, że funkcja f posiada funkcję odwrotną $g : Y \to X$. Pokażemy, że f jest bijekcją.

Niech x_1, x_2 będą różnymi elementami dziedziny X. Jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

wbrew założeniu. Zatem $x_1 \neq x_2$. Funkcja f jest więc różnowartościowa. Wobec istnienia funkcji odwrotnej mamy

$$y = f(g(y)),$$

dla każdego $y \in Y$, więc każdy element y zbioru Y jest wartością funkcji f. A zatem f jest na, a łącznie – bijekcją.

Załóżmy teraz, że różnowartościowa funkcja $f : X \to Y$ przeprowadza zbiór X na zbiór Y. Określamy funkcję $g : Y \to X$ warunkiem:

$$g(y) = x \iff y = f(x).$$

Ponieważ dla każdego elementu $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden element $x \in X$ spełniający powyższy warunek (definicja funkcji), więc wzór $g(y) = x$ rzeczywiście określa funkcję. Z tego określenia wynika także, że:

$$f(g(y)) = f(x) = y, \quad g(f(x)) = g(y) = x,$$

co oznacza, że g jest funkcją odwrotną do f. □

Powyższy dowód łatwo implikuje, że jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

Zachęcam Czytelnika do przypomnienia sobie lub do próby udowodnienia innych istotnych własności operacji składania funkcji. Warto przypomnieć, że dowody równości funkcji opierać można na różnych technikach. Podstawowa polega na sprawdzeniu, że dla każdego punktu ze wspólnej dziedziny dwóch rozważanych funkcji, ich wartości w tym punkcie są równe. Proszę spróbować wykorzystać tę metodę, dowodząc następujące fakty.

- składanie funkcji jest dzianiem łącznym, tzn. rozważając funkcje $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ oraz $h : Z \to T$ mamy
$$h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f.$$
- dla funkcji odwracalnych $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ złożenie $g \circ f$ jest funkcją odwracalną, oraz
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Definicja 11.10: Iteracja funkcji

Niech $f : X \to X$ będzie funkcją oraz $n \geqslant 1$ – liczbą naturalną. Przez n-tą ITERACJĘ funkcji f rozumiemy funkcję $f^{(n)} : X \to X$ daną warunkiem:

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}.$$

Innymi słowy, dla każdego $x \in X$ mamy $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$.

Zadanie 92. *Niech* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Wyznacz* $f^{(1999)}(2000)$.

ROZWIĄZANIE. Korzystając ze wzoru funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$ obliczamy

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}, \quad f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{x}))} = x.$$

A zatem $f^{(1999)}(2000) = f^{(3\cdot 666+1)}(2000) = f(2000) = \frac{-1}{1999}$. ■

Zadanie 93. *Wyznacz wszystkie funkcje różnowartościowe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniające dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$*:*

$$f(f(y) + x) = f(x + y) + 1.$$

ROZWIĄZANIE. Załóżmy, że pewne różnowartościowa funkcja f spełnia podane równanie. Zamieniając nim rolami x oraz y otrzymujemy równanie $f(f(y)+x) = f(x+y) = 1$. Porównując otrzymane równanie z wyjściowym dostajemy, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(y) + x) = f(f(x) + y).$$

Na mocy różnowartościowości f otrzymujemy, że $f(x)+y = f(y)+x \Rightarrow f(x) - f(y) = x - y$. Stąd mamy

$$1 = f(f(x) - y) - f(x + y) = f(x) + y - (x + y) = f(x) - x.$$

Stąd $f(x) = x + 1$. ■

Równania takie, jak w ostatnim zadaniu nazywamy RÓWNANIAMI FUNKCYJNYMI.

11.4 Monotoniczność funkcji

Funkcje liczbowe mają dodatkowe własności związane z porządkiem w dziedzinie i przeciwdziedzinie.

Definicja 11.11: Monotoniczność funkcji

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$.

- funkcję f nazywamy ŚCIŚLE ROSNĄCĄ, jeśli dla każdych $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) < f(y)$,
- funkcję f nazywamy ŚCIŚLE MALEJĄCĄ, jeśli dla każdych $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) > f(y)$,
- funkcję f nazywamy NIEMALEJĄCĄ, jeśli dla każdych $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \leqslant f(y)$,
- funkcję f nazywamy NIEROSNĄCĄ, jeśli dla każdych $x, y \in D$ z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \geqslant f(y)$,

Mówimy, że funkcja jest MONOTONICZNA na D jeśli ma jedną z czterech własności wyżej.

Pojęcia powyższe nie są w każdym podręczniku jednakowo definiowane. Często mówi się po prostu o funkcjach rosnących/malejących, nie mówiąc o niemalejących czy nierosnących.

Funkcja $f(x) = 7 + x^3$ jest rosnąca, bowiem jeśli $x_1 < x_2$, to

$$f(x_2) - f(x_1) = 7 + x_2^3 - 7 - x_1^3 = x_2^3 - x_1^3 > 0.$$

Funkcja $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$ jest ściśle malejąca, bowiem jeśli $x_1 < x_2$, to:

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\sqrt{x_1^2+1}}{\sqrt{x_2^2+1}} \Rightarrow \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2} \cdot \frac{x_1^2+1}{x_2^2+1} = \frac{1+\frac{1}{x_1^2}}{1+\frac{1}{x_2^2}}.$$

Jest jasne, że $1 + \frac{1}{x_1^2} > 1 + \frac{1}{x_2^2}$, bowiem $x_1 < x_2$ a zatem co do modułu, iloraz $f(x_2)/f(x_1)$ jest większy niż 1. Zatem funkcja f jest ściśle malejąca. **Uwaga.** W rozwiązaniu brakuje pewnego elementu. Jakiego? Chodzi o przypadek, gdy $f(x_1) = 0$. Jak uzupełnić rozwiązanie?

Oczywiście nie każda funkcja jest w całej dziedzinie monotoniczna. Dla funkcji rzeczywistych mówimy często o PRZEDZIAŁACH MONOTONICZNOŚCI funkcji, a więc o maksymalnych (ze względu na inkluzję) zbiorach, na których funkcja jest monotoniczna. Dla przykładu, funkcja $f(x) = x^2$ jest ściśle malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz ściśle rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. Warto jednak uważać: funkcja $\frac{1}{x}$ nie jest malejąca w całej swojej dziedzinie. Jest natomiast malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$.

Drugie ostrzeżenie: funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie musi mieć żadnych przedziałów monotoniczności. Znanym przykładem jest FUNKCJA DIRICHLETA:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Problematyce wyznaczania przedziałów monotoniczności i szkicowania wykresów funkcji zajmiemy się na ostatnim wykładzie, gdy mowa będzie o rachunku różniczkowym. Przyjrzyjmy się krótko zastosowaniu monotoniczności do rozwiązywania nierówności. Oto oczywisty wniosek z definicji.

Wniosek 11.1

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna na tym przedziale, to swoje wartości najmniejszą i największą, osiąga w punktach $\{a, b\}$.

Zacytujmy przykład zastosowania tego faktu z książki *Kółko matematyczne dla olimpijczyków.*

Zadanie 94. *Udowodnij, że jeśli liczby a, b, c są z przedziału $[0, 1]$, to zachodzi nierówność*

$$a + b + c \leqslant ab + bc + ca + 1.$$

ROZWIĄZANIE. Rozważamy na przedziale $[0, 1]$ funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = x + b + c - bx - bc - cx = (1 - b - c)x + b + c - bc.$$

Jest ona monotoniczna, jako funkcja liniowa. W szczególności największą wartość przyjmuje w zerze lub jedynce. Mamy $f(0) = 1 + (1-b)(c-1) \leqslant 1$ oraz $f(1) = 1 - bc \leqslant 1$, więc $f(x) \leqslant 1$, dla każdego $x \in [0, 1]$. Stąd $f(a) \leqslant 1$, co daje tezę zadania. ■

Dla porządku, wspomnimy tu pojęcie o centralnym znaczeniu w szkole. Tu nie poświęcamy mu wiele miejsca. O ile nie przejdziemy do konkretnych klas funkcji lub do rozważań o ciągłości i pochodnej, rozważania ogólne mają sens raczej w kontekście funkcji dyskretnych, co z braku miejsca pomijam.

Definicja 11.12: Miejsce zerowe

Każdy element $x \in X$ taki, że $f(x) = 0$ nazywamy MIEJSCEM ZEROWYM funkcji f.

11.5 Modyfikacje wykresów funkcji

Należałoby poświęcić jeszcze trochę miejsca ogólnym sposobom modyfikowania wykresu funkcji. W szkole mówi się przy tej okazji o wektorach i pokrewnych strukturach, choć oczywiście zasadniczo chodzi po prostu o składanie pewnych funkcji. I tak mamy sześć podstawowych typów transformacji funkcji f.

(a) Funkcja $y = f(x)+q$, gdzie $q \in \mathbb{R}$ ma wykres powstający z wykresu f przez przesunięcie o q jednostek w górę (jeśli $q > 0$) albo w dół (dla $q < 0$).

(b) Funkcja $y = f(x - p)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ ma wykres powstający z wykresu f przez przesunięcie o p jednostek w prawo (jeśli $p > 0$) albo w lewo (dla $q < 0$).

(c) Funkcja $y = p \cdot f(x)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, ma wykres powstający z wykresu f przez powinowactwo prostokątne względem osi OX o skali k, czyli intuicyjnie mówiąc: rozciągając centralnie (w pionie) względem osi OX, gdy $|k| > 1$, i spłaszczając, gdy $|k| < 1$. Następuje zmiana skali względem OX.

(d) Funkcja $y = f(k \cdot x)$, gdzie $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, ma wykres powstający z wykresu f przez powinowactwo prostokątne względem osi OY o skali k, czyli intuicyjnie mówiąc: rozciągając centralnie (w poziomie) względem osi OY, gdy $|k| > 1$, i spłaszczając, gdy $|k| < 1$. Następuje zmiana skali względem OY.

(e) Funkcja $y = -f(x)$, to szczególny przypadek sytuacji (c) dla $p = -1$, czyli odbicie wykresu f względem osi OX.

(f) Funkcja $y = f(-x)$, to szczególny przypadek sytuacji (c) dla $k = -1$, czyli odbicie wykresu f względem osi OY.

Czasem do operacji tych dopisuje się też $|f(x)|$ oraz $f(|x|)$.

11.6 Funkcje parzyste i nieparzyste. Funkcje okresowe

W związku z wymienionymi wyżej własnościami można przypomnieć dwa ważne typy funkcji.

Definicja 11.13: Funkcje parzyste i nieparzyste

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywana jest:

- PARZYSTĄ, jeśli $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
- NIEPARZYSTĄ, jeśli $f(x) = -f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Jest jasne, że jedyną funkcją, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta jest funkcja zerowa. Zachęcam Czytelnika do sprawdzenia, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.

Na koniec dodajmy jeszcze kilka zdań o mniej elementarnej, ale jednak obecnej w szkole własności.

Definicja 11.14: Funkcja okresowa

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ i niech $f : D \to \mathbb{R}$. OKRESEM funkcji f nazwiemy dowolną liczbę $T \neq 0$ (czasem zakłada się, że $T > 0$) o następujących własnościach:

- dla dowolnej liczby $x \in D$ liczby $x+T$ oraz $x-T$ należą do D (czasem opuszcza się $x-T \in D$)
- dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$.

Funkcję, która ma okres nazywamy funkcją OKRESOWĄ.

Podstawowymi szkolnymi przykładami funkcji okresowych są oczywiście funkcje trygonometryczne:

- okresem funkcji sinus i cosinus jest dowolna całkowita dodatnia wielokrotność 2π,
- okresem funkcji tangens i cotangens jest dowolna całkowita dodatnia wielokrotność π.

Jeśli wśród wszystkich okresów funkcji f istnieje najmniejszy, to nazywamy go OKRESEM ZASADNICZYM. Oczywiście taki okres nie musi istnieć, jak na przykład dla funkcji stałej (okresem jest dowolna liczba dodatnia) oraz funkcji Dirichleta (jej okresem jest dowolna liczba wymierna). Ostatnim przykładem jest słynny problem Collatza pytający czy pewna funkcja jest od pewnego momentu okresowa.

Definicja 11.15: Problem Collatza (1937)

Definiujemy następującą FUNKCJĘ COLLATZA $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{gdy n jest liczbą nieparzystą,} \\ \frac{n}{2}, & \text{gdy n jest liczbą parzystą.} \end{cases}$$

Rozstrzygnąć czy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ w ciągu $f^{(k)}(n)$ znajduje się liczba 1.

Zagadnienie to było rozważane przez wielu słynnych matematyków, między innymi Ulama i Kakutaniego. Paul Erdős wypowiedział o nim słynne zdanie: „mathematics is not yet ready for such problems”.

Przyjrzyjmy się ciągom $(n, f(n), f^{(2)}(n), \ldots)$ dla kilku liczb całkowitych:

$$(n, f(n), f^{(2)}(n), \ldots) = \begin{cases} n=5: & (5,16,8,4,2,1,4,2,1,\ldots) \\ n=6: & (6,3,10,5,16,8,4,2,1,4,2,1,\ldots) \\ n=7: & (7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1,\ldots) \\ n=8: & (8,4,2,1,4,2,1,\ldots) \\ n=9: & (9,28,14,7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1,\ldots) \\ n=10: & (10,5,16,8,4,2,1,4,2,1,\ldots) \end{cases}.$$

Jak widzimy, ciągi te w końcu „schodzą” do 1, a potem powtarza się cykl $(1,4,2)$. Można by spodziewać się, że ciągi te nie będą osiągały zawrotnych wartości w porównaniu do liczby początkowej. Tymczasem patrząc na $n = 27$ stwierdzamy, że $f^{(36)}(n) = 1186$, zaś $f^{(77)}(n) = 9232$. Okazuje się to jednak być największa wartość tego ciągu, a już $f^{(111)}(n) = 1$. Zachowanie $f^{(k)}(n)$ nie jest łatwo przewidywalne.

Możliwa dalsza lektura – funkcje

- B. Bzdęga, *Gdzie się podziały tamte funkcyje...*, Kącik początkującego olimpijczyka, Delta 11/2021, `deltami.edu.pl/2021a/11/2021-11-delta-art-15-kpo.pdf`
- M. Krych, *Relacje i funkcje*, Skrypt dla XIV LO, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt07-relfun_D.pdf`
- M. Krych, *Funkcje liczbowe*, Skrypt dla XVI LO, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt10-funkcje_D.pdf`
- H. Pawłowski, *Matematyka 1-3. Zakres rozszerzony.* Wydawnictwo Operon 2004.

Zadania – funkcje

Zadanie 1. *Funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana jest wzorem* $f(x) = \frac{2}{4^x+2}$. *Oblicz:*

$$f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{2001}\right).$$

Zadanie 2. *Znajdź okres zasadniczy funkcji* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *danej wzorem*

$$f(x) = |\cos 3x + \sin 3x| - |\cos 3x - \sin 3x|.$$

Zadanie 3. *Funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia, dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *równanie*

$$f(1 - f(x)) = x.$$

Wykaż, że f *ma funkcję odwrotną.*

Zadanie 4. *Dana jest funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *że dla każdej liczby rzeczywistej* x *zachodzą równości:*

$$f(x) = f(2x) = f(1 - x).$$

Udowodnij, że funkcja f *jest okresowa.*

Zadanie 5. *Niech* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami okresowymi. Wykaż, że jeśli istnieją okresy* u, v, *odpowiednio funkcji* f, g *takie, że* $u/v \in \mathbb{Q}$, *to funkcja* $f + g$ *jest okresowa. Czy funkcja* $f + g$ *musi posiadać okres zasadniczy?*

Zadanie 6. *Rozwiąż równanie* $\cos(\cos(\cos(\cos(x)))) = \sin(\sin(\sin(\sin(x))))$.

Zadanie 7. ($\star$) *Znajdź wszystkie funkcje* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniające dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$ *równanie*

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

Zadanie 8. ($\star$) *Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniające dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$ *równanie*

$$f(f(x) - y) + f(f(y) - x) = 0.$$

Zadanie 9. ($\star$) *Znajdź wszystkie funkcje nierosnące* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełniające dla wszystkich* $x, y \in \mathbb{R}$ *równanie*

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

Zadanie 10. ($\star$) *Funkcja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ma tę własność, że funkcja*

$$g(x) = f(x) + \sin((f(x))$$

jest okresowa. Udowodnij, że funkcja f *też jest okresowa.*

Zadanie 11. ($\star$) *Udowodnij, że jeśli liczby* a, b, c *są z przedziału* $[0, 1]$, *to*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

Zadanie 12. ($\star$) *Wykaż, że jeśli dla każdego* $x \in [-1, 1]$ *zachodzi nierówność* $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$, *to dla każdego* $x \in [-1, 1]$ *zachodzi nierówność* $|cx^2 - bx + a| \leqslant 2$.

Zadanie 13. ($\star\star$) *Niech* $x_i \in [0, 1]$, *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Udowodnij, że suma*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

nie przekracza $[n/2]$, *dla* $n \geqslant 2$.

Zadanie 14. ($\star\star$) *Funkcja rosnąca* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *spełnia warunek* $f(f(n)) = 3n$. *Oblicz* $f(2001)$.

Rozdział 12

Funkcje i równania wielomianowe

12.1 Wielomiany jako obiekty algebraiczne

Wielomiany i funkcje wielomianowe to jeden z szerzej omawianych tematów szkolnych. Jednocześnie jest to temat dość specyficzny, w którym ukryte są różne delikatności. Zasadnicze ujęcie przedmiotu ma dwa oblicza: algebraiczna i funkcyjne. Zacznijmy od tego pierwszego.

Definicja 12.1: Wielomian

Wielomianem zmiennej x o współczynnikach w zbiorze K z wyróżnionym elementem 0 nazywamy wyrażenie:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. Utożsamiamy przy tym takie napisy, jeśli różnią się o składniki postaci $0 \cdot x^i$ oraz jeśli różnią się kolejnością składników.

Innymi słowy, wielomiany zmiennej x o współczynnikach w zbiorze K utożsamiać można z ciągami nieskończonymi (a_i), gdzie $a_i \in K$, dla $i \in \mathbb{N}$, oraz gdzie $a_i \neq 0$ tylko dla skończenie wielu i.

Elementy a_i nazywamy współczynnikami wielomianu. Zbiór wielomianów o współczynnikach ze zbioru K oznaczamy przez $K[x]$. Jeśli wszystkie współczynniki wielomianu w są równe 0, to piszemy $w = 0$, a wielomian w nazywamy wówczas wielomianem zerowym.

Definicja powyższa jest bardzo szeroka, bowiem nie podaje żadnych nformacji o strukturze zbioru K. W kontekście szkolnym spotykamy najczęściej sytuację, gdy $K = \mathbb{R}$, ale też niekiedy $K = \mathbb{Z}$. Bardzo rzadko rozważamy sytuacje $K = \mathbb{Q}$ lub inne, znane z matematyki akademickiej, choćby $\mathbb{C}[x]$ czy $\mathbb{Z}_p[x]$. Nie jest to miejsce na wykład z teorii pierścieni, więc powiemy tylko, że najbardziej typową sytuacją jest założenie, że K jest ciałem lub ewentualnie tzw. dziedziną całkowitości, czyli pierścieniem przemiennym z 1, w którym z równości $ab = 0$ wynika, że $a = 0$ lub $b = 0$. Ma to duże znaczenie, o czym przekonamy się dalej. Domyślnie zakładamy jednak, że $K = \mathbb{R}$.

Kluczowa obserwacja wynikająca z definicji jest następujaca.

Wniosek 12.1: Równość wielomianów

Jeśli $w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ oraz $v = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych n, m, to następujące warunki są rónoważne:

- $w = v$ jako elementy $K[x]$.
- $m = n$ oraz $a_i = b_i$, dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$.

Powyższy wniosek łatwo przełożyć na język ciągów nieskończonych o skończenie wielu niezerowych wyrazach ze zbioru K. Dwa wielomiany, widziane jako ciągi, są równe, gdy są równe jako ciągi.

Definicja 12.2: Stopień wielomianu

Niech $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$. Stopniem wielomianu f, ozn $\deg(f)$, nazywamy:

- największe takie i, że $a_i \neq 0$, o ile f nie jest wielomianem zerowym.
- $-\infty$, jeśli f jest wielomianem zerowym.

Jeśli $f \neq 0$ to współczynnik $a_{\deg(f)}$ nazywamy współczynnikiem wiodącym wielomianu f.

Przykłady. Mamy $\deg f = 4, \deg p = 7$ przy czym

$$f = 1 - 2x + 7x^3 + 5x^4 \in \mathbb{R}[x], \quad p = \frac{1}{101}t^7 - \sqrt{2}t^3 - 99 \in \mathbb{R}[t].$$

W $K[x]$ określamy działania dwuargumentowe dodawania i mnożenia, pochodzące[1] od działań w K.

Definicja 12.3: Suma i iloczyn wielomianów

Dla wielomianów $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ ze zbioru $K[x]$ określamy:

- sumę $f + g$ wielomianów f, g daną wzorem

  $$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$

  Innymi słowy współczynnik wielomianu $f + g$ stojący przy x^i równy jest $a_i + b_i$.

- iloczyn $f \cdot g$ wielomianów f, g dany wzorem

  $$f \cdot g = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + a_nb_mx^{n+m}.$$

  Innymi słowy współczynnik wielomianu $f \cdot g$ stojący przy x^i równy jest $\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$.

Jako ćwiczenie pozostawiamy następujące własności stopnia, związane z wprowadzonymi operacjami[2]:

$$\deg(f + g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)), \quad \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g). \qquad (\heartsuit)$$

12.2 Funkcje wielomianowe

Czas przejść do rozważań o funkcjach wielomianowych. Definicja pojawiła się już na ostatnim wykładzie.

Definicja 12.4: Funkcja wielomianowa

Niech $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$. Funkcję $f : K \to K$ daną wzorem

$$f(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \ldots + a_ns^n$$

nazwiemy funkcją wielomianową odpowiadającą wielomianowi f.

Zauważmy, że z punktu widzenia podejścia funkcyjnego, dwie funkcje wielomianowe f, g są równe, jeśli istnieją takie wielomiany $F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $G = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m \in K[x]$, że dla każdego $s \in K$ mamy

$$f(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \ldots + a_ns^n = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \ldots + b_ms^m = g(s).$$

[1] Korzystamy z przemienności dodawania i mnożenia w K oraz z umowy, że $x^n \cdot a = ax^n$, dla $a \in K$.

[2] Trzeba tu dodać trzy zastrzeżenia. Pierwsze – te działania mają sens także, gdy f, g są zerowe, przy naturalnych umowach typu $\max(-\infty, 1) = 1$, $-\infty + n = \infty$, $-\infty + -\infty = -\infty$. Druga – równość w pierwszej nierówności zachodzi wtedy (ale nie tylko wtedy), gdy $\deg(f) \neq \deg(g)$. Trzecia – jeśli K nie jest ciałem, wówczas tożsamość dla iloczynu trzeba zmodyfikować. Np. dla wielomianów $f, g \in \mathbb{Z}_4[x]$ postaci: $f = 2x, g = 1 + 2x$ mamy $\deg(f) = \deg(g) = 1$, ale $\deg(fg) = 1$.

To kryterium równości funkcji wielomianowych nie daje podstawy do łatwego rozstrzygnięcia, czy wielomiany F, G są równe. Wymaga to uzasadnienia. Nie jest trudno natomiast porównywać niektóre współczynniki wielomianów, choćby współczynniki a_0 oraz b_0, równe odpowiednio $f(0)$ oraz $g(0)$. Z uwagi na to, że w szkole następuje zatarcie pomiędzy pojęciami wielomianu i funkcji wielomianowej tak, że w zasadzie pod pojęciem wielomianu umieszcza się w istocie funkcję wielomianową, formułuje się tzw. TWIERDZENIE O WIELOMIANACH RÓWNYCH, mówiące że równość dwóch funkcji wielomianowych o współczynnikach w zbiorze $\mathbb{R}$ pociąga za sobą równość wszystkich odpowiadających im wielomianów. Wynik ten w szczególności oznacza, że istnieje bijekcja pomiędzy wielomianami i odpowiadającymi im funkcjami wielomianowymi. Zjawisko to ma miejsce, gdy zbiorem współczynników wielomianów jest dowolne ciało nieskończone. Dla wielomianów $f(x) = x^3$ oraz $g(x) = x^9$ o współczynnikach w ciele trzyelementowym $\mathbb{Z}_3$, odpowiadające im funkcje wielomianowe są identyczne na całej dziedzinie, tzn.

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(1) = g(1) = 1, \quad f(2) = g(2) = 2.$$

12.3 Twierdzenie Bezout i rozkład na czynniki liniowe

Skupimy się w naszych rozważaniach przede wszystkim na związkach pomiędzy rozkładalnością wielomianów na czynniki, a istnieniem miejsc zerowych odpowiadających im funkcji wielomianowych. Aż do XVII wieku teoria równań wielomianowych była, jak wspominaliśmy w rozdziale o wzorach skróconego mnożenia, zagadnieniem rozważanym w języku geometrycznym. Ważnym osiągnięciem, obecnym już u Claviusa (1608) było jednakże rozważanie zera jako współczynnika w równaniu wielomianowym i świadomość, że jego rozwiązanie może być uzyskane przez rozkład na czynniki liniowe. Twierdzenie Bezout w istocie zdaje się pochodzić od Kartezjusza, a sformułowane jest w jego dziele *Geometria* z roku 1637. Zawierała ona, z punktu widzenia teorii równań dowolnego stopnia, dwa istotne wzbogacenia dotychczasowej teorii i notacji, wprowadzonej już w XVI wieku przez Viete'a, a mianowicie czytelną notację wykładniczą: x^3, x^4, x^5 itd. (choć nie x^2, które pozostało jako xx aż do XVIII wieku) i właśnie owo twierdzenie.

Definicja 12.5: Pierwiastek wielomianu

PIERWIASTKAMI WIELOMIANU $f \in K[x]$ (inaczej: miejscami zerowymi) nazywamy takie $s \in K$, że funkcja wielomianowa odpowadająca wielomianowi s przyjmuje w s wartość 0, tzn. $f(s) = 0$. Jeśli $f \in K[x]$ jest wielomianem stopnia n, to równanie $f = 0$ nazywamy RÓWNANIEM WIELOMIANOWYM STOPNIA n o współczynnikach w K.

Definicja 12.6

Mówimy, że wielomian o współczynnikach w zbiorze K jest ROZKŁADALNY, jeśli można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeżeli natomiast taki rozkład nie istnieje, to wielomian nazywamy NIEROZKŁADALNYM.

Obserwacja 12.1: Twierdzenie Bezouta (czyli Kartezjusza)

Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ będzie wielomianem stopnia $n > 0$ o współczynnikach rzeczywistych. Następujące warunki są równoważne.

(i) istnieje liczba $c \in \mathbb{R}$ taka, że **wartość funkcji wielomianowej** odpowiadającej w w punkcie c równa jest $w(c) = 0$.

(ii) istnieje wielomian $v(x)$ taki, że mamy **równość wielomianów** $w(x) = (x - c) \cdot v(x)$.

Samo sformułowanie wymaga komentarza. Zauważmy, że warunek (i) mówi o funkcji wielomianowej, a warunek (ii) o równości wielomianów. Choć w szkole utożsamiamy te obiekty, to dowód poprawności tego utożsamienia wymaga twierdzenia Bezout! Sformułowanie powyższe jest prawdziwe w znacznie ogólniejszym kontekście, gdy współczynniki wielomianu są dziedziną całkowitości (w tym – ciałem).

Ogólność rodzi pewien problem – gdy mówimy o wielomianie $(x-c)\cdot v(x)$, to mamy na myśli to, że po wymnożeniu $(x-c)\cdot v(x)$ otrzymamy pewien wielomian, który ma takie same współczynniki, jak $w(x)$. Dlaczego to jest ważne? Ponieważ chcemy korzystać z następującej implikacji: jeśli $w(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ są wielomianami oraz $h(x) = w(x)\cdot v(x)$, to dla każdego $s \in \mathbb{R}$ mamy $h(s) = w(s)\cdot v(s)$.

Cóż to za szaleństwo, czy to nie jest oczywiste? Dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, istotnie jest to prawda, ale zmiana współczynników może to zaburzyć. Rozważmy dwa ważne przykłady:

- Załóżmy, że współczynnikami wielomianów są... macierze 2×2 o współczynnikach rzeczywistych! Weźmy dwie macierze $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})[x]$ i rozważmy wielomiany postaci: $f(x) = x, g(x) = B$. Rozważymy odpowiadające im funkcje wielomianowe i podstawimy A:

$$f(A) = A, \quad g(A) = B, \quad f(x)\cdot g(x) \stackrel{?}{=} Bx, \quad (f\cdot g)(A) \stackrel{?}{=} BA, \quad f(A)\cdot g(A) = AB.$$

- Pierścień kwaternionów $\mathbb{H}$ jest nieprzemienny i przypomina liczby zespolone. Jego elementy są postaci $a+bi+cj+dk$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, przy czym $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = k, jk = i, ki = j$. Ma on bardzo wiele przyjemnych własności, nazywany był nawet kiedyś ciałem nieprzemiennym (dziś mówimy, że jest to pierścień z dzieleniem), ponieważ spełnia wszystkie aksjomaty ciała, poza przemiennością mnożenia. Rozważmy iloczyn wielomianów

$$h(x) = (x-i)(x-j).$$

  Jeśli rozłożymy go zgodnie z tradycyjnymi zasadami, dostaniemy

$$h(x) = x^2 - ix - xj + ij \stackrel{?}{=} x^2 - (i+j)x + ij.$$

  W ten sposób poznajemy współczynniki wielomianu $h(x) \in \mathbb{H}[x]$. Podstawiając jednak do odpowiadającej mu funkcji wielomianowej kwaternion $c = i$, dostajemy

$$h(i) = i^2 - (i+j)i + ij = 2k \neq 0.$$

  Dlaczego? Przecież „twierdzenie Bezout” wyraźnie mówi, że wielomian $h(x)$ ma pierwiastek $c = i$, skoro ma dzielnik $x - i$.

Problem występujący w dwóch powyższych przykładach leży w samej definicji mnożenia wielomianów. W istocie w pierwszym przykładzie $f(x)\cdot g(x) = xB$, zaś iloczyn wielomianów w drugim przykładzie, to $x^2 - ix - xj + ij$. Innymi słowy skalary nie są przemienne ze zmiennymi. O tym więcej tu nie powiemy. Powiemy natomiast dokładniej o jakie dobre własności chodzi.

Rozważmy przyporządkowanie działające w następujący sposób: dla każdego $a \in K$ rozważamy funkcję $v_a : K[x] \to K$, która przyporządkowuje wielomianowi postaci $w(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots + r_nx^n \in K[x]$ wartość odpowiadającej mu funkcji wielomianowej w punkcie a, a więc element

$$v_a(w) = r_0 + r_1a + r_2a^2 + \ldots + r_na^n \in K.$$

Funkcja ta nazywa się EWALUACJĄ WIELOMIANU w punkcie a. Przyzwyczailiśmy się do pewnych własności ewaluacji, na przykład do następujących. Dla każdego $a \in K$ mamy:

$$v_a(w + w') = v_a(w) + v_a(w'), \quad v_a(w\cdot w') = v_a(w)\cdot v_a(w').$$

Jak się jednak okazuje, tak być nie musi, jeśli zbiór współczynników wielomianu nie jest przemienny, czego przykład mamy wyżej! Czytelnik może odczuwać pewną konsternację, dochodząc do tej konkluzji. Wydaje mi się jednak ważne, by pokazać, że stwierdzenie „funkcja wielomianowa iloczynu to iloczyn funkcji wielomianowych” ma głębokie podłoże[3].

Proszę zauważyć, że ewaluacja może zdecydowanie ułatwić wykonywanie rachunków. Oto przykład.

Zadanie. Rozważmy zbiór $\mathcal{A} = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{11}\}$ pierwiastków zespolonych stopnia 12 z 1. Uzasadnij, że

$$(\sqrt{3} + i - \varepsilon_0)\cdot(\sqrt{3} + i - \varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(\sqrt{3} + i - \varepsilon_{11}) = 2^{12} - 1.$$

[3] Więcej: `https://mimuw.edu.pl/~amecel/referaty/nieprzemiennepulapki.pdf`.

Proszę zauważyć, że pierwiastki stopnia 12 z 1 można wyznaczyć, wyliczając ich postaci ogólne. W ten sposób możliwe jest policzenie powyższego iloczynu przez wymnożenie 12 nawiasów, odpowiednio grupując czynniki zawierające pierwiastki sprzężone. Znacznie łatwiej jest jednak zauważyć, że wobec rozkładu

$$x^{12} - 1 = (x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot (x - \varepsilon_{11})$$

możemy wyznaczyć żądany iloczyn, poprzez wyznaczenie wartości funkcji wielomianowej odpowiadającej wielomianowi $x^{12} - 1$ w punkcie $s = \sqrt{3} + i$. Innymi słowy, mamy:

$$(\sqrt{3} + i)^{12} - 1 = (\sqrt{3} + i - \varepsilon_0) \cdot (\sqrt{3} + i - \varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{3} + i - \varepsilon_{11}) = 2^{12} - 1.$$

Już wcześniej wspomnieliśmy, że nie tylko przemienność, ale i kwestia bycia dziedziną całkowitości, wchodzi w grę. Chcemy bowiem z tego, że $0 = h(s) = w(s) \cdot v(s)$ wnioskować, że $w(s) = 0$ lub $v(s) = 0$. Bez tej własności rozwiązywanie równań będzie często trudne. Wystarczy zobaczyć, że zwykły wielomian $x^2 + 5x$ o współczynnikach w pierścieniu reszt z dzielenia przez 6, czyli $\mathbb{Z}_6$ (przemiennym, ale z dzielnikami zera) ma więcej niż dwa pierwiastki, bowiem $x(x + 5) = (x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x$. Podobnie dla wielomianu o współczynnikach kwaternionowych $w(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{H}[x]$ mamy $w(i) = w(j) = w(k) = 0$, a w istocie wielomian ten ma nieskończenie wiele pierwiastków.

Po tych nieco makabrycznych rozważaniach, porządkujących nieco aparat pojęciowy, możemy przejść do szkolnego dowodu twierdzenia Bezout.

Dowód. Jeśli $w(x) = (x - c)v(x)$, dla pewnego wielomianu v stopnia $n - 1$, to funkcja wielomianowa $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odpowiadająca wielomianowi w, dana jest wzorem $w(s) = (s - c)v(s)$, co oczywiście przyjmuje wartość zero, gdy $s = c$.

Załóżmy więc, że istnieje liczba c taka, $w(c) = 0$. Wówczas możemy odnotować następującą równość wielomianów w zbiorze $\mathbb{R}[x]$. Biorąc element $w(c) = 0 \in K$ rozważamy wielomian

$$\begin{aligned}
w(x) &= w(x) - w(c) = \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} a_n x^n - (a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \ldots + a_{n-1} c^{n-1} + a_n c^n) \\
&= a_1(x - c) + a_2(x^2 - c^2) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-1} - c^{n-1}) + a_n(x^n - c^n) \\
&= (x - c) \cdot (a_1 + a_2(x + c) + \ldots + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}c + \ldots + c^{n-2}) + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + c^{n-1})) \\
&= (x - c) \cdot ((a_1 + a_2 c + \ldots + a_n c^{n-1}) + (a_2 + \ldots + a_n c^{n-2})x + \ldots + (a_{n-1} + a_n c)x^{n-2} + a_n x^{n-1}).
\end{aligned}$$

Przyjmując $v(w)$ jako drugi czynnik iloczynu po prawej stronie widzimy, dostajemy rokład wielomianów $w(x) = (x - c) \cdot v(x)$, przy czym $\deg(v(x)) = n - 1$. W powyższych przekształceniach skorzystaliśmy z formuły

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^3 b^{n-2} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Przedstawiliśmy zatem wielomian $w(x)$ jako iloczyn wielomianów z $K[x]$ w żądanej postaci. □

Zauważmy drobną subtelnośc drugiej części dowodu. Cały rachunek wykonany jest na wielomianach, nie zaś na funkcjach wielomianowych. Informacja o posiadaniu pierwiastka była potrzebna tylko po to, by element zerowy należący do zbioru współczynników ciała zapisać w odpowiedni sposób, co pozwoliło na utożsamienie wielomianów $w(x)$ oraz $w(x) - w(c)$. Istotnie, współczynniki tych wielomianów są równe.

Wniosek 12.2: Postać iloczynowa wielomianu stopnia n o n pierwiastkach

Jeśli dla pewnego wielomianu $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ stopnia $n > 0$ istnieje n parami różnych liczb rzeczywistych $c_1, \ldots, c_n$, dla których

$$w(c_1) = w(c_2) = \ldots = w(c_n) = 0,$$

to

$$w(x) = a_n \cdot (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n).$$

Dowód. Indukcja ze względu na stopień wielomianu. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla wielomianów stopnia $< n$. Rozważmy wielomian w o n różnych pierwiastkach $c_1, \ldots, c_n$. Wówczas z twierdzenia Bezouta istnieje wielomian $g(x)$ stopnia $n-1$, taki że $w(x) = (x - c_n)g(x)$. Jest jasne, że współczynnik wiodący wielomianu g jest taki sam jak współczynnik wiodący w, czyli równy jest a_n (wyymnażamy i porównujemy współczynniki wiodące). Skoro wielomiany są równe, to również odpowiadające im funkcje wielomianowe są równe. W szczególności

$$g(c_i) = \frac{w(c_i)}{c_i - c_n} = 0,$$

dla $i < n$ wartość 0. Zatem wielomian g stopnia $n-1$ ma pierwiastki $c_1, \ldots, c_{n-1}$ i z założenia indukcyjnego ma on postać $a_n(x - c_1) \ldots (x - c_{n-1})$. Stąd $w(x) = a_n \cdot (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$. □

Wniosek 12.3

Jeśli wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest niezerowy i ma n parami różnych pierwiastków, to jego stopień równy jest co najmniej n. W szczególności liczba parami różnych pierwiastków niezerowego wielomianu jest nie większa od stopnia tego wielomianu. Wielomian stopnia nie większego od n mający $n + 1$ różnych miejsc zerowych jest wielomianem zerowym.

Dowód. Pierwszą część rozumowania dowodzimy, korzystając z twierdzenia Bezout. Niech $n > 0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że wielomian $w(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ o $n + 1$ różnych miejscach zerowych $c_1, \ldots, c_{n+1}$ spełnia $a_n \neq 0$. Z poprzedniego wniosku widzimy, że

$$0 = w(c_{n+1}) = a_n \cdot (c_{n+1} - c_1) \cdot (c_{n+1} - c_2) \cdot \ldots \cdot (c_{n+1} - c_n).$$

Skoro $c_{n+1} \neq c_i$, dla $i \leqslant n$, mamy $a_n = 0$. Sprzeczność z wyborem w. □

Definicja 12.7: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkami wielomianu $f \in K[x]$ (inaczej: miejscami zerowymi) nazywamy takie $s \in K$, że funkcja wielomianowa odpowadająca wielomianowi s przyjmuje w s wartość 0, tzn. $f(s) = 0$.

Twierdzenie 12.1: O jednoznaczności współczynników wielomianów

Jeśli równość $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_n s^n$ zachodzi dla więcej niż $\max(m, n)$ różnych liczb rzeczywistych s, to $m = n$ oraz $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$

Rozwiązanie. Z poprzedniego wniosku widzimy, że wielomian

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m) - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$$

ma więcej niż $\max(m, n)$ różnych pierwiastków. A zatem $0 = a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \ldots$. ■

Wniosek 12.4

Przyporządkowanie wielomianowi $w \in \mathbb{R}[x]$ funkcji wielomianowej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej, dla każdego $s \in \mathbb{R}$, wzorem $f(s) = w(s)$, jest bijekcją.

Oczywiscie wniosek powyższy mogliśmy wyprowadzić z zasady indukcji bezpośrednio z twierdzenia Bezout. Nietrudno go uogólnić na wielomiany większej liczby zmiennych.

Zadanie 95. *Wyznacz wszystkie wielomiany $w(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, które dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $w(x+3) = w(x)$.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że $w(0) = a$ i zauważmy, że z warunku $w(x+3) = w(x)$ zachodzi $w(3k) = a$, dla każdej liczby całkowitej k. Zatem wielomian

$$w(x) - w(0) = w(x) - a$$

ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, a zatem jest to wielomian zerowy. Stąd $w(x) = a$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście dowolny wielomian stały spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 96. *Wyznacz wszystkie wielomiany $w(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, które spełniają warunki $w(0) = 0$ oraz $w(x-1) + w(x+1) = 2w(x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$.*

Rozwiązanie. Warunek z zadania można napisać w postaci $w(x+1) - w(x) = w(x) - w(x-1)$. Rozpatrzmy wielomian pomocniczy

$$p(x) = w(x) - w(x-1).$$

Wtedy mamy $p(x+1) = p(x)$. dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Podobnie jak w poprzednim zadaniu wnioskujemy więc, że $p(x) = a$ jest wielomianem stałym. A więc: $w(x+1) = w(x) + a$, co możemy również zapisać jako $w(x+1) - a(x+1) = w(x) - ax$, skąd wynika, że wielomian $w(x) - ax$ jest stały, czyli $w(x) - ax = b$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $w(x) = ax + b$. Ten wielomian spełnia równość

$$w(x-1) + w(x+1) = 2w(x).$$

Równość $w(0) = 0$ oznacza, że $b = 0$, czyli odpowiedź to: $w(x) = ax$, dla $a \in \mathbb{R}$. ■

12.4 Zadanie interpolacyjne

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wielomianu $P_n \in \mathbb{R}[x]$ stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n+1$ z góry zadanych parami różnych punktach $x_0. \ldots, x_n$ są takie same, jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n & = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n & = f(x_1) \\ & \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n & = f(x_n). \end{cases}.$$

Innymi słowy zastanawiamy się na przykład: czy przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta? Czy przez dowolne trzy parami różne punkty, które nie są współliniowe, nie przechodzi dokładnie jedna parabola, itd. Jakim wzorem zadany jest ów jedyny wielomian?

Twierdzenie 12.2

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma dokładnie jedno rozwiązanie. Mianowicie konstruując funkcje pomocnicze:

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

określamy rozwiązanie zadania interpolacyjnego wzorem:

$$P_n(x) = f(x_0)p_0(x) + f(x_1)p_1(x) + \ldots + f(x_n)p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Przykład. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$. Wielomiany $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ wymienione w twierdzeniu wyżej są wówczas postaci:

$$\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}, \quad \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)}, \quad \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}, \quad \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}.$$

Dowód. Nietrudno widzieć, że $p_i(x)$ to wielomiany stopnia n takie, że:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Stąd $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n przyjmującym w punktach x_i wartości $f(x_i)$, czyli jest rozwiązaniem problemu interpolacyjnego. Z drugiej strony z twierdzenia Bezout wiadomo, że wielomian taki jest jednoznaczny. Istotnie, gdyby pewien wielomian R_n stopnia nie większego od n również spełniał zadanie interpolacyjne, wówczas $P_n(x) - R_n(x)$ jest wielomianem stopnia n o $n+1$ pierwiastkach $x_0, \ldots, x_n$, co implikuje, że $P_n(x) = R_n(x)$. □

Powyższe twierdzenie zawiera pewien zaskakujący element: definicję wielomianów p_i. Dlaczego mają one taką właśnie postać? Podpowiedzi dostarczają nam wzory Cramera zastosowane do układu $n+1$ równań, w którym niewiadomymi są współczynniki wielomianu $P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$, spełniającego dla pewnych z góry zadanych $f(x_0), \ldots, f(x_n)$. Wiemy już, że powyższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, a więc jego macierz współczynników jest odwracalna. Wyznacznik tej macierzy – zwanej macierzą Vandermonde'a ma, jak się okazuje (i czego tu nie uzasadniamy) postać:

$$\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Temat interpolacji nie należy oczywiście do zagadnień szkolnych. Warto jednak mieć na uwadze, że wyznacznik Vandermonde'a nie jest konieczny do uzasadnienia, że wielomian stopnia $\leqslant n$ jest jednoznacznie określony przez $n+1$ swoich wartości, czyli twierdzenia o jednoznaczności współczynników. Wynika to bezpośrednio z tw. Bezout i definicji stopnia wielomianu (dla każdego ciała o więcej niż n elementach).

12.5 Pierwiastki wielokrotne, wzory Viete'a

Przechodzimy do zagadnień związanych z pierwiastkami wielokrotnymi i wzorami Viète'a. Rozważając te tematy można wyjść od ogólnej teorii podzielności wielomianów, której nie chcemy tu poruszać z uwagi na to, że nie jest to temat szkolny, ale można też spróbować podejść do kwestii zdroworozsądkowo (nie używając „armat"), podając Czytelnikowi pewne fakty do samodzielnego uzasadnienia.

Definicja 12.8: Pierwiastek wielokrotny wielomianu

Mówimy, że liczba $c \in \mathbb{R}$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, jeśli k jest największą liczbą naturalną taką, że istnieje wielomian $v(x)$ stopnia $\geqslant 0$ spełniający warunek

$$w(x) = (x - c)^k \cdot v(x).$$

Odnotujmy, że w definicji powyższej mieści się definicja pierwiastka wielomianu, jako pierwiastka potencjalnie „jednokrotnego". W oparciu o twierdzenie Bezouta widzimy, że podejcia te są zbieżne. Kluczowym i nieco delikatnym rezultatem jest następujący fakt.

Wniosek 12.5

Wielomian stopnia n o współczynnikach w $\mathbb{R}$ ma nie więcej niż n pierwiastków, licząc krotności

Dowód. Indukcja ze względu na stopień. Dla $n = 0, 1$ teza jest jasna. Jeśli natomiast wielomian w jest stopnia $n \geqslant 1$ i ma pierwiastek c krotności k, to krotność pierwiastka c w wielomianie $w/(x-c)$ stopnia $n-1$ równa jest $k-1$, podczas gdy krotność pierwiastków różnych od c, których jest nie więcej niż $n-1$ (co już pokazaliśmy we Wniosku 11.3), nie ulega zmianie. Wynika to z tego, że dla dowolnych niezerowych wielomianów f, g o współczynnikach rzeczywistych oraz stałej $c \in \mathbb{R}$, zachodzi równoważność

$$(x - c) \cdot f(x) = (x - c) \cdot g(x) \quad \iff \quad f(x) = g(x).$$

□

Z punktu widzenia zastosowań, także w programie szkolnym, istotnym elementem są wzory Viète'a.

Twierdzenie 12.3: Wzory Viète'a

Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu stopnia n o współczynnikach rzeczywistych $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, przy czym uwzględniamy krotności – pierwiastek k-krotny występuje k razy w układzie $x_1, \ldots, x_n$. Wówczas zachodzą równości[a]:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n & = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ & \vdots \\ x_1x_2x_3\ldots x_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

[a]Nie wypisujemy dokładnie równości dotyczących współczynników stojących przy kolejnych potęgach. Po lewych stronach stoją tzw. elementarne wielomiany symetryczne stopnia n od pierwiastków wielomianu.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ dowód jest oczywisty. Załóżmy, że dla każdego wielomianu stopnia n, wzory te są prawdziwe. Rozważmy wielomian stopnia $n+1$, o pierwiastkach: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Zgodnie z twierdzeniem Bezout istnieje wielomian $g(x)$ taki, że: $f(x) = a_{n+1} \cdot (x - x_1) \cdot g(x)$. Wielomian g jest stopnia n, i jego pierwiastkami są $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$.Więcej pierwiastków, zgodnie z udowodnionym wcześniej faktem, mieć nie może. Zatem są to jego wszystkie pierwiastki. Z założenia indukcyjnego mamy:

$$g(x) = x^n - (x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1})x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n+1}(x_2x_3\ldots x_{n+1}).$$

Wymnażając g w takiej postaci przez $a_{n+1} \cdot (x - x_1)$ dostajemy tezę, na mocy twierdzenia o jednoznaczności współczynników wielomianu. □

Definicja 12.9

Mówimy, że wielomian o współczynnikach w zbiorze K jest ROZKŁADALNY, jeśli można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia dodatniego. Jeżeli natomiast taki rozkład nie istnieje, to wielomian nazywamy NIEROZKŁADALNYM.

Problem rozkładalności na czynniki ma naturalne związki z teorią podzielności i metodami podobnymi do omówionych w teorii liczb całkowitych dowodzi się, dla wielomianów o współczynnikach rzeczywistych i wymiernych, twierdzenia o dzieleniu z resztą, lemat Bezout i twierdzenie o jednoznaczności rozkładu. Czytelnika zainteresowanego tymi wynikami odsyłam na przykład do swojego wykładu: `https://mimuw.edu.pl/~amecel/wyklad_3.pdf`, str. 11-13. My natomiast przyjrzyjmy się kilku przykładom i sformułujmy rezultaty przydatne w szkole.

Rozkład $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ jest rozkładem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych na czynniki liniowe, o współczynnikach rzeczywistych. Jednocześnie, z udowodnionego wcześniej twierdzenia wynika, że rozkład na czynniki liniowe wymaga, aby istniał pierwiastek wielomianu $x^2 - 2$. Wielomian ten nie ma pierwiastków wymiernych, więc jest nierozkładalny jako wielomian o współczynnikach wymiernych.

Istnienie pierwiastka nie jest oczywiście warunkiem koniecznym, by wielomian był rozkładalny. Wielomian $x^4 + 5$ w sposób oczywisty nie ma rzeczywistych miejsc zerowych (jego wartości są zawsze równe nie mniej niż 2), ale mamy rozkład:

$$x^4 + 4 = x^2 + 2x^2 + 4 - 2x^2 = (x^2 + 2)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2).$$

Rozwiązywanie równań wielomianowych i pokrewnych zasadniczo sprowadza się do różnych metod uzyskiwania rozkładów tak, by móc skorzystać z własności $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ lub $b = 0$. Podstawowa metoda związana jest oczywiście z rozkładem na czynniki liniowe i rozmaitymi technikami, prezentowanymi już na pierwszych dwóch wykładach.

Zadanie 97. *Dane są liczby dodatnie* a, b, c. *Rozwiąż równanie* $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$.

Rozwiązanie. Po raz kolejny chcemy, aby po jednej ze stron rozważanej równości znalazło się zero. Nietrudno przenieść 3 na drugą stronę, ale kluczowe jest zrobienie tego w odpowiedni sposób. Metoda ta jest niezwykle przydatna w dowodzeniu nierówności. Pomysł jest taki, aby liczbę 3 znajdującą się po prawej stronie równości wyżej rozbić na trzy składniki i przenieść na drugą stronę do postaci:

$$\left(\frac{x-a-b}{c} - 1\right) + \left(\frac{x-b-c}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-c-a}{b} - 1\right) = 0.$$

Różnice występujące w powyższych nawiasach zamieniamy na ułamki:

$$\left(\frac{x-a-b-c}{c}\right) + \left(\frac{x-b-c-a}{a}\right) + \left(\frac{x-c-a-b}{b}\right) = 0.$$

Widzimy teraz, że w liczniku powyższych składników znajduje się ta sama liczba $x-a-b-c$. Wyciągając ją przed każdy z nich dostajemy:

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Mamy zatem $x-a-b-c=0$ lub $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 0$. Liczby a, b, c są jednak dodatnie, więc druga możliwość nie może zachodzić. Zatem $x = a+b+c$.

Uwaga. Rozważane równanie jest liniowe. To oznacza, że ma ono nie więcej niż jedno rozwiązanie. A zatem jeśli zgadniemy rozwiązanie zadanie $x = a+b+c$, to ono musi być jedynym. ■

Wśród rozkładów wielomianów najważniejsze są rozkłady na czynniki liniowe. Na poziomie szkoły średniej nie jesteśmy w stanie udowodnić, że wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki stopnia nie większego od 2. Rezultat ten opiera się o zasadnicze twierdzenie algebry. Istnieje oczywiście szereg technik związanych z rozkładem na czynniki, związanych ze wzorami skróconego mnożenia lub technikami grupowania. Omawialiśmy je już na pierwszym wykładzie.
Wyprowadzimy teraz wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej, z użyciem wyróżnika, czyli tzw. „delty”. O samej teorii wyróżników nie wspominamy tu szerzej. Zagadnienia dotyczące funkcji kwadratowe są w centrum zainteresowania algebry szkolnej.

Twierdzenie 12.4

Dana jest funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$. Niech $\Delta = b^2 - 4ac$. Wówczas f:

- nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$,
- ma jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$; jest nim liczba $-\frac{b}{2a}$,
- ma dwa miejsca zerowe, gdy $\Delta > 0$; są nimi liczby

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dowód. Dla $a \neq 0$ mamy:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right).$$

Jest więc jasne, że $ax^2 + bx + c > 0 \iff \Delta < 0$. W takim przypadku funkcja f nie ma miejsc zerowych.

Jeśli $\Delta = 0$, to oczywiście $f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, bo $a \neq 0$.

Wreszcie, rozważmy przypadek $\Delta < 0$. Wówczas ze wzoru na różnicę kwadratów mamy:

$$f(x) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\Delta}2a\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\Delta}2a\right).$$

□

Wniosek 12.6

Jeśli $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to

1. gdy $\Delta < 0$, wówczas f jest
   - stale dodatnia, gdy $a > 0$, tzn. $f(x) > 0$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
   - stale ujemna, gdy $a < 0$.
2. gdy $\delta = 0$, wówczas f jest:
   - stale nieujemna, gdy $a > 0$,
   - stale niedodatnia, gdy $a < 0$.

W tym wykładzie nie zajmujemy się problemem wyznaczania wzorów na pierwiastki wielomianów stopni 3 i 4, pochodzącymi od Cardano i Ferrary. Zainteresowanych odsyłam do wykładu prof. Hajaca w bibliografii. Z całą pewnością nie mamy miejsca na omówienie problemu rozwiązywalności równań wielomianowych przez tzw. pierwiastniki, rozwiązanego przez Abela, Ruffiniego i Galois. Rozwiążmy kilka zadań ilustrującą zarówno użycie wyróżnika (delty) jak i wzorów Viète'a.

Zadanie 98. *Dla jakich wartości parametru k pierwiastki równania $x^2 + 2(3k-1)x + 3k + 11 = 0$ są liczbami przeciwnych znaków?*

Rozwiązanie. Sprawdzamy najpierw, kiedy rozważane równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste. Obliczamy wyróżnik Δ:

$$\Delta = (2(3k-1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3k+11) = 36k^2 - 36k - 40 = 36\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right).$$

Mamy otrzymać pierwiastki przeciwnych znaków, a więc różne. A zatem $\Delta > 0$,czyli $k \in (-\infty, -2/3) \cup (5/3, \infty)$. Aby sprawdzić czy iloczyn pierwiastków x_1x_2 jest ujemny skorzystamy ze wzorów Viète'a. Mamy $x_1x_2 = 3k + 11$. A zatem:

$$x_1x_2 < 0 \iff 3k + 11 < 0 \iff k < -\frac{11}{3}.$$

Zatem pierwiastki rzeczywiste danego równania są przeciwnych znaków dla $k \in \left(-\infty, -\frac{11}{3}\right)$. ■

Zadanie 99. *Dla jakich wartości a, b, c liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu*

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1?$$

Rozwiązanie. Załóżmy, że mamy $f(x) = (x-1)g(x)$. Zatem g jest wielomianem stopnia pierwszego. A zatem $f(x)$ ma cztery pierwiastki x_1, x_2, x_3, x_4, przy czym można przyjąć $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Z wzorów Viète'a dostajemy $x_1x_2x_3x_4 = -1$, skąd $x_4 = -1$. A zatem skoro współczynnik wiodący f to 1, mamy:

$$f(x) = (x-1)^3(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

■

Zadanie 100. *Dany jest wielomian $w(x) = ax^3 + bx + c$ o współczynnikach wymiernych, gdzie $a \neq 0$. Udowodnij, że jeśli jeden z pierwiastków tego wielomianu jest iloczynem dwóch pozostałych, to jest on liczbą wymierną.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że pierwiastkami tego wielomianu są liczby x_1, x_2, x_3, przy czym $x_3 = x_1x_2$. Wtedy na mocy wzorów Viète'a mamy równości:

$$x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0, \quad x_1x_2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = \frac{b}{a}, \quad x_1^2x_2^2 = -\frac{c}{a}.$$

Z pierwszych dwóch równości otrzymujemy $x_1x_2 - x_1^2x_2^2 = \frac{b}{a}$, co w połączeniu z trzecią równością daje nam

$$x_1x_2 = \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}.$$

Skoro liczby a, b, c są wymierne, to również liczba $\frac{b-c}{a}$ jest wymierna. ■

Zadanie 101. *Wielomian $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ o nieujemnych współczynnikach ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $w(2) \geqslant 3^n$.*

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że wszystkie pierwiastki wielomianu w są ujemne. Rzeczywiście $w(0) = 1$, zaś dla $x > 0$ wartość $w(x)$ jest sumą n liczb dodatnich, więc jest dodatnie. Mamy zatem:

$$w(x) = (x + x_1)(x + x_2)\ldots(x + x_n), \qquad \text{gdzie } x_i > 0.$$

W szczególności

$$w(2) = (2 + x_1)(2 + x_2)\ldots(2 + x_n).$$

Z nierówności między średnimi, zastosowanej dla liczb $1, 1, x_i$ mamy $2 + x_i \geqslant 3\sqrt[3]{x}$. Zatem

$$w(2) \geqslant 3^n \sqrt[3]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Z wzoru Viète'a mamy jednak $|x_1x_2\ldots x_n| = 1$, co kończy dowód. ■

12.6 Wielomiany o współczynnikach całkowitych

Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze kilku teorioliczbowym aspektom wielomianów. Są one związane z twierdzeniami o wymiernym i całkowitym pierwiastku wielomianu, a także z pewnymi zastosowaniami twierdzenia Bezout, które teraz wysłowimy.

Twierdzenie 12.5: O wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych

Załóżmy, że liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, $a_n \neq 0$, $n \neq 1$ oraz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ dla pewnej liczby x. Jeśli $x = \frac{p}{q}$ i liczby całkowite p, q są względnie pierwsze, to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Dowód. Pomnóżmy równość

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

przez q^n otrzymując:

$$a_0q^n + a_pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0.$$

Zauważmy, że:

$$q \mid a_np^n = -q(a_0q^{n-1} + a_1pq^{n-2} + a_2pq^{n-3} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}),$$

a ponieważ liczby p, q są względnie pierwsze, to p^n, q też są względnie pierwsze, a z tego wynika, że q jest dzielnikiem a_n. W ten sam sposób widzimy, że $p \mid a_0p^n$, co oznacza, że p jest dzielnikiem a_0. □

Wniosek 12.7

Jeśli wielomian ma współczynniki całkowite, a jego wyraz wiodący równy jest 1, wówczas każdy wymierny pierwiastek tego wielomianu jest liczbą całkowitą będącą dzielnikiem wyrazu wolnego.

Do ważnych zastosowań tego twierdzenia, obok trywialnych poszukiwań pierwiastków, należą dowody niewymierności pewnych liczb algebraicznych. Oto typowy przykład takiego dowodu.

Zadanie 102. *Wykaż, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.*

Rozwiązanie. Oznaczmy $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Wówczas $x_0^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, czyli $x_0^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Stąd

$$(x_0^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2 \Rightarrow x_0^4 - 10x_0^2 + 25 = 24 \Rightarrow x_0^4 - 10x_0^2 + 1 = 0.$$

Liczba x_0 jest więc pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 10x^2 + 1$. Gdyby była liczbą wymierną, musiałaby być liczbą całkowitą i dzielnikiem 1. Tymczasem żadna z liczb -1 i 1 nie jest pierwiastkiem tego wielomianu. Liczba x_0, jako pierwiastek tego wielomianu, nie może być liczbą wymierną. ■

Wniosek 12.8

Jeśli wielomian $w(x)$ ma współczynniki całkowite, to dla różnych liczb całkowitych a, b zachodzi podzielność $a - b \mid w(a) - w(b)$.

Zadanie 103. *Wielomian $w(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeśli liczba $w(5)$ dzieli się przez 2, zaś liczba $w(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $w(7)$ dzieli się przez 10.*

Rozwiązanie. Rzeczywiście, mamy $7 - 5 \mid w(7) - w(5)$, czyli 2 jest dzielnikiem $w(7) - w(5)$. Skoro 2 jest też dzielnikiem $w(5)$, to $2 \mid w(7)$. Analogicznie z podzielności $7 - 2 \mid w(7) - w(2)$ dostajemy $5 \mid w(7) - w(2)$, co wobec podzielności $5 \mid w(2)$ daje nam $5 \mid w(7)$. ■

Zadanie 104. *Wyznaczyć wszystkie wielomiany w o współczynnikach całkowitych, które dla każdego naturalnego n spełniają podzielność $w(n) | 2^n - 1$.*

Rozwiązanie. Jeśli wielomian w jest stały, wówczas musi zachodzić równość $w(x) = 1$ lub $w(x) = -1$. W przeciwnym razie dla pewnego n mamy $|w(n)| > 1$ (wielomian stopnia > 0 może przyjmować daną wartość tylko skończenie wiele razy). A zatem $w(n)$ ma dzielnik pierwszy p. Mamy wtedy też $p \mid w(n+p)$. Dlaczego? Korzystamy z naszego faktu: $n + p - p \mid w(n + p) - w(n)$. A zatem z założeń zadania mamy $p \mid 2^n - 1$ oraz $p \mid 2^{n+p} - 1$, więc $p \mid 2^{n+p} - 2^n$, czyli $p \mid 2^p - 1$. To jednak przeczy małemu twierdzeniu Fermata. ■

* * *

W tekście nie wspominamy o wielu zagadnieniach konkursowych dotyczących wielomianów, zwłaszcza dotyczących wielomianów wielu zmiennych, na przykład o wielomianach jednorodnych czy symetrycznych, o technikach rozwiązywania układów równań, twierdzeniu o przedstawieniu wielomianu symetrycznego jako wielomianu od elementarnych wielomianów symetrycznych. O wynikach tych przeczytać można w proponowanych niżej źródłach.

Możliwa dalsza lektura – wielomiany

- M. Bryński, *Twierdzenie Sturma*, Delta 2016,
  `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/algebra/2016/01/27/Twierdzenie_Sturma/`
- B. Bzdęga, *Na tropie wielomianów – część 1 i 2*, Kącik początkującego olimpijczyka, Delta 2022,
  `https://www.deltami.edu.pl/2022a/02/2022-02-delta-art-15-kpo.pdf`,
  `https://www.deltami.edu.pl/2022a/01/2022-01-delta-art-16-kpo.pdf`
- B. Bzdęga, *Twierdzenie Bezouta*, Kącik początkującego olimpijczyka, Delta 11/2019,
  `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/algebra/2019/11/29/2019-12-delta-kpo.pdf`
- D. Dukić, *Polynomials. Olympiad training materials.*,
  `https://imomath.com/index.cgi?page=polynomials`
- W. Guzicki: *Tożsamości kombinatoryczne. Dowody algebraiczne i kombinatoryczne*, seminarium podczas finału OMG, str. 30-58, `http://www.sem.edu.pl/materialy/FinalOMG.pdf`.
- P. Hajac, *Od wzorów Cardano do zasadniczego twierdzenia algebry*,
  `https://www.impan.pl/~pmh/teach/algebra/lectures/lecture5.pdf`
- M. Krych, *Wielomiany*, materiały dla studentów Chemii,
  `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/chemia/2016-2017/che17_wielomiany.pdf`
- M. Krych, *Wielomiany stopnia wyższego niż dwa*, skrypt dla XIV LO,
  `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt12-wielomiany_D.pdf`
- A. Męcel, *To nie trivia. Wielomiany symetryczne*, notatki z GAL II, str. 287-288,
  `https://mimuw.edu.pl/~amecel/galII_mecel.pdf`
- A. Nowicki, *Wielomiany*, Podróże po Imperium Liczb, tom 12.
- H. Pawłowski, *Matematyka 1-3. Zakres rozszerzony.* Wydawnictwo Operon 2004.

Zadania – wielomiany

Zadanie 1. *Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2-2mx+m^2-1=0$ ma pierwiastki rzeczywiste należące do przedziału $[-2,4]$?*

Zadanie 2. *Dla jakich wartości całkowitych a pierwiastki równania $(a-1)x^2-(a^2+1)x+a^2+a=0$ są liczbami całkowitymi?*

Zadanie 3. *Jeśli a,b,c są niezerowymi liczbami rzeczywistymi, to co najmniej jeden z trójmianów*

$$ax^2+2bx+c, \quad bx^2+2cx+a, \quad cx^2+2ax+b$$

ma pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 4. *Liczby a,b,c są parami różne. Ile rozwiązań ma równanie*

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0?$$

Zadanie 5. *Znajdź wszystkie wielomiany w o współczynnikach rzeczywistych, które dla każdego $x\in\mathbb{R}$ spełniają warunek $(x-1)w(x+1)=(x+3)w(x-1)$.*

Zadanie 6. *Wykaż, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla trzech parami różnych argumentów wartość ± 1, to nie ma on pierwiastków całkowitych.*

Zadanie 7. *Przypuśćmy, że pierwiastki równania $x^3+3x^2+4x-11=0$ równe są a,b,c oraz, że pierwiastki $x^3+rx^2+sx+t=0$ równe są $a+b, b+c$ oraz $c+a$. Wyznacz t.*

Zadanie 8. ($\star$) *Znajdź wszystkie wielomiany w o współczynnikach rzeczywistych, które dla każdego $x\in\mathbb{R}$ spełniają warunek $P(x^2)=(P(x))^2$.*

Zadanie 9. ($\star$) *Wykaż, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla czterech różnych argumentów całkowitych, to dla każdego argumentu całkowitego nie przyjmuje wartości -1.*

Zadanie 10. ($\star$) *Wykaż, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to co najmniej jedna z liczb a,b,c jest parzysta.*

Zadanie 11. ($\star$) *Niech $f(x)=x^2+12x+30$. Dla każdej liczby naturalnej n wielomian $f^{(n)}(x)$ ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.*

Zadanie 12. ($\star$) *Wykaż, że jeśli wielomian ax^3+bx^2+cx+d, gdzie $a\neq 0$, ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $b^2\geqslant ac$ oraz $c^2\geqslant bd$.*

Zadanie 13. ($\star$) *Wielomian w o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że $w(n)$ jest liczbą pierwszą, dla wszystkich liczb naturalnych n. Wykaż, że w jest wielomianem stałym.*

Zadanie 14. ($\star$) *Dana jest dodatnia liczba całkowita $n>1$. Dla jakich liczb rzeczywistych x wyrażenie $x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-x^{2n-3}+\ldots+x^2-x+\frac{n}{4}$ przyjmuje wartość 0?*

Zadanie 15. ($\star\star$) *Niech $w(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Niech $w^{(n)}(x_0)=x_0$, dla pewnego $x_0\in\mathbb{Z}$, przy czym $w^{(n)}(x)$ jest n-krotnym złożeniem funkcji $w(x)$. Wykaż, że $w(w(x_0))=x_0$.*

Zadanie 16. ($\star\star$) *Wyznacz $w^2+x^2+y^2+z^2$, jeśli*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2^2-1}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}&=1\\
\frac{x^2}{4^2-1}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}&=1\\
\frac{x^2}{6^2-1}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}&=1\\
\frac{x^2}{8^2-1}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}&=1
\end{aligned}$$

Rozdział 13

Funkcje wymierne, potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

13.1 Funkcje wymierne

Wykonując działania na wielomianach (czy ogólniej – dowolnych funkcjach f, g o tej samej dziedzinie mówić możemy o ich ilorazie, czyli o funkcji określonej wzorem $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dla tych x, dla których $g(x) \neq 0$. Funkcje tego rodzaju pojawiają się w sposób naturalny zarówno w teorii jak i w zastosowaniach.

Definicja 13.1: Funkcja wymierna

Funkcję postaci

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $f(x), g(x)$ są funkcjami wielomianowymi jednej zmiennej rzeczywistej, nazywamy FUNKCJĄ WYMIERNĄ jednej zmiennej rzeczywistej. Zakładamy przy tym, że g nie jest wielomianem zerowym. Funkcja F ma dziedzinę w zbiorze $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Należy rozumieć, że nie zakładamy wymierności współczynników wielomianów. Choćby wielomian $\sqrt{2}x$ jest funkcją wymierną. Stąd można się zastanawiać: w jaki sposób dowodzić, że jakaś funkcja nie jest wymierna, choćby funkcja $\sqrt{x}$? Zacznijmy od przykładu fałszywego dowodu.

FAŁSZYWY DOWÓD NIEWYMIERNOŚCI funkcji $\sqrt{x}$. Niech $f(x)$ oraz $g(x)$ będą wielomianami takimi, że

$$\sqrt{x} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow x = \frac{f^2(x)}{g^2(x)}.$$

A zatem $\deg(f^2(x) - g^2(x)) = \deg x = 1$. A zatem $2\deg(f(x) - g(x)) = 1$. Stąd

$$\deg(f(x) - g(x)) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Nie istnieje wielomian stopnia wymiernego, więc szukane $f(x)$ i $g(x)$ nie istnieją. Gdzie jest błąd?

Niestety argument jest nieprawidłowy, ponieważ $\deg(f^2(x) - g^2(x)) \neq 2\deg(f(x) - g(x))$. Dla przykładu, dla $f(x) = x + 1$ oraz $g(x) = x$, wówczas mamy $\deg(f^2(x) - g^2(x)) = 1 \neq 0 = 2\deg(f(x) - g(x))$. Sam pomysł nie jest jednak zły. Spróbujmy go naprawić wychodząc od równości $x \cdot g^2(x) = f^2(x)$.

Załóżmy, że obydwa wielomiany nie są jednocześnie podzielne przez x. Inaczej bowiem możemy podzielić f, g przez odpowiednią potęgę x i uzyskać nową reprezentację ilorazu $\sqrt{x}$. Mamy $f(0) = 0$, czyli $f(x)$ jest podzielny przez x. A zatem $f^2(x)$ jest podzielny przez x^2, również $g^2(x)$ jest podzielny przez x, co oznacza, że jednak f i g mają w zerze obydwa wartość 0, co nie jest możliwe. Porównywaliśmy więc krotności pierwiastka $x = 0$ dla wielomianów z $x \cdot g^2(x)$ oraz $f^2(x)$.

Czasami stwierdzanie niewymierności jest bardzo proste – funkcja sinus oczywiście nie jest wymierna, bowiem jest niezerowa, ale ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Czasem wygodne jest wykorzystanie narzędzi analitycznych. Chociażby w przypadku funkcji logarytmicznej (a także wspomnianego wyżej pierwiastka), o której powiemy dalej, skorzystać można chociażby z pochodnej, która w przypadku logarytmu jest funkcją wymierną. Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden istotny detal. Formalnie funkcje

$$\frac{x^2-1}{x-1}, \quad x+1$$

są różne z uwagi na różną dziedzinę, ale w wielu rozważaniach są jednak traktowane podobnie.

Definicja 13.2: Funkcje równoważne

Dwie funkcje wymierne $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy RÓWNOWAŻNYMI, jeżeli są równe we wszystkich punktach, w których są jednocześnie określone.

Definicja ta jest przydatna choćby po to, by w sposób bardziej rozsądny definiować sumę funkcji wymiernych.

Definicja 13.3: Suma i iloczyn funkcji wymiernych

SUMĄ dwóch funkcji wymiernych $F(x)$, $G(x)$ nazywamy taką funkcję $H(x)$, że dla każdej liczby x, dla której określone są funkcje $F(x)$ i $G(x)$ zachodzi równość:

$$H(x) = F(x) = G(x).$$

Iloczynem funkcji $F(x)$ oraz $G(x)$ nazywamy funkcję $H(x)$, że na części wspólnej dziedziny F oraz G mamy

$$H(x) = F(x) \cdot G(x).$$

Definiujemy też iloraz funkcji wymiernych, pozostawiam Czytelnikowi dopracowanie szczegółów.

Definicja 13.4: Równanie wymierne

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami oraz g nie jest zerowy, to równanie postaci:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

nazywamy równaniem wymiernym z jedną niewiadomą x.

Z określenia funkcji wymiernej wynika, że zbiorem rozwiązań równania wymiernego jak wyżej jest zbiór tych pierwiastków wielomianu f, które są pierwiastkami wielomianu g.

Warto przytoczyć przykłady zadań „z treścią” prowadzących do równań wymiernych, należące do klasyki (budzącej jednak sporo problemów). Pochodzą one z podręcznika H. Pawłowskiego.

Zadanie 105. *Łódź motorowa przebyła w ciągu* 8 *h* 20 *min drogę* 80 *km z prądem rzeki i taką samą drogę pod prąd. Prędkość własna łodzi wynosi* 20 *km/h, Jaka jest prędkość prądu rzeki?*

ROZWIĄZANIE. Oznaczmy przez x nieznaną prędkość prądu rzeki. Czas przepływu z prądem wynosi zatem $\frac{80}{20+x}$ h, zaś pod prąd – $\frac{80}{20-x}$ h, Cały rejs trwał $8\frac{1}{3}$ godziny, więc otrzymujemy równanie:

$$\frac{80}{20+x} + \frac{80}{20-x} = \frac{25}{3},$$

którego rozwiązaniem jest $x = 4$ (odrzucamy pierwiastek ujemny). Prędkość prądu rzeki wynosi 4 km/h.
■

Zadanie 106. *Trzech robotników wykonywało pewną pracę: pierwszy o 7 dni dłużej, drugi o 15 dni dłużej, a trzeci 3 razy dłużej, niż gdyby pracowali razem. W jakim czasie wykonaliby tę pracę razem?*

Rozwiązanie. Niech x będzie liczbą dni, której potrzebowaliby robotnicy pracując razem. Stąd każdy z nich pracując samodzielnie uporałby się z pracą w ciągu odpowiednio $x+5, x+15$ oraz $3x$ dni. Zatem w ciągu 1 dnia wykonaliby, pracując razem, $\frac{1}{x}$ tej pracy, każdy z nich z osobna odpowiednio $\frac{1}{x+7}$, $\frac{1}{x+15}$, $\frac{1}{3x}$ pracy. Stąd wynika równanie:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+15} + \frac{1}{3x},$$

którego jedynym dodatnim rozwiązaniem jest liczba $x = 3$. ■

13.2 Funkcja homograficzna

Definicja 13.5: Funkcja homograficzna

Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, przy czym $ad - bc \neq 0$ oraz $c \neq 0$. Jeżeli funkcję f określoną na zbiorze $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (\frac{d}{c}, \infty)$ można zapisać wzorem $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Szczególnie ważny jest przykład funkcji $\frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$. Jest ona określone w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a zbiorem jej wartości jest także zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Gdy $a > 0$, wówczas wartości ten funkcji są tego samego znaku, co argumenty, w których je przyjmuje. Gdy $a < 0$, wówczas znaki argumentów i przyporządkowanych im wartości są przeciwne. W Istocie, z definicji bardzo łatwo pokazać, że funkcja $\frac{a}{x}$ jest malejące w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, gdy $a > 0$, zaś rosnąca (na tych samych przedziałach), gdy $a < 0$.

Ważna jest również interpretacja praktyczna funkcji $\frac{a}{x}$. Biorąc pod uwagę, że iloczyn dowolnego argumentu i odpowiadającej mu wartości jest wielkością stałą. Mówiąc jeszcze inaczej – wartości tej funkcji są proporcjonalne do odwrotności argumentów, którym są przyporządkowane. Dlatego funkcję tą nazywa się często proporcjonalnością odwrotną. Przykłady zastosowań:

- długość prostokąta o danym polu jest odwrotnie proporcjonalna do jego szerokości,
- liczba kilometrów przebyta przebytej przez samochód trasy jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do liczby litrów paliwa, jakie pozostało w baku;
- w ruchu jednostajnie prostoliniowym prędkość ciała poruszającego się po danej drodze jest odwrotnie proporcjonalna do czasu potrzebnego na jej przebycie,
- liczba równych odcinków, na które dzielimy odcinek o danej długości, jest odwrotnie proporcjonalna do ich długości.

Warto powiedzieć kilka słów o związku iteracji funkcji homograficznych z macierzami i rekurencjami.

Obserwacja 13.1

Niech $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ i niech $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ będzie n-tą iteracją funkcji f. Wówczas

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n.$$

Przykłady:

- Niech $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Wówczas $f(f(x)) = \frac{2}{-2x}$ oraz $f(f(f(x))) = \frac{x-1}{x+1}$, czyli $f^{(4)}(x) = x$. Z drugiej strony
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$
- Dla funkcji $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ mamy $f^{(5)}(x) = f^{(35)}(x)$. Istotnie, mamy:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies A^5 = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \implies f^{(k+5)}(x) = f^{(k)}(x).$$

13.3 Funkcja potęgowa i wykładnicza

Czas na poświęcenie miejsca funkcjom potęgowym, wykładniczym i logarytmicznym. W tym sensie należy przypomnieć kilka informacji o potęgowaniu i przedyskutować niektóre definicje.

Definicja 13.6: Potęga całkowita liczby rzeczywistej

Niech $a \neq 0$ będzie liczbą rzeczywistą, zaś n – liczbą całkowitą. Określamy potęgę liczby a wzorami:

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a, & \text{dla } n \geqslant 1 \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$

Definicję powyższą można rozszerzyć tak, by określić potęgi o wykładniku wymiernym, a potem także potęgi o wykładniku rzeczywistym. Kluczowe jest zachowanie następujących własności działań na potęgach całkowitych m, n liczby a:

$$a^{m+y} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

W ten sposób pojawiają się ograniczenia, bowiem własności te po ewentualnym rozszerzeniu do wykładników wymiernych prowadzą do warunku:

$$a = a^1 = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = (a^{1/2})^2 \geqslant 0.$$

Od podstawy potęgi musimy zatem wymagać nieujemności. Nie może być ona też równa 0. bo mielibyśmy wtedy $0^0 = 1$, co prowadzi do $1 = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1}$, co jest niemożliwe. Dlatego też zakłada się, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x mamy $0^x = 0$. Nie definiuje się natomiast 0^0, ani 0^x, dla $x < 0$, bowiem pojawiają się wówczas kolejne trudności.

Gdy założymy, że $a > 0$ oraz, że $w \in \mathbb{Q}$, to biorąc liczby całkowite $q > 0$ oraz p takie, że $w = \frac{p}{q}$. Interesuje nas przyjęcie definicji $a^w = \sqrt[q]{a^p}$. Wartość potęgi wymiernej jest wówczas dobrze określona, bowiem jeśli dla liczb całkowitych $q' > 0$ oraz p' takich, że $w = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ mamy: $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$.

Twierdzenie 13.1

Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas funkcja $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f_a(w) = a^w$ ma następujące własności:

- dla dowolnych $w, v \in \mathbb{Q}$ mamy $f_a(w + v) = f_a(w) \cdot f_a(v)$.
- $f_a(1) = a$,
- jeżeli $a > 1$, to funkcja f_a jest ściśle rosnąca; jeśli $a = 1$, to f_a jest stała, zaś f_a jest ściśle malejąca dla $0 < a < 1$.
- dla każdej liczby wymiernej w mamy $f_a(w) > 0$.

W szkole pomijamy ten aspekt, ale definicja funkcji wykładniczej o dziedzinie rzeczywistej wymaga następującego wyniku, którego dowód można znaleźć w tekście dr. Krycha.

Twierdzenie 13.2

Dla każdej liczby $a > 0$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $\widetilde{f}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zwana FUNKCJĄ WYKŁADNICZĄ O PODSTAWIE a która jest przedłużeniem funkcji f_a, to znaczy: dla każdej liczby wymiernej w mamy $\widetilde{f}_a(w) = f_a(w)$, przy czym $\widetilde{f}_a(1) = a$, także dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\widetilde{f}_a(x + y) = \widetilde{f}_a(x) \cdot \widetilde{f}_a(y).$$

Można pokazać, że zamiast ciągłości funkcji a^x zakładać można monotoniczność. Te kwestie nie mieszczą się już w matematyce szkolnej. Zobaczmy więc kilka przykładów zadań dotyczących potęgowania.

Zadanie 107. *Liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą. Jaka to cyfra?*

Rozwiązanie. Jaka by nie była szukana pierwsza cyfra c, z pewnością znamy pierwszą cyfrę iloczynu $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Jest to 1. Załóżmy, że 2^n ma $k+1$ cyfr, a 5^n ma $l+1$ cyfr. Wówczas można zapisać:

$$2^n = (c + r_1) \cdot 10^k, \quad 5^n = (c + r_2) \cdot 10^l,$$

gdzie c jest szukaną cyfrą, a r_1, r_2: liczbami wymiernymi z przedziału $[0, 1)$. Krótko mówiąc r_1, r_2 powstają przez podzielenie 2^n oraz 5^n odpowiednio przez 10^k oraz 10^l. Na przykład:

$$1024 = (1 + 0,024) \cdot 10^3.$$

Teraz wykonujemy iloczyn:

$$2^n \cdot 5^n = (c + r_1) \cdot 10^k \cdot (c + r_2) \cdot 10^l.$$

A zatem $0 < (c + r_1)(c + r_2)$ jest dodatnią potęgą liczby 10. Biorąc jednak pod uwagę, że $c < 9$ oraz $r_1, r_2 < 1$ mamy

$$0 < (c + r_1)(c + r_2) < 100 \quad \Rightarrow (c + r_1)(c + r_2) = 10.$$

To szacowanie daje nam od razu wynik $c = 3$. Istotnie, mamy:

$$(2 + r_1)(2 + r_2) < 9, \quad (4 + r_1)(4 + r_2) > 16.$$

Nietrudno widzieć, że biorąc $n = 5$ mamy

$$2^5 = 32, \quad 5^5 = 3125.$$

Proszę spróbować pokazać, że jeśli pierwsze dwie cyfry od lewej w przedstawieniu liczb 2^n oraz 5^n są identyczne, to są to kolejno (od lewej) cyfry 3, 1. Opieramy się tu na szacowaniu $\sqrt{10} \approx 3.16227766$. ∎

Zadanie 108 (XI OM)**.** *Niech $n \geqslant 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Rozwiązać równanie*

$$\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = 4\sqrt[n]{x^2 - 1}.$$

Rozwiązanie. Podstawiamy

$$\sqrt[n]{x+1} = u, \qquad \text{oraz} \qquad \sqrt[n]{x-1} = v.$$

Mamy wówczas $x + 1 = u^n$ oraz $x - 1 = v^n$, czyli otrzymujemy dwa warunki:

$$\begin{cases} u^n - v^n &= 2 \\ u^2 + v^2 &= 4uv. \end{cases}.$$

Nietrudno pokazać (nie robimy tu tego), że następujące warunki są równoważne:

- liczba $x > 1$ jest rozwiązaniem wyjściowego równania,
- liczby dodatnie u, v spełniają powyższy układ równań.

Wyznaczmy rozwiązania uzyskanego układu. Wyznaczamy stosunek u/v:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 4\left(\frac{u}{v}\right) + 1 = 0.$$

Wiemy, że $u > 0$ oraz $v > 0$, więc z drugiego równania mamy $u > v$ i dostajemy $\frac{u}{v} = 2 + \sqrt{2}$, co daje

$$v^n = \frac{2}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1}.$$

Aby znaleźć pozostałe pierwiastki wyjściowego równania należy zauważyć, że uwagi na prawą stronę musi być $x^2 \geqslant 1$ oraz, że jeśli x jest pierwiastkiem równania, to również ma ono pierwiastek $-x$. Zatem równanie ma jeszcze dodatkowe rozwiązanie.

$$-\frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} = \frac{(2 - \sqrt{3})^n + 1}{(2 - \sqrt{3})^n - 1}.$$

∎

13.4 Funkcja logarytmiczna

Do zdefiniowania logarytmu kluczowy jest następujący wniosek.

Wniosek 13.1

Jeśli a jest liczbą dodatnią i różną od 1, wówczas dla każdej liczby dodatniej x istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista y, że $x = a^y$. Piszemy wtedy $y = \log_a x$ i liczbę y nazywamy LOGARYTMEM PRZY PODSTAWIE a z liczby x.

Definicja 13.7: Funkcja logarytmiczna o podstawie a

Funkcję, która liczbie $x > 0$ przypisuje jej logarytm przy podstawie a nazywamy LOGARYTMICZNĄ.

Przykłady:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \quad \log_{16} 2 = \frac{1}{4}, \quad \log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}, \quad \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}} = -\frac{3}{2}.$$

Logarytmy służyły jeszcze pokoleniu naszych dziadków do mnożenia dużych liczb, począwszy od astronomów, którzy mnożyli naprawdę duże liczby. Zanim w 1970 roku pojawiły się pierwsze kalkulatory, nawet mnożenie (małych) liczb rodzaju $6931 \cdot 5743 = 39804733$. mogło prowadzić do wielu błędów. Zachęcam każdego, by spróbował. Z drugiej strony zauważmy, że: $10^{1,8408} \cdot 10^{1,7591} = 10^{3,5999} = 3980$.

Widzimy więc, że nawet znajomość bardzo przybliżonych wartości logarytmów pozwala na uzyskiwanie przybliżonych wartości iloczynu. A może je wyznaczać ze znacznie większą dokładnością. W starszych podręcznikach znaleźć można jeszcze metody związane z cechą i mantysą. Czytelnika zainteresowanego innymi tego typu historiami, na przykład sposobem działania suwaka logarytmicznego (ciekawe zdjęcia), odsyłam do sympatycznego tekstu autorstwa dr Tomasza Plucińskiego z Uniwersytetu Gdańskiego.

Niezależnie od tego typu motywacji (istotnych kiedyś), kluczową motywacją z punktu widzenia tzw. zastosowań matematyki w życiu codziennym jest rozumienie czym jest skala logarytmiczna. Wielkość pH używana w chemii, skala Richtera, decybel, skala muzyczna, Rozumienie na czym polega kolejny poziom skali jest chyba istotne nawet dla przeżycia. Dobrze by było, by ludzie chodzący po Tatrach rozumieli, że zagrożenie lawinowe stopnia drugiego rozumieć należy raczej nie jako 2 razy większe niż zagrożenie stopnia pierwszego – ale raczej jako dziesięć razy większe.

Obserwacja 13.2: Podstawowe własności logarytmów

Jeśli $1 \neq a > 0$, to dla każdego $y > 0$ mamy $y = a^{\log_a y}$. Ponadto:

(a) dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

(b) dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

(c) $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$,

(d) dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$ zachodzi $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$,

(e) jeśli $b, x > 0$ oraz $1 \neq b$, to $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, czyli

$$\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x,$$

(f) jeśli $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $y \neq 0$, to

$$\log_{a^y} b^x = \frac{x}{y} \cdot \log_a b.$$

Własność (e) nazywamy często twierdzeniem o zamianie podstawy logarytmu. Kolejną istotną własnością jest różnowartościowość funkcji logarytmicznej, a dokładniej – monotoniczność. Dla $a \in (0,1)$ funkcja logarytmiczna jest malejąca, natomiast dla $a > 1$ jest rosnąca.

Pamiętajmy jeszcze, że $\log_{10} x$, czyli tak zwany LOGARYTM DZIESIĘTNY, czyli logarytm o podstawie $a = 10$, oznaczamy po prostu jako $\log x$. Nie zajmujemy się logarytmem naturalnym o podstawie e.

Zadanie 109. *Oblicz* $\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$.

ROZWIĄZANIE. Korzystamy wielokrotnie z własności (a):

$$\begin{aligned}
\log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2 &= \log 4 \cdot \log 5 \cdot 5 + (\log 2)^2 \\
&\overset{(a)}{=} \log 5 \cdot (\log 5 + \log 4) + (\log 2)^2 \\
&= (\log 5)^2 + (\log 5)(\log 4) + (\log 2)^2 \\
&= (\log 5)^2 + (\log 5)(\log 2^2) + (\log 2)^2 \\
&\overset{(a)}{=} (\log 5)^2 + 2(\log 5)(\log 2) + (\log 2)^2 \\
&= (\log 5 + \log 2)^2 \overset{(a)}{=} (\log 10)^2 = 1
\end{aligned}$$

■

Zadanie 110. *Oblicz* $\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$.

ROZWIĄZANIE. Tym razem korzystamy z własności (e) oraz (f):

$$\log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16 = \log_{2^{1/2}} 3^3 \cdot \log_{3^2} 2^4 = 2 \cdot 3 \cdot \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_3 2 = 12 \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 12.$$

■

Zadanie 111. *Oblicz iloczyn*

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{99} 100 \cdot \log_{100} 2.$$

ROZWIĄZANIE. Stosujemy do każdego z logarytmów wzór (e) tak, by zamienić na podstawę 10, dostając:

$$\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\log 100}{\log 99} \cdot \frac{\log 2}{\log 100} = 1.$$

■

Zadanie 112. *Oblicz* $(\log 5)^3 + (\log 20)^3 + (\log 8)(\log 0,25)$.

ROZWIĄZANIE. Kluczowe jest dobre użycie tożsamości $\log 2 + \log 5 = 1$. Przyjmując $x = \log 2$. Mamy wówczas:

$$(1+x)^3 + (1-x)^3 + (3x)(-2x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 6x^2 = 2.$$

■

Przy okazji omawiania logarytmów sensowne jest powiedzenie kilku słów o równaniach, dziedzinie i podobnych zagadnieniach. Często rozwiązywanie równań logarytmicznych zaczynamy od wyznaczania dziedziny. Na przykład dla równania $\log x - \log(x-3) = \log 4$ mamy $x > 0$ oraz $3 - x > 0$, czyli $x \in (0,3)$. Stąd

$$\log \frac{x}{x-3} = \log 4 \Rightarrow \frac{x}{x-3} = 4 \Rightarrow x = 4(x-3) \Rightarrow x = 4.$$

Z drugiej strony liczenie dziedziny równania

$$\log_2 (2 \log_3(1 + \log_2(1 + \log_2(x)))) = \frac{1}{2}$$

wydaje się niepotrzebnie pracochłonne. Bardziej odpowiednie wydaje się odwołanie do **metody analizy starożytnych**, która polega na sprawdzeniu jakie warunki arytmetyczne spełnia potencjalne rozwiązanie powyższego (czyli nie przekształcamy równoważnie) i sprawdzenie na końcu, czy spełnia ono wyjściowe równanie. W powyższym przypadku takim jedynym rozwiązaniem jest $x = 8$.

Możliwa dalsza lektura – funkcje wykładnicze i logarytmiczne

- M. Krych, *Potęgi i logarytmy*, Skrypt dla XIV LO, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/staszic/skrypt18-logarytmy_D.pdf`
- M. Krych, *Funkcja wykładnicza, logarytmy, kosinus i sinus*, materiały dla studentów Chemii, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/chemia/2016-2017/ch13-14_logsin.pdf`
- H. Pawłowski, *Matematyka 1-3. Zakres rozszerzony.* Wydawnictwo Operon 2004.
- T. Pluciński, *Logarytmy, suwak logarytmiczny i inne maszyny do liczenia*, `http://www.tomek.strony.ug.edu.pl/logarytmy.htm`

Zadania – funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Zadanie 1. *Oblicz a, jeśli wiadomo, że* $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} = 1$.

Zadanie 2. *Udowodnij, że jedyną liczbą naturalną n spełniającą warunek $3^n + 4^n = 5^n$ jest $n = 2$.*

Zadanie 3. *Czy istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równość*

$$2^{a^2} + 2^{b^2} = 2^{c^2}?$$

Zadanie 4. *Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie*

$$9^x - 6^x = 4^x.$$

Zadanie 5. *Wykaż, że jeśli a, m, n, p, q są liczbami dodatnimi, przy czym $a \neq 1$, oraz zachodzą równości*

$$a^m + a^n = a^p + a^q, \quad a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q},$$

to $m \cdot n = p \cdot q$.

Zadanie 6. *Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi:*

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} \geqslant a^b \cdot b^a.$$

Zadanie 7. *Wykaż, że jeżeli a, b, p, q są takimi liczbami rzeczywistymi, że $a > b > 0$ i $p > q$, to*

$$\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^q - b^q}{a^q + b^q}.$$

Zadanie 8. *Ile jest ciągów geometrycznych $a_1, a_2, \ldots$ o pierwszym wyrazie $a_1 = a$ oraz ilorazie q, gdzie a, q są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $\log_8 a_1 + \log_8 a_2 + \ldots + \log_8 a_{12} = 2006$.*

Zadanie 9. ($\star$) *Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $ab > 2004a + 2005b$. Udowodnij, że*

$$\sqrt{a+b} > \sqrt{2004} + \sqrt{2005}.$$

Zadanie 10. ($\star$) *Liczby dodatnie spełniają dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ równości:*

$$a^n = a + 1, \quad b^{2n} = 3a + b.$$

Udowodnij, że $a > b$.

Zadanie 11. ($\star$) *Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, b, dla których*

$$\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b}(2^{1000}))) = 0.$$

Zadanie 12. ($\star$) *Dodatnie, parami różne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość*

$$\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}.$$

Wykaż, że $a^a \cdot b^b \cdot c^c = 1$.

Zadanie 13. ($\star$) *Poniższy układ równań ma jedno rozwiązanie $x > 1$. Znajdź b*

$$\begin{cases} 3\log_b(\sqrt{x}\log_b x) & = 56 \\ \log_{\log_b(x)}(x) & = 54. \end{cases}$$

Zadanie 14. ($\star\star$) *Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$[\sqrt[2]{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n].$$

Zadanie 15. ($\star\star$) *Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność*

$$\log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \log_n 6 \cdot \ldots \cdot \log_n(2n-2) \leqslant 1.$$

Rozdział 14

Funkcje i równania trygonometryczne

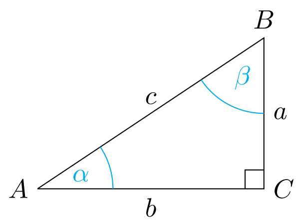
14.1 Geometryczne źródła definicji funkcji trygonometrycznych

W szkole definicja funkcji trygonometrycznej ma pochodzenie geometryczne. Zaczynamy od kątów ostrych.

Definicja 14.1: Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Przypuśćmy, że dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 90°$. Przyjmijmy też, że

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB, \quad \alpha = \measuredangle BAC, \quad \beta = \measuredangle ABC.$$



Definiujemy wówczas funkcje SINUS, COSINUS, TANGENS i COTANGENS kąta $\alpha \in (0°, 90°)$:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Na mocy cechy kąt-kąt-kąt przystawania trójkątów stwierdzamy bez trudu, że powyższe definicje są niezależne od wyboru trójkąta prostokątnego ABC. Już z tej definicji wyprowadzić można wiele przydatnych zależności. Przytaczamy jedynie najbardziej podstawowe fakty, pomijając ich proste dowody.

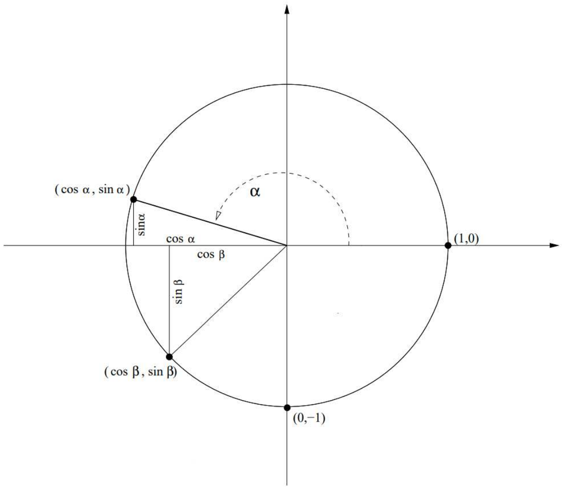
Obserwacja 14.1

Niech α będzie kątem ostrym. Wówczas:

- wartości funkcji trygonometrycznych kąta α są dodatnie,
- $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha).$
- zachodzą równości $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ oraz (tzw. jedynka trygonometryczna) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Na podstawie tych obserwacji można rozwiązywać szereg zadań geometrycznych, w tym związanych z prostymi zastosowaniami. Te ostatnie wymagają często użycia tablic trygonometrycznych zawierających przybliżone wartości funkcji dla argumentów z dokładnością do np. 1 stopnia.

Przypomnijmy definicję funkcji trygonometrycznych, przytoczoną już w wykładzie 10. Załóżmy, że odmierzyliśmy łuk okręgu o mierze t od punktu $(1,0)$ do punktu P. Wtedy współrzędnymi punktu p są liczby, które oznaczamy jako $\cos t$ oraz $\sin t$ – to jest definicja SINUSA i KOSINUSA kąta o mierze t.



Rys. 1 Definicja sinusa i cosinusa kąta o mierze $t \in \mathbb{R}$. Rysunek na podstawie materiałów dr. Krycha.

Funkcje sinus i cosinus mają dziedzinę rzeczywistą. definiujemy też dla $D = \mathbb{R} \setminus \{(k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ funkcję TANGENS $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ oraz dla $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ funkcję COTANGENS $\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

14.2 Miara stopniowa i miara łukowa

Osobne rozważania można by związać ze słowami „odmierzyliśmy łuk” i w istocie w stwierdzeniu tym zawarte są pewne umowy, które trzeba z uczniami omówić dokładniej (choć zawsze jest tu wątek nieelementarny). Definicja wyżej stosuje tzw. **miarę łukową** kąta, poznawaną w liceum. Co to jest w ogóle miara? W podręczniku Henryka Pawłowskiego mowa jest o mierze kąta jako o funkcji przypisującej kątom liczby rzeczywiste. Takich funkcji jest w istocie wiele. Wystarczy zdefiniować kąt jednostkowy, zwany krótko jednostką tej miary, a następnie sprawdzić ile razy kąt jednostkowy mieści się w danym kącie. Otrzymana liczbą jest miarą kąta. Kątowi jednostkowemu przypisujemy miarę 1. Zakładamy przy tym, że: kąty równe (geometrycznie) mają równe miary oraz, że miara sumy dwóch kątów równa jest sumie ich miar. Oczywiście w szkole rozważamy konkretne przykłady miar, ale robimy to jedynie poglądowo.

W szkole podstawowej poznajemy **miarę stopniową** kąta, której jednostką jest kąt równy $\frac{1}{360}$ kąta pełnego. Jego miara wynosi $1°$. Rozszerzamy tą miarę tak, by przyjmowała dowolną wartość rzeczywistą, bowiem chcemy zdefiniować funkcje trygonometryczne w dziedzinie rzeczywistej (lub w maksymalnym możliwym podzbiorze $\mathbb{R}$). Zasadniczo chodzi o jakąś próbę formalnego utożsamienia kątów i obrotów płaszczyzny wokół ustalonego punktu. Mianowicie rozważamy na **zorientowanej** płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych półprostą, której punkt początkowy znajduje się w początku tego układu i obracamy ją dookoła tego punktu. Za początkowe położenie półprostej przyjmujemy położenie dodatniej półosi osi OX. Mówimy teraz o **obrocie w kierunkach**: zgodnym ze wskazówkami zegara oraz przeciwnym do ruchu wskazówek zegara tak, że zakreślony zostaje pewien **kąt zorientowany**. Gdy zakreślaliśmy w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara – kątowi temu przypisujemy miarę dodatnią, a gdy w przeciwnym – miarę ujemną. W ten sposób możemy mówić np. o kącie[1] o mierze $-100°$. W realiach szkolnych trudno wchodzić w te szczegóły (można jeszcze wspomnieć o polu zorientowanym).

Półprostą wspomnianą w powyższej definicji możemy obrócić dowolną całkowitą ilość razy i jeszcze o pewien kąt mniejszy od kąta pełnego, co prowadzi do definicji miary kąta większej niż $360°$. Dla przykładu, jeśli półprostą obrócimy cztery razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i jeszcze o kąt $45°$, wówczas półprosta ta zakreśliła kąt o mierze $4 \cdot 360° + 45° = 1485°$. Oczywiście ramię początkowe i końcowe kąta o mierze $1485°$ pokrywa się z ramieniem odpowiednio początkowym i końcowym kąta $45°$. A zatem utożsamiamy ze sobą kąty, których miary różnią się o całkowitą wielokrotność liczby $360°$.

[1] Dopiero mając na płaszczyźnie pewną orientację możemy dopiero mówić o obrotach i o kącie zorientowanym...

Miara stopniowa jest dogodna w geometrii, gdzie nie mamy oporów przed posługiwaniem się sześćdziesiątkowym systemem mierzenia kątów, ale przy odrobinie upartości możemy nawet określić funkcje trygonometryczne dowolnego kąta pozostając przy tej właśnie mierze (przez utożsamienie z obrotami). Standardowo jednak rozważamy mniej elementarną, ale intuicyjnie czytelniejszą miarę łukową.

Definicja 14.2: Miara łukowa kąta

Rozważmy dowolny kąt α i zatoczmy z jego wierzchołka okrąg o dowolnie wybranym promieniu r. Niech l oznacza długość łuku okręgu, zawartego w tym kącie, przy czym długość ta może być ujemna, jeśli kąt zakreślamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. MIARĄ ŁUKOWĄ kąta nazywamy stosunek długości tego łuku do długości promienia.. Jednostką tej miary jest RADIAN (w skrócie rad). Radian jest to kąt, dla którego długość łuku jest równa jest długości promienia.

Kąt pełny ma miarę łukową 2π i często mówimy po prostu, że kąt pełny ma miarę 2π (radianów). Miara łukowa kąta jest iloczynem jego miary stopniowej przez liczbę $\frac{\pi}{180}$. Jeden radian to w przybliżeniu 57 stopni, 17 minut i 44 sekundy.

Przypominanie powyższych definicji może nie nasuwać zbyt wielu skojarzeń algebraicznych, ale powinno dać pogląd na to, że rozważany tu styk geometrii i analizy jest z różnych względów nietrywialny i delikatny. Dotykamy tu pojęć kąta, orientacji, miary, długości łuku, które to są wszystkie nieelementarne. Nie powinno zatem dziwić Czytelnika, że w uporządkowanym wykładzie akademickim z analizy matematycznej, funkcje trygonometryczne definiuje się za pomocą szeregów funkcyjnych (których zbieżność trzeba najpierw dokładnie przedyskutować). Jeszcze inne podejście i metody pracy z funkcjami trygonometrycznymi oferują liczby zespolone i funkcja wykładnicza. Znowu jest to jednak materiał pozaszkolny.

Zwracam na te zagadnienia uwagę po to, by uświadomić Czytelnikowi, że funkcje trygonometryczne, choć nieelementarne, obecne są w szkole głównie z uwagi na ich istotne znaczenie w zastosowaniach. Zastanawiać się oczywiście można na ile rozbudowana technologia operowania wzorami trygonometrycznymi wnosi cokolwiek sensownego do rozwoju ucznia, który nie ma poważnego kontaktu z fizyką i nie zna często motywacji stojących za tymi wzorami (choćby zjawisko interferencji fal[2]). Można pytać jaki jest cel tak silnej obecności funkcji i równań trygonometrycznych zwłaszcza na poziomie podstawowym. Oczywiście zastosowania praktyczne trygonometrii są wszechobecne, począwszy od nawigacji czy inżynierii przez jakiekolwiek niemal zagadnienia fizyczne, Niegdyś trygonometria miała niebanalne znaczenie militarne (np. artyleryjskie). Program szkolny w wielu miejscach te kwestie omija, co raczej nie może dziwić.

14.3 Podstawowe własności i ich wyprowadzenie

Skupmy się na algebrze. Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych wnosimy z definicji geometrycznej i dotyczą one parzystości i nieparzystości tych funkcji, a także ich okresowości. Poniższe wzory wynikają z tego, że punkty

$$(\cos t, \sin t) \quad \text{oraz} \quad (\cos(-t), \sin(-t))$$

leżą symetrycznie względem środka układu współrzędnych.

Obserwacja 14.2

Funkcja sinus jest nieparzysta, a funkcja cosinus jest parzysta. Dokładniej, dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Dla każdego $\beta \in \mathbb{R}$ takiego, że istnieje $\operatorname{tg}\beta$ oraz dla każdego $\gamma \in \mathbb{R}$, dla którego istnieje $\operatorname{ctg}\gamma$ mamy także:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha), \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}(\alpha).$$

Oczywiście podstawową rolę w rozważaniach algebraicznych stanowi fakt, że funkcje trygonometryczne (zmiennej rzeczywistej) są okresowe. Fakt ten wynika natychmiast z tego, że obrót o kąt 2π jest przekształceniem identycznościowym: punkt (x, y) przekształcany jest na ten sam punkt (x, y).

[2] http://www.iwiedza.net/download/ruch_falowy.pdf

Obserwacja 14.3: Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzą wzory:

$$\cos(t+2\pi) = \cos t, \quad \sin(t+2\pi) = \sin t.$$

Z faktu, że obrót o kąt $\pi/2$ wokół punktu $(0,0)$ przeprowadza punkt (x,y) na $(-y,x)$ wynika natychmiast, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t, \quad \sin(t+\frac{\pi}{2}) = \cos t.$$

W podobny sposób można uzasadnić szereg innych **wzorów redukcyjnych**, np. dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy:

$$\cos(t+\pi) = -\cos t, \quad \sin(t+\pi) = -\sin t.$$

Dysponując powyższymi wzorami większość istotnych dla nas obserwacji trygonometrycznych sprowadzić możemy do dowodów geometrycznych, czasami bardzo eleganckich. I tak na przykład dowodzimy prawdziwość jedynki trygonometrycznej (i twierdzenia odwrotnego!), korzystając w zasadzie z twierdzenia Pitagorasa (i twierdzenia odwrotnego).

Dla wielu rozważań istotne jest prześledzenie przebiegu zmienności funkcji sinus i kosinus, które przeprowadzić można geometrycznie, szkicując odpowiednie promienie i odcinki styczne do okręgu.

Obserwacja 14.4: Nierówności

Niech $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Wówczas:

- $\sin\alpha < \sin\beta$ oraz $\cos\alpha > \cos\beta$,
- $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$,
- $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Idąc za podejściem prof. Guzickiego z książki *Geometria i trygonometria*, warto niektóre rozumowania dotyczące formuł trygonometrycznych rozumieć w języku obrotów i ich złożeń (oczywiście są w tej książce też dowody geometryczne, dla kątów ostrych). Przy obrocie o kąt α wokół punktu $(0,0)$ punkt $(x,0)$ przechodzi na $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$, zaś punkt $(0,y)$ przechodzi na punkt $(-y\sin\alpha, y\cos\alpha)$. Nietrudno zrozumieć, na poziomie wektorowym, że pojedynczy obrót przeprowadza sumę wektorów na sumę obrazów tych wektorów przy tym obrocie (ogólniej – jest przekształceniem liniowym), co w szczególności znaczy, że obrazem dowolnego punktu (x,y) przy obrocie o kąt α wokół punktu $(0,0)$ jest punkt, którego współrzędne są sumami współrzędnych obrazów punktów $(x,0)$ oraz $(0,y)$ przy tym obrocie, czyli

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

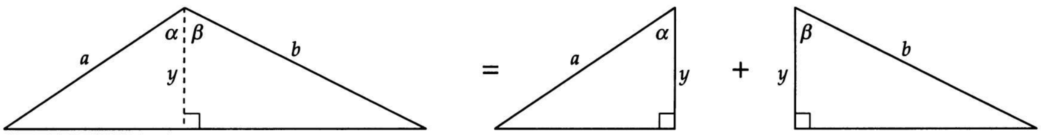
Możemy do tego dołożyć geometrycznie jasny fakt, że złożenie dwóch obrotów wokół punktu $(0,0)$ odpowiednio o kąty α,β jest obrotem wokół punktu $(0,0)$ o kąt $\alpha+\beta$ i zastanawiając się z tej perspektywy nad punktem $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ dostajemy natychmiast wzory:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

To są moim zdaniem jedyne dwa wzory trygonometryczne, które trzeba znać, i których wyprowadzenie trzeba zrozumieć. Na ich podstawie dowodzi się oczywiście wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kątów, a także wyprowadza się formuły typu (nie wymieniamy wszystkich możliwych):

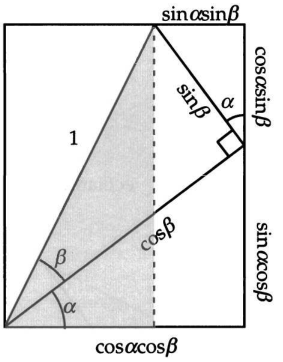
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Oczywiście wzory powyższe można też uzyskiwać czysto geometrycznie. Poniżej przykłady kilku „dowodów bez słów”, dla kątów ostrych, które uzupełnić należy następnie odpowiednimi wzorami redukcyjnymi. Więcej tego typu dowodów można znaleźć w książkach Rogera B. Nielsena (bibliografia).

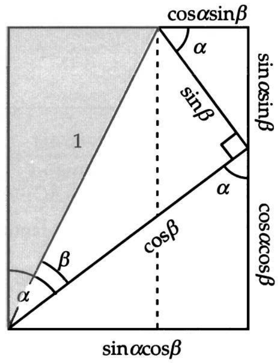


$\alpha, \beta \in (0, \pi/2) \Rightarrow y = a\cos\alpha = b\cos\beta$

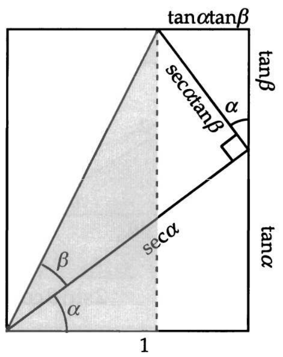
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$



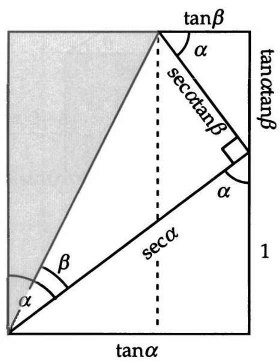
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

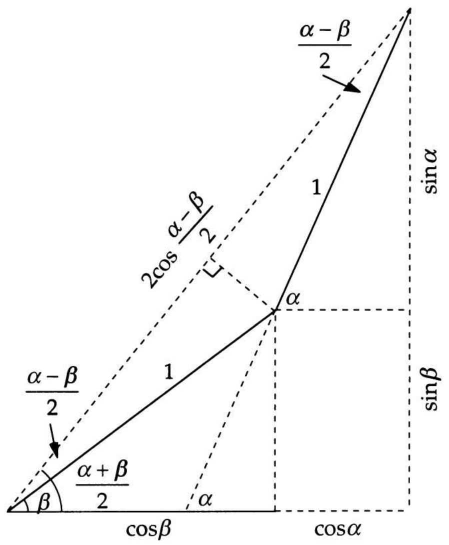


$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$



$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$





—Yukio Kobayashi

Wnioskiem z przedstawionych wzorów jest na przykład poniższy ważny rezultat.

Wniosek 14.1

Załóżmy, że $0 < \alpha < \pi$ oraz $0 < \beta < \pi$. Wówczas

- warunek $\sin\alpha = \sin\beta$ implikuje $\alpha = \beta$ lub $\alpha + \beta = \pi$,
- warunek $\cos\alpha = \cos\beta$ implikuje $\alpha = \beta$.

14.4 Równania i nierówności trygonometryczne

Powiedzmy kilka słów o równaniach i nierównościach trygonometrycznych, Podstawową umiejętnością jest znajdowanie przeciwobrazów punktów z przeciwdziedziny, czyli rozwiązywanie równań typu

$$f(x) = m, \qquad \text{dla } m \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście w przypadku funkcji sinus i cosinus równanie to ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $|m| \leqslant 1$. Dokładniej,

- dla każdego $m \in [-1, 1]$ istnieje dokładnie jedno $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ takie, że $\sin(x) = m$,
- dla każdego $m \in [-1, 1]$ istnieje dokładnie jedno $x \in [0, \pi]$ takie, że $\cos(x) = m$.

Liczby x występujące w warunkach wyżej oznaczamy symbolami $\arcsin m$, $\arccos m$ i nazywamy odpowiednio: **arkus sinus** m oraz **arkus cosinus** m. Krótko mówiąc, po ograniczeniu dziedziny funkcji sinus oraz cosinus do maksymalnego przedziału (długości π, na którym każda z tych funkcji jest różnowartościowa, określić możemy funkcje odwrotne do nich, i to są właśnie funkcje arkus sinus i arkus cosinus.

W przypadku funkcji tangens i cotangens, przeciwdziedzina stanowi zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i można pokazać, że:

- dla każdego $m \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ takie, że $\operatorname{tg}(x) = m$,
- dla każdego $m \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno $x \in (0, \pi)$ takie, że $\operatorname{ctg}(x) = m$.

Liczby x występujące wyżej oznaczamy symbolami $\operatorname{arctg} m$ oraz $\operatorname{arcctg} m$ i nazywamy odpowiednio **arkusem tangensem** oraz **arkusem kotangensem** m.

Rozwiązywanie konkretnych równań sprowadza się często do rozmaitych rozważań na wykresie i często prowadzi to do gubienia przypadków i licznych błędów (który wykres jest który...). Wygodniejsze wydaje się rozumowanie za pomocą koła trygonometrycznego (nawet dla równań wyższych stopni).

- Rozwiązań równania $\sin 2x = 1$ szukamy w następujący sposób. Zastanawiamy się jakie punkty na kole trygonometrycznym o współrzędnych $(\cos 2x, \sin 2x)$ maja drugą współrzędną równą 1. Jedyny taki punkt na kole trygonometrycznym to punkt $(0, 1)$, a punkt ten jest końcem krzywej zakreślonej na okręgu jednostkowym za pomocą kątów $\pi/2 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem $2x = \pi/2 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd $x = \pi/4 + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

  Oczywiście można pisać standardowo: okresem funkcji sinus jest 2π, więc wystarczy znaleźć rozwiązania w przedziale $[0, 2\pi]$. Wiadomo, że dla $t \in [0, 2\pi]$ mamy $\sin t = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = \pi/2$. Teraz jednak uczeń może się zgubić. Czy powinien zapisać $x = \pi/4$ i uznać to za jedyne rozwiązanie w przedziale $[0, 2\pi]$? Jak ma nie zgubić rozwiązania $5\pi/4$? Czy ma od razu wiedzieć, że okresem funkcji $\sin 2x$ jest π? Oczywiście uczeń powinien zapisać $t = 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, a następnie wykonać ostatni krok.

- Rozwiązaniami równania $\sin \frac{x}{3} = \frac{4}{5}$ są wszystkie liczby postaci $(-1)^n \arcsin \frac{4}{5} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Oczywiście można z różnych powodów szukać w tablicach wartości przybliżonej funkcji $\arcsin \frac{4}{5}$. Nie można natomiast zawsze oczekiwać, że liczba ta będzie na przykład zapisywalna za pomocą działań arytmetycznych (łącznie z pierwiastkowaniem) od argumentu $4/5$. Innymi słowy niektóre wartości funkcji trygonometrycznych są liczbami niekonstruowalnymi. Jak jest w przypadku $\arcsin \frac{4}{5}$?

14.5 Wymierne, algebraiczne i przestępne wartości

Skoro dotknęliśmy problemu wymierności i niewymierności wartości funkcji trygonometrycznych, trzeba powiedzieć, że są to w ogólności zagadnienia trudne. Na przykład, pierwszy dowód faktu, że dla niezerowej liczby wymiernej r licba $\operatorname{tg} r$ jest zawsze niewymierna przeprowadził J.H. Lambert (1761) za pomocą ułamków łańcuchowych. Za pomocą całek fakt ten można wywnioskować niemal elementarnie, a także wyprowadzić z niego choćby niewymierność liczby π, czy e (patrz artykuł Znou i Markova w bibliografii). Do klasyki należy natomiast następujący fakt, wynikający ciekawie z tożsamości trygonometrycznych.

Twierdzenie 14.1

Niech kąt α ma miarę będącą wymierną wielokrotnością 2π, czyli $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$, dla pewnych liczb całkowitych m, n, gdzie $n \neq 0$. Wówczas $\cos\alpha$ jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\alpha \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Dowód. Załóżmy, że $2\cos\alpha = \frac{a}{b}$ jest liczbą wymierną. Możemy wybrać $a, b \in \mathbb{Z}$, gdzie $b \neq 0$ takie, że $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Ze wzoru $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ mamy:

$$2\cos 2\alpha = \frac{a^2}{b^2} - 2 = \frac{a^2 - 2b^2}{b^2}.$$

Zauważmy jednak, że $\mathrm{NWD}(a^2 - 2b^2, b^2) = \mathrm{NWD}(a^2, b^2) = 1$. A zatem, jeśli b nie jest równe ± 1, to w ciągu liczb wymiernych

$$2\cos\alpha, 2\cos 2\alpha, 2\cos 4\alpha, 2\cos 16\alpha, \ldots$$

zapisanych w postaci nieskracalnej, ułamki są coraz większe. Z drugiej jednak strony założyliśmy, że $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 360^\circ$. Wiemy też, że cosinus jest funkcją o okresie 2π. A zatem ciąg $(2\cos 2^k\alpha)$ przyjmuje co najwyżej n różnych wartości. To jednak przeczy obserwacji dotyczącej mianowników wyrazów tego ciągu, zapisanych w postaci nieskracalnej. Widzimy zatem, że możliwa jest jedynie sytuacja, gdy $b = \pm 1$. $\square$

Analogiczne twierdzenie można udowodnić dla funkcji sinus, co pokazuje, że choćby rozważana już liczba $\arcsin\frac{4}{5}$ jest niewymierna. To oczywiście nie jest koniec historii, ale wręcz przeciwnie. W tym celu powiedzmy kilka słów o liczbach algebraicznych i przestępnych. Nie mieliśmy wcześniej takiej okazji.

Definicja 14.3: Liczby algebraiczne i przestępne

Liczbę $r \in \mathbb{R}$ nazwiemy ALGEBRAICZNĄ, jeśli istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkiem jest liczba r. Liczbę rzeczywistą r nazywamy PRZESTĘPNĄ, jeśli nie jest ona algebraiczna. Najmniejszy stopień wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkiem jest r, nazywamy stopniem liczby algebraicznej r.

Większość rozważanych w szkole liczb niewymiernych to liczby algebraiczne (poza liczbą π, co nie jest, jak wiemy z wykładu z Analizy, prostym faktem). Należą do nich oczywiście liczby typu $\sqrt[n]{w}$, gdzie w jest liczbą wymierną, ale także wartości funkcji trygonometrycznych są, dla wymiernych wielokrotności kąta pełnego, liczbami algebraicznymi. Dowód nie jest trudny i wymaga umiejętnego użycia formuły wyrażającej np. cosinus całkowitej wielokrotności kąta α jako wielomianu od cosinusa kąta α. Do dowodu odsyłam na przykład do tekstu Jörga Jahnela (bibliografia). Zobaczmy to na przykładzie: mamy

$$\cos 7\alpha = 64\cos^7\alpha - 112\cos^2\alpha + 56\cos^2\alpha - 7\cos\alpha,$$

co można wyprowadzić z wielokrotnego stosowania formuł wyżej[3]. Zatem jeśli $\alpha = \frac{m}{7} \cdot 360^\circ$, to $\cos 7\alpha = 1$, czyli spełnione jest równanie

$$1 = \cos 360^\circ = 64\cos^7\alpha - 112\cos^2\alpha + 56\cos^2\alpha - 7\cos\alpha.$$

Liczba $\cos\alpha$ jest zatem pierwiastkiem równania $64x^7 - 112x^5 + 56x^4 - 7x - 1 = 0$, a wiec jest liczbą algebraiczną (ale nie stopnia 7 tylko co najwyżej 3, dlaczego?). Biorąc np. kąt $\alpha = 2\pi/7$ możemy zastanawiać się czy możliwa jest konstrukcja cyklem i linijką siedmiokąta foremnego. Wiedząc, że jego

[3] W podręczniku *Geometria analityczna* prof. Guzickiego odpowiedni rachunek jest na stronie 153.

cosinus spełnia równanie wyżej nie mamy jeszcze w pełni rozwiązania tego problemu, ale jesteśmy na dobrej drodze, wyznaczonej trzy stulecia temu przez Galois, Ruffiniego i Abela. Jak się okazuje, kąt α jest niekonstruowalny i można to zrozumieć poprzez badanie rozkładu wielomianu wyznaczonego wyżej. Nie ma tu miejsca, by opowiadać o tych zagadnieniach. Pokazuje się ogólne twierdzenie: liczba algebraiczna jest konstruowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest „iterowaną niewymiernością kwadratową”, to znaczy jest liczbą wymierną, albo jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach będących „iterowanymi niewymiernościami kwadratowymi” niższego stopnia. Szczegóły przystępnie opisuje prof. Guzicki w 13. rozdziale *GA*. Zagadnienia te omawia się na studiach w języku rozszerzeń ciał i grup Galois.

Przyjrzyjmy się na koniec (bardzo szkicowo) ciekawym zastosowaniom trygonometrii do zagadnień konkursowych, oczywiście pozageometrycznym. Klasycznym zagadnieniem jest rozwiązywanie równań i ich układów (a potem też liczenie całek) przez rozmaite podstawienia trygonometryczne. Oto najprostszy przykład: jeśli rozwiązujemy równanie zmiennej x i z warunków zadania wynika, że $|x| \leqslant 1$, to można przyjmować $x = \sin\alpha$, dla pewnego $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lub $x = \cos\beta$, dla pewnego $\beta \in [0, \pi]$. Nawet jeśli nie ma takiego założenia, a wiadomo, że zmienna może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą, zawsze można podstawić tangens lub cotangens. Zacznijmy od przykładu pochodzącego z książek H. Pawłowskiego.

Zadanie 113. *Rozwiąż równanie* $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Rozwiązanie. Mamy oczywiście $|x| \leqslant 1$ i choć zatroszczywszy się o znak liczby pod pierwiastkiem możemy podnieść obydwie strony do kwadratu i rozwiązywać równanie wielomianowe stopnia 6, możemy też dokonać podstawienia trygonometrycznego $x = \cos\alpha$, gdzie $\alpha \in [0, \pi]$. Mamy wówczas:

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Tak się składa, że mamy tożsamości

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha, \quad \text{oraz} \quad 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha,$$

co prowadzi nas do równania $|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$. W zależności od wydajności naszej inżynierii rozwiązywania równań trygonometrycznych dochodzimy szybciej lub wolniej do następujących rozwiązań $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$ oraz $\alpha_2 = \frac{5}{8}\pi, \alpha_3 = \frac{3}{4}\pi$, należących do przedziału $[0, \pi]$. Są to również rozwiązania naszego równania. Oczywiście korzystając z twierdzeń o cosinusie kąta połówkowego (czy dwukrotnego) możemy wyznaczyć dokładne wartości:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\\
x_2 &= \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\\
x_3 &= \cos\frac{5}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

■

Dwa poniższe przykłady pochodzą z książki Titu Adreescu i Zumina Fenga (bibliografia).

Zadanie 114. *Niech* $x_0 = 2003$ *i niech* $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$, *dla* $n \geqslant 1$, *Oblicz* x_{2004},

Rozwiązanie. Nietrudno widzieć (por. poprzedni wykład), że ciąg ten ma okres długości 4, tzn. dla $n \geqslant 1$ mamy $x_{n+4} = x_n$. To rozwiązuje zadanie, ale istnieje też trygonometryczne uzasadnienie, korzystające ze wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Rzeczywiście, biorąc $1 = \operatorname{tg} 45^\circ$ oraz podstawiając $x_n = \operatorname{tg}\alpha_n$, dla pewnych $\alpha_n \in (-90^\circ, 90^\circ)$ mamy:

$$\operatorname{tg}\alpha_{n+1} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}\alpha_n}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg}\alpha_n} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha_n).$$

Teraz okresowość ciągu x_n wynika natychmiast z tego, że tg ma okres równy 180°. Zatem $x_{2004} = 2003$. ■

Zadanie 115. *Wykaż, że wśród pięciu parami różnych liczb rzeczywistych istnieją dwie: nazwijmy je a, b takie, że $|ab+1| > |a-b|$.*

Rozwiązanie. Tym razem skorzystamy w pomysłowy sposób z zasady szufladkowej Dirichleta. Mianowicie traktujemy pięć liczb z zadania jako $\operatorname{tg} x_1, \operatorname{tg} x_2, \operatorname{tg} x_3, \operatorname{tg} x_4, \operatorname{tg} x_5$, gdzie $x_i \in (-90^\circ, 90^\circ)$ i rozbijamy ten przedział na cztery: $(-90^\circ, -45^\circ], (-45^\circ, 0^\circ], (0^\circ, 45^\circ]$ oraz $(45^\circ, 90^\circ]$. Widzimy, że co najmniej dwie z pięciu wskazanych liczb, nazwijmy je x_i oraz x_j muszą należeć do jednego z powyższych czterech przedziałów. A zatem mamy $|x_i - x_j| < \frac{\pi}{4}$ i kładąc $a = \operatorname{tg} x_i$ oraz $b = \operatorname{tg} x_j$ mamy;

$$\left|\frac{a-b}{1+ab}\right| = \left|\frac{\operatorname{tg} x_i - \operatorname{tg} x_j}{1 + \operatorname{tg} x_i \operatorname{tg} x_j}\right| = |\operatorname{tg}(x_i - x_j)| < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

■

Możliwa dalsza lektura – funkcje trygonometryczne

- T. Andreescu, Z. Feng, *108 trigonometry problems from the USA IMO team*, Birkhauser 2005.
- W. Guzicki, *Geometria i trygonometria. Rozszerzony program matematyki w liceum.* Omega 2021.
- W. Guzicki, *Geometria analityczna. Rozszerzony program matematyki w liceum.* Omega 2022.
- J. Jahnel, *When is the (co)sine of a rational angle equal to a rational number?*, `https://arxiv.org/abs/1006.2938`.
- M. Krych, *Funkcja wykładnicza, logarytmy, kosinus i sinus*, materiały dla studentów Chemii, `https://www.mimuw.edu.pl/~krych/chemia/2016-2017/ch13-14_logsin.pdf`
- R. B. Nielsen, *Proofs without words: exercises in visual thinking*, tomy I-III, MAA 2003-2016.
- H. Pawłowski, *Matematyka 1. Zakres rozszerzony.* Operon 2004.
- H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata trygonometria i geometria*, Tutor 2015.
- L. Zhou, L. Markov, *Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values*, Amer. Math. Monthly 117 (2010), 360-362, `https://www.jstor.org/stable/10.4169/000298910x480838`.

Zadania – funkcje trygonometryczne

Zadanie 1. *Oblicz* $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Zadanie 2. *Oblicz* $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$.

Zadanie 3. *Wykaż, że dla dowolnego* $\alpha \neq k\pi$*, gdzie* $k \in \mathbb{Z}$ *zachodzi równość:*

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos(2^n\alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Zadanie 4. *Dla jakich liczb rzeczywistych* m *równanie* $3\sin x + 4\cos x = m$ *ma rozwiązanie?*

Zadanie 5. *Udowodnij, że jeśli* $\cos\alpha + \cos\beta = 1$ *oraz* $\sin\alpha + \sin\beta = a$*, to* $a \leqslant 3$.

Zadanie 6. *Wyznacz wszystkie liczby* $t \in \mathbb{R}$*, że funkcja* $f(x) = |\sin tx + \cos x|$ *przyjmuje wartość* 2.

Zadanie 7. *Wykaż, że jeżeli liczby* A, B *są różne od zera, to poniższa funkcja nie jest okresowa:*

$$f(x) = A\sin x + B\sin(\sqrt{2}x).$$

Zadanie 8. *Liczby* a, b, c *z przedziału* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *spełniają równości*

$$\cos a = a, \quad \sin(\cos b) = b, \quad \cos(\sin c) = c.$$

Rozstrzygnij, która z liczb a, b, c *jest najmniejsza, a która największa.*

Zadanie 9. $(\star)$ *Rozwiąż równanie* $\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x$.

Zadanie 10. $(\star)$ *Dla danej liczby naturalnej* n *wyznacz największą wartość iloczynu* $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n$*, gdzie* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *są takimi liczbami rzeczywistymi, że* $tgx_1 \cdot tgx_2 \cdot \ldots \cdot tgx_n = 1$

Zadanie 11. $(\star)$ *Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zachodzi nierówność*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \cos x_i\right)^2 \leqslant n^2.$$

Zadanie 12. $(\star)$ *Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *zachodzi nierówność:*

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \ldots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + \ldots + a_n)| \geqslant 1.$$

Zadanie 13. $(\star)$ *Wykaż, że jeżeli* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ *i* α, β, γ *są kątami ostrymi, to* $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

Zadanie 14. $(\star)$ *Niech* $t \in \mathbb{R}$ *będzie takie, że* $\cos t = \frac{1}{3}$*. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi:*

$$\cos nt = \frac{a_n}{3^n},$$

gdzie a_n *jest liczbą całkowitą niepodzielną przez* 3*. Wywnioskuj stąd, że jeżeli* $\cos\pi x = \frac{1}{3}$*, to* $x \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 15. $(\star\star)$ *Liczby rzeczywiste* x, y, z *spełniają warunek* $y - x - z = xyz$*. Wykaż, że*

$$\frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1} \leqslant \frac{10}{3}.$$

Zadanie 16. $(\star\star)$ *Wykaż, że jeżęli* $\sin x_1 + \ldots + \sin x_n = 0$*, to*

$$|\sin x_1 + 2\sin x_2 + 3\sin x_3 + \ldots + n\sin x_n| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Dodatek A. Algebra, jej historia i znaczenie w matematyce

Celem poniższego tekstu jest przybliżenie Czytelnikowi najważniejszych faz rozwoju algebry jako części całej matematyki. Naszemu spojrzeniu przyświeca górnolotne być może stwiedzenie, że „matematyka jest jedna". Warto to przekonanie wyrazić zwłaszcza w tekście poświęconym konkursom matematycznym, które potrafią budzić skrajne emocje. Można bronić swojego prawa do zajmowania się w matematyce tym, co nas ciekawi, co pozwala mierzyć się „żywą matematyką" i mówić, że konkursy to równie dobra matematyka, jak i każda inna. Liczniejsza jest istotnie w naszym środowisku grupa osób mówiących, że matematyka choć zaczyna i kończy się na wielkich i ciekawych zadaniach, jest jednak czymś więcej – jest całością, w której poszczególne dziedziny przenikają się, wzajemnie się opisują i zadają sobie pytania.

Wyjść musimy oczywiście od czasów, gdy ani algebra, ani nawet matematyka nie była traktowana jako osobna dyscyplina ludzkiej działalności. W czasach starożytnych z jednej strony szukano praktycznych rozwiązań problemów wywodzących się z życia, nie poszukując koniecznie abstrakcyjnego wyrażenia wypracowanych metod, z drugiej strony – liczby i figury włączono do rozważań filizoficznych, prowokując pytania, które być może w innym kontekście nie zostałyby zadane. Prześledzimy teraz szereg wątków związanych z poszczególnymi ważnymi wątkami podejmowanymi w trakcie wykładu.

Równania rozwiązywano od czasów starożytnej Mezopotamii, rozwiązywano je również w Egipcie i oczywiście w starożytnej Grecji. Za ojca algebry wielu uważa starożytnego matematyka Diofantosa żyjącego (być może) w III wieku, którego fragmenty prac zachowały się w języku greckim oraz w arabskich tłumaczeniach. Jego znane dzieło *Arytmetyka* jest w zasadzie zbiorem 130 zadań algebraicznych, polegających na poszukiwaniu rozwiązań pewnych równań w liczbach naturalnych. Są wśród nich równania liniowe oznaczone (o jednym rozwiązaniu) i nieoznaczone, które nazywa się często równaniami diofantycznymi. Pojawiają się również układy równań, w tym kwadratowych, a także pytania o możliwość zapisywania pewnych liniowych wyrażeń w postaci sum kwadratów oraz sześcianów. Diofantos rozwiązuje równania prowadzące do wymiernych rozwiązań, co jest jak na ówczesne czasy podejściem niespotykanym, choć same ułamki były oczywiście znane, zwłaszcza w Egipcie. Za „absurdalne" uważa natomiast równania typu

$$4 = 4x + 20.$$

Grecy również nie uznawali istnienia liczb ujemnych. Oznacza to, że równania kwadratowe typu $x^2 = 4$ miały w *Arytmetyce* jedno tylko rozwiązanie, a niektóre nie miały go wcale.

Nie ma w *Arytmetyce* żadnych twierdzeń, aksjomatów czy innych charakterystycznych cech dedukcji. O jej gigantycznym znaczeniu świadczy raczej rozpiętość problemów i rozmaitych typów zadań, które podejmuje. Jeszcze dla szesnastowiecznych uczonych zadania te stanowić będą cenną inspirację do formułowania ogólnych problemów choćby związanych z rozkładami liczb całkowitych na sumy kwadratów, interesujące Fibonacciego, Fermata, Lagrange'a czy Gaussa. I nie ma tu aż tak wielkiego znaczenia to, że Diofantos nie myślał w kategoriach rezultatów klasyfikujących ogólne typy równań. Choć pytania były konkretne, a rozwiązania być może odgadywane – to stojące za nimi problemy były naprawdę głębokie.

Jak odnotowuje prof. Więsław w *Drogach i manowcach rozwoju algebry* (patrz bibliografia), metoda Diofantosa, choć unikała greckiego podejścia traktującego wszystkie liczby jako długości odcinków, miała też wielkie znacznie dla geometrii. Diofantos prowadzi sieczną przez dwa wymierne punkty krzywej, albo styczną w punkcie wymiernym, otrzymując (na ogół) punkt wymierny. Metoda ta, stosowane później przez Fermata w XVII wieku, została ostatecznie usankcjonowana przez Poincarego w 1901 roku. Oto jak olbrzymi był *impact factor* zbioru 130 zagadnień spisanych na kilkunastu wąskich paskach papirusu!

Wprowadzona przez Diofantosa symbolika pozwalała na jaśniejsze niż wcześniej ukazanie rozwiązań poszczególnych problemów. Jak inni autorzy w starożytności, Diofantos używał rozszerzonego alfabetu greckiego do zapisu liczb. Wprowadził również szereg symboli służących między innymi do zapisywania równości, odejmowania, podnoszenia do potęgi itd. Oczywiście uzyskiwane w ten sposób równania i notacja dalekie były od dzisiejszego zapisu, który kształtował się przez wiele stuleci[4], zwłaszcza zaś w wieku XVI. W podejściu Diofantosa brakuje też owych operacji na równaniach: redukcji i przenoszenia. Jest natomiast podstawienie. To one manipulacje jednak, nie zaś sama symbolika, są bliżej esencji algebry, także z dzisiejszego punktu widzenia. Wspomnijmy też, że to na marginesie wydania *Arytmetyki* z 1621 roku Fermat sfomułował „Wielkie Twierdzenie Fermata”, którego wszakże raczej nie umiał dowieść.

Podejście Diofantosa, będące swego rodzaju klarowniejszą syntezą metod babilońskich i egipskich nazywamy często przeddedukcyjnym lub empirycznym. Było ono zasadniczo odmienne od podejścia dedukcyjnego wypracowanego już kilka stuleci wcześniej, znajdującego swój pomnik w *Elementach* Euklidesa (ok. -370 r.). To nasłynniejsze dzieło matematyczne starożytności było przez ponad 2000 lat „podstawą” nie tylko wykładu geometrii, ale i nauczania matematyki. Tekst ten nie miał charakteru dialogicznego – przedstawiał „prawdy niepodważalne” i „metodę doskonałą”, wychodząc od pojęć i faktów pierwotnych do twierdzeń uzyskiwanych na podstawie wnioskowań. *Elementy* doczekały się ponad 1000 wydań[5]. Pierwsze księgi *Elementów* wykładane były na uniwersytetach i w szkołach, w zasadzie do samych początków XX wieku. Oczywiście *Elementy*, choć pisane językiem geometrii, zawierały też (księgi 5-12), patrząc z naszego punktu widzenia, szereg rezultatów teorioliczbowych, algebraicznych i analitycznych.

Widzimy na powyższym przykładzie, że dwa sposoby uprawiania matematyki – empiryczny i dedukcyjny, przenikały się przez dzieje. Na początku zawsze stały konkretne pytania, obserwacje, często setki obserwacji spisywanych przez dziesięciolecia i stulecia. Później dopiero przychodził czas syntezy, zmiany języka, a także budowa teorii, która obejmowałaby poczynione obserwacje. Tak jest poniekąd i dziś.
Termin *algebra* pochodzi z tytułu arabskiego traktatu z początków IX wieku autorstwa perskiego uczonego Muhammada ibn Musa al-Chwarizmiego, bibliotekarza Bagdadzkiego *Domu Nauki*. Tytuł ten – *Zasady redukcji i przenoszenia* – ukrywa w sobie słowo *al-ǧabr* oznaczające w języku arabskim *uzupełnianie*, *przenoszenie*. ale też *bilansowanie* (co miało praktyczne znaczenie). Dosłownie chodzi o operację przenoszenia wielkości z jednej strony na drugą, np. o zamianę równania $x^2 = 40x - 4x^2$ poprzez „al-ǧabr” w równanie $5x^2 = 40x$. Przez redukcję (arab. *al-Muqabala*) autor rozumiał natomiast odjęcie tej samej dodatniej wielkości od obydwu stron równania, np. $x^2+5 = 40x+4x^2$ zamieniamy na $5 = 40x+3x^2$.

Dla wielu autorów to właśnie dzieło al-Chwarizmiego jest początkiem formalnej algebry, ponieważ nie rozwiązuje się w nim jedynie konkretnych równań, ale podaje się ogólne metody dla rozwiązywania równań pewnych typów (czyli prowadzi się klasyfikację równań ze względu na metody rozwiązania). Praca ta zawiera kompletne rozwiązania i dyskusję rozwiązań równań stopnia pierwszego i drugiego. Kluczowe jest jednak pewne zastrzeżenie. W matematyce arabskiej nie istniały liczby ujemne. Ważną rolę zaczynało odgrywać zero (nie tylko z uwagi na zapis dziesiętny, o czym dalej). Konstrukcja rozwiązań równań kwadratowych (rozwiązań dodatnich) prowadzona była w sposób geometryczny przypominając (upraszczając nieco sprawę), geometryczne dowody wzorów skróconego mnożenia. W ten sposób wyróżniono następujące trzy rodziny równań, których rozwiązania opisano, dla $a, b > 0$:

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax, \quad x^2 = ax + b.$$

Al-Chwarizmi znany jest również z bardzo udanej adaptacji wypracowanego w Indiach systemu pozycyjnego o podstawie 10. W dziele *O liczbach indyjskich*, przetłumaczonym na łacinę jako *Algorithmi de numero Indorum* (pierwsze słowo jest zniekształceniem nazwiska autora), omówione są sposoby wykonywania działań pisemnych w systemie dziesiątkowym. Te metody dały początek słowu *algorytm*. Metody te przeniesione zostaną następnie przez Fibonacciego do Europy, gdzie dadzą początek rewolucji w świecie handlu i rachunkowości. Istotną rolę grać tu będzie spór (natury filozoficznej) o akceptację istnienia liczby zero, której koncepcję Al-Chwarizmi poznał tłumacząc dzieło indyjskiego uczonego Brahmaputry, i której użycie tak bardzo zachwyciło Fibonacciego. Jeśli zresztą mowa o zerze, warto podkreślić, że i w starożytnej Grecji było to pojęcie – jeśli w ogóle funkcjonujące – to raczej w świecie handlu niż filozofii.

[4]Z zadaniami Diofantosa oraz stosowaną notacją można zapoznać się na przykład poprzez artykuł `https://staff.um.edu.mt/jmus1/Diophantus.pdf`. Polecam też artykuł *The Universal Symbol - Equals Sign* opisujący w skrócie historię znaku równości `https://the-axiom.uk/the-universal-symbol-equals-sign/`

[5]Szczególnie pięknego wydania cyfrowego *Elementów* realizującego ideę „poglądowości” dokonał grafik Nicholas Rougeux, przenosząc na stronę `https://www.c82.net/euclid/` słynne wydanie Olivera Byrne z 1847 roku. Pełne tłumaczenie interlinearne 13 ksiąg *Elementów* na język angielski: `https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf`

Oczywiście mówiąc o Al-Chwarizmim należałoby wspomnieć o wielu innych osiągnięciach Złotego Wieku nauki arabskiej, przede wszystkim o wybitnej astronomii i związanych z nią osiągnięciach w trygonometrii i geometrii sferycznej, ale poprzestańmy na motywacji algebraicznej. Potrzeby rozwiązywania równań wielomianowych wyższych stopni, dziś zupełnie niezrozumiałe dla uczniów, brały się choćby z potrzeby obliczenia $\sin \frac{\alpha}{3}$ znając $\sin \alpha$. Same równania stopnia 3 próbowano rozwiązywać od tysiącleci...

Wróćmy do średniowiecza. Nie ma tu miejsca na dogłębne omówienia znaczenia matematyki arabskiej w kontekście rozwoju algebry poza niezbędnym stwierdzeniem, że badania arabskie stanowiły syntezę zarówno osiągnięć greckich, jak i chińskich czy hinduskich. To zestawienie rozmaitych perspektyw doprowadziło do dużego rozwoju, choć algebraiczna rewolucja miała nadejść dopiero kilka stuleci później. Około XII wieku osiągnięcia arabskie trafiają na kontynent europejski poprzez kontakty handlowe.

Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim, żył na przełomie XII i XIII wieku. Jako syn kupca włoskiego, dzięki licznym podróżom po basenie Morza Śródziemnego posiadł zarówno wiedzę o matematyce arabskiej, jak i hinduskiej, między innymi zapoznając się z notacją dziesiętną wykorzystującą cyfry $0, \ldots, 9$. Miał też kontakt ze starożytnymi dziełami Greków. Jego dzieło *Liber Abaci* (Księga rachunków) z 1202 roku pokazało użyteczność owych metod na wielu przykładach rachunkowych, szczególnie związanych z przeliczaniem miar, wag, obliczaniem zysków, odsetek, wymianą pieniędzy itd.

Dzieła Fibonacciego omawiały też rozmaite problemy starożytne (pierwszy dowód prostego faktu o rozkładzie liczby wymiernej na ułamki proste o różnych mianownikach) oraz stawiały nowe (np. problem congruum). W 1225 roku napisał rozprawę *Liber Quadratorum* (Księga kwadratów), która miała być kontynuacją *Arytmetyki* Diofantosa. Można powiedzieć, że u Fibonacciego pojawiły się typy rozumowań i potrzeba prowadzenia dowodów, które nie występowały w algebrze wcześniej. Pojawiły się też pytania, które choćby Fermata doprowadziły do dowodów przez tzw. nieskończone schodzenie. Nie były to przełomowe dla samej matematyki osiągnięcia, ale jednak była twórcza (także pod względem metod) synteza, w wielu miejscach nowatorska.

W późnym średniowieczu jedną z popularnych praktyk matematyków była publiczna dyskusja swojej pracy w formie wyzwań czy też pojedynków. Gdy jeden matematyk akceptował wyzwanie drugiego, każdy musiał rozwiązać zestaw problemów zaproponowanych przez drugiego. Zwycięstwo oznaczało wielki splendor, ale porażka – nawet stratę funduszy na badania lub utratę pozycji na uniwersytecie.

Być może pojedynki te zapoczątkował cesarz Fryderyk II (syn Barbarossy), który odwiedził Pizę w 1225 roku. Znając reputację Fibobacciego cesarz uznał, że warto poddać ją próbie przez... zorganizowanie turnieju. Drużynę cesarza stanowili Jan z Palermo i Mistrz Teodor, zaś drużynę Leonardo stanowił on sam. Pytanie mu postawione brzmiało: znaleźć kwadrat liczby wymiernej, który pozostaje kwadratem liczby wymiernej zarówno gdy dodamy do niego 5, jak i gdy odejmiemy od niego 5. Innymi (naszymi) słowy oczekiwano przykładu, że 5 stanowi congruum, czyli różnicę w ciągu arytmetycznym trzech kwadratów liczb wymiernych. Najmniejszy przykład rozwiązania problemu turniejowego to $1681/144$ – co Leonardo wykrył (choć przed nim inni). W swoim drugim ważnym dziele *Liber quadratorum* Fibonacci atakował ogólny problem congruum próbując zastąpić liczbę 5 innymi, w tym kwadratami liczb całkowitych (np. 1), dla których nie umiał go rozwiązać. Zrobił to dopiero Fermat, co wymagało prostego (ale jednak jakościowo bardzo nowatorskiego) pomysłu zakładającego, że z istnienia „najmniejszej realizacji kwadratowego congruum" wywieść można istnienie jeszcze mniejszej realizacji (i dostać sprzeczność). Jest to technika nieskończonego schodzenia.

Od czasów starożytnych przez całe średniowiecze powszechnie używanym narzędziem rachunkowym był abak (łac. *abacus*). Miał wiele postaci, ale zwykle była to deska z zaznaczonymi liniami, gdzie rachowało się przesuwając na pasach odpowiednie kamyczki. W Polsce abaki używane były jeszcze w XX wieku pod nazwą liczydła. W XIV wieku pojawił się, a w wiekach XV-XVI wielkiego znaczenia nabrał zawód rachmistrza, który na zlecenie władz lokalnych, banków, kupców itd. prowadził księgowość i wykonywał rozmaite rachunki: wymianę walut, naliczanie procentu prostego i składanego, obliczanie objętości czy ciężaru w oparciu o pomiary itd. Oczywiście abak był podstawowym narzędziem pracy rachmistrza. Zawód był tak popłatny, że rachmistrzowie prowadzili własne szkoły i pisywali książeczki z wyjaśnieniem swoich metod. Zaletą abaku było między innymi to, że mogli na nim liczyć ludzie nie umiejący pisać czy czytać, nie był też potrzebny do tego drogi wówczas papier. Takich rachmistrzów nazywano abacystami. Oczywiście byli i tacy, którzy używali piór i tych nazywano algorystami. Ci zwykle wypełniali księgi.

To właśnie z grona algorystów wywodzą się pierwsze oryginalne nowożytne metody algebraiczne. Dla łatwiejszego wykonywania działań wprowadzali symbole dodawania, odejmowania, pierwiastkowania, a to z kolei zachęcało do stawiania dalszych pytań. Pojawiło się rozważanie zagadnień z niewiadomą oraz wypracowywanie umiejętności jej obliczania. To wśród tego grona wyróżniono ludzi nazywanych algebraikami. To właśnie oni zapoczątkowali przełom w algebrze, który umiejscawiamy w XVI wieku. Największą sławę osiągnęli znani i dziś Włosi parający się rozwiązywaniem równań stopnia trzeciego i czwartego: Nicolo Tartaglia i Geronimo Cardano. Rosło rozumienie liczb i biegłość w stosowaniu metod algebry. Zaczęto używać zera i liczb ujemnych, a w XVI wieku, choć z oporami, stosować zaczęto liczby zespolone. Do wybitnych, szesnastowiecznych algebraików należał też François Viète, prawnik z zawodu. Jak pisze prof. Więsław, cały wiek szesnasty jest okresem intensywnego rozwoju symboliki algebraicznej tak, że za czasów Kartezjusza proces ten jest niemal zakończony. Newton używa w wieku XVII prawie tej samej symboliki, jakiej używamy współcześnie, z wyjątkiem nawiasu, który zapisuje jako $\overline{a+b}$. W ten sposób powstaje między innymi symbol $\sqrt{a+b}$ oznaczający pierwiastek w nawiasie, tj. z liczby $\overline{a+b}$.

Wróćmy do Europy przełomu epok, czyli do wieku XV. Powiemy teraz o pewnych podstawowych problemach algebry nowożytnej. Jak już wspomnieliśmy, dzieło "Liber abaci" z 1202 roku stanowiło nie tylko zebranie i podsumowanie znanej ówcześnie wiedzy matematycznej, także arabskiej, ale też w pewnych miejscach jej rozwinięcie. Dzieło to stawiało ważne dla przyszłych pokoleń pytania. Dopóki jednak nie rozwiną się uniwersytety oraz nie zostanie na szeroką skalę wykorzystany wynalazek druku, nauki ścisłe będą w stagnacji, a rozwijać się będzie w zasadzie głównie „matematyka stosowana" w handlu i bankowości. W 1494 roku franciszkanin Luca Pacioli wydaje „Summa de arithmetica", w zasadzie pierwsze poważne drukowane dzieło matematyczne (uważane, nomen omen, za kamień milowy w historii rachunkowości) w którym umieści tezę o nierozwiązywalności równania stopnia trzeciego. Rozpocznie tym samym szeroką dyskusję i otworzy nowy rozdział w historii równań algebraicznych. Czołową rolę w tej dyskusji ogrywać będą przez cały XV i XVI wiek matematycy włoscy. Jak przebiegała[6] ta dyskusja?

Pierwszą osobą, która znalazła rozwiązanie równania $x^3 + ax = b$ był boloński profesor Scipione del Ferro (1465-1526). Jego ojciec Floriano pracował w przemyśle drukarskim i już w wieku młodzienczył Scipione miał dostęp do prac klasycznych prac, w tym oczywiście do „Liber...". Czytelnika zaskoczy być może fakt, że nie zachowały się żadne prace del Ferro. Wydaje się, że obawiał się wyzwania i ewentualnej utraty pozycji na uniwersytecie w Bolonii. Trzymał więc swoją pracę w ukryciu, dzieląc się jedynie z najbliszszymi uczniami. Zachował przy tym notatnik, w którym zapisał wszystkie największe osiągnięcia. Po śmierci, jego zięć Annibale della Nove – sam matematyk i były uczeń del Ferro, odziedziczył notatki stryja, wraz z pozycją na uniwersytecie. Same notatki pozostały jednak w ukryciu aż do roku 1543, gdy della Nove odwiedzili dwaj bardzo znani matematycy: Gerolamo Cardano i Lodovico Ferrari, poszukujący metody del Ferro. Skąd o niej wiedzieli?

Kilka lat wcześniej w Wenecji głośno było o matematyku samouku Nicolo Targaglii, chętnie uczestniczącym w pojedynkach matematycznych. Do jenego z tych pojedynków stanął z Tartaglią niejako Fior – jeden z uczniów del Ferro, niezbyt pojętny, jak podają relacje. Każda ze stron podała drugiej 30 równań do rozwiązania. Wszystkie dotyczyły równania wielomianowego stopnia 3. Co o nich wówczas wiedziano?

Matematycy wiedzieli wówczas, że rozwiązanie ogólne równania trzeciego stopnia może być zredukowane do rozwiązania jednego z dwoch typów równań: $x^3 + mx = n$ oraz $x^3 = mx + n$, gdzie $m, n > 0$. Dlaczego dwa typy? Nie uznawano wówczas liczb ujemnych i przekształceń równoważnych z ich użyciem. Fior wiedział jak rozwiązywać tylko pierwszy z wymienionych wyżej typów. Zadania Fiora dotyczyły zatem jedynie tej klasy równań, podczas gdy zadania Tartaglii były bardzo różnorodne. W trakcie pojedynku, 13 lutego nad ranem, Tartaglia odkrył metodę rozwiązywania równań pierwszego typu i mecz wygrał, co dało mu wielką sławę i zainteresowanie słynnego lombardzkiego matematyka Cardano.

Cardano poprosił Tartaglię w 1539 roku o wyjawienie metody rozwiązywania tych równań i obiecał dochowania tajemnicy i nieujawniania metody. W 1540 roku asystent Cardano Lodovico Ferrari opracował metodę redukcji równań czwartego stopnia do równań sześciennych, co motywowało dodatkowo do złamania obietnicy. Jak to zrobić? Rozwiązaniem okazała się wizyta u zięcia del Ferro – wspomnianego już della Nove w 1543 roku. Cardano uznał, że to właśnie del Ferro odkrył jako pierwszy metodę rozwiązania równań stopnia 3 i poczuł się zwolniony z tajemnicy danej Cardano.

[6] Jej szersze omówienie znajdzie Czytelnik w tekście prof. Pawła Gładkiego: `http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/faq/node129.html`.

W 1545 roku Cardano opublikował *Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus* (Księga Pierwsza o Wielkiej Sztuce, lub o Zasadach Algebry, stanowiace obok słynnego "De revolutionibus" Kopernika i "De human corporis fabrica" Vasaliusa, jedno z trzech najważniejszych traktatów naukowych wczesnego renesansu. Pierwsze wydania tych trzech dzieł miały miejsce w latach 1543-1545.

Wielkość dzieła Cardano oparta była na kilku czynnikach. Kojarzymy przede wszystkim pierwsze bezpośrednie wprowadzenie do języka matematyki pierwiastków z liczb ujemnych, zwanych później liczbami zespolonymi. Istotą rewolucji nie były wówczas jednak same liczby zespolone (których występowanie bagatelizował sam autor, nie potrafiąc im przypisać żadnego fizycznego znaczenia), ponieważ liczby te wcale nie posłużyły Cardano do rozwiązywania równań stopnia 3. Z uwagi na to, że ówcześnie nie stosowano w przekształceniach algebraicznych liczb ujemnych, Cardano zmuszony był rozpatrywać aż trynaści rozmaitych klas równań stopnia 3. Rozwiązanie żadnej z tych klas nie wymagało użycia liczb zespolonych. Liczby zespolone wspomniane są przy rozwiązywaniu klasycznego problemu poszukiwania liczb, których suma równa jest 10, a iloczyn równy jest 40. Cardano wprowadził również koncepcję pierwiastka wielokrotnego wielomianu, między innymi rozpatrując liczbę -2 jako dwuktorny pierwiastek równania $x^3 = 12x + 16$.

W wieku XVII i XVIII wzrasta ogromnie znaczenie matematyki, a zwłaszcza analizy i algebry. Nie jest to już miejsce na dokładny opis rozważanych problemów. Z pewnością do centralnych zagadnień algebraicznych należą wciąż problemy równań, w tym problemu rozwiązywalności równań wielomianowych wyższych stopni. W pracach Eulera i Lagrange'a pojawiają się, choć implicite, grupy (zwłaszcza grupy permutacji zbioru skończonego). Badane są w tym kontekście binarne formy kwadratowe (postaci $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ o współczynnikach całkowitych). Wyniki wielkich matematyków XIX wieku – Ruffiniego, Gaussa, Abela, Galois, Bettiego i Jordana oraz odpowiedź na problem rozwiązywalności równań oraz starożytne problemy konstruowalności wielokątów foremnych, podwojenia sześcianu czy trysekcji kąta stanowią istotną motywację dla rozwoju teorii grup. Innym ważnym kierunkiem jest teoria liczb, zwłaszcza problem Fermata, który motywuje szereg konstrukcji autorstwa Eulera, Cauchy'ego, Gaussa, Dirichleta, Kummera i innych.

Od połowy XIX wieku algebra stopniowo zaczęła stawać się czymś więcej niż teorią równań diofantycznych lub wielomianowych, choć można powiedzieć, że wszystkie działy algebry wywodzą się w jakiś sposób z teorii równań. Teoria rozwiązywania równań wielomianowych dała początek rozwojowi teorii grup i ciał. Prace nad zagadnieniami teorioliczbowymi przyczyniły się do położenia podwalin pod badanie pierścieni przemiennych i ideałów. Badania stożkowych i kwadryk w języku geometrii analitycznej ukazały geometryczne aspekty teorii równań, prowadzące do geometrii algebracznej, algebry liniowej, teorii krzywych aż do uprawiania geometrii „nad" dowolnym pierścieniem. Wraz z pojęciem cyklu dla wielościanów wprowadzonym przez Poincare na przełomie XIX i XX stulecia, rozwijać się zaczęła teoria grup homologii, topologia algebraiczna, a w dalszej perspektywie – algebra homologiczna i teoria kategorii. Czytelnika zainteresowanego rozwinięciem ważnego tematu współczesnej roli algebry w matematyce, odsyłam przede wszystkim do dwóch artykułów prof. Białynickiego-Biruli: *O algebrze* oraz *Bourbaki a sprawa polska.*

Dalsza możliwa lektura

- S. Balcerzyk, A. Białynicki-Birula, *O algebrze*, Wiadomości Matematyczne 12 (1971) `https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/wiadomosci-matematyczne/article/download/2030/1905`
- A. Białynicki-Birula, *Bourbaki a sprawa polska*, MSN 2003, `https://smp.uph.edu.pl/msn/32/bb.pdf`.
- *Earliest Uses of Various Mathematical Symbols*, MacTutor History of Mathematics Archive, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathsym/`.
- M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 2006.
- M. Kordos, *Stabilnie czy dynamicznie?*, Delta 12/2016, `https://www.deltami.edu.pl/temat/roznosci/historia_i_filozofia/2016/11/27/2016-12-delta-kordos.pdf`.
- L. Stallings, *A Brief History of Algebraic Notation*, School Scienc and Mathematics 100 (2000), 230–235.
- W. Więsław, *Drogi i manowce początków algebry*, Szkoła Matematyki Poglądowej, `https://smp.uph.edu.pl/msn/15/16-26.pdf`.

Dodatek B. Kalendarium – matematycy starożytni

Źródłem poniższych danych jest serwis MacTutor History of Mathematics `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`, pewne komentarze z podręczników M. Kordosa i J. Stilwella, słynna książka *A Short Account of the History of Mathematics* W.W.R. Balla (1888), a także encyklopedie internetowe: Wikipedia oraz (bardzo dobry) serwis `https://www.encyclopedia.com/`.

Starożytna Grecja

Podane daty należy traktować orientacyjnie. Pomijam większość osiągnięć geometrycznych.

- **Tales** (-624, -547). Postać na granicy mitu (jeśli nawet napisał jakieś dzieła, były one zaginione już w czasach Archimedesa), wymieniana jednak przez Plutarcha jako jeden z Siedmiu Mędrców (przed Sokratesem). Uznawany za „pierwszego matematyka” stosującego rozumowania dedukcyjne (choć raczej nie były to dowody formalne). Przypisuje się mu przeniesienie egipskiej matematyki do Grecji, zmierzenie wysokości piramid, definicję liczby oraz pięć twierdzeń elementarnej geometrii:
  - okrąg jest dzielony na pół przez każdą średnicę,
  - kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe,
  - kąty pomiędzy przecinającymi się prostymi są równe,
  - cecha kbk przytawania i podobieństwa,
  - kąt oparty o średnicę okręgu jest prosty.
- **Pitagoras** (-570, -490). Kolejna postać na granicy mitu, która nie pozostawiła dzieł pisanych. Utożsamiany czasem z całą szkołą filozoficzną, która sformułowała hasło: wszystko jest liczbą (można je też rozumieć jako – rzeczywistość jest w swojej naturze matematyczna). Przypisuje się mu następujące wyniki (choć prawie na pewno były to raczej wyniki członków jego szkoły):
  - określenie własności liczb parzystych, nieparzystych, trójkątnych, doskonałych itd., w tym fakty o sumie pierwszych n liczb naturalnych oraz pierwszych n liczb nieparzystych,
  - badanie nad proporcjami w geometrii, w tym złotym podziałem (w pentagramie), figurami podobnymi oraz dowód tw. Talesa,
  - odkrycie niewspółmierności przekątnej kwadratu z jego bokiem,
  - dowód, że suma kątów trójkąta równa jest dwóm kątom prostym oraz uogólnienie na inne wielokąty wypukłe,
  - konstrukcje figur o danym polu (algebra geometryczna), w tym rozwiązywanie równań postaci $a(a-x) = x^2$ metodą geometryczną,
  - konstrukcje wielościanów foremnych (raczej tylko pierwszych trzech),
  - pierwszy dowód twierdzenia Pitagorasa (znanego przez inne cywilizacje od stuleci).
- **Hipokrates z Chios** (-470, -410). Znany głównie ze słynnych „księżyców”, związanych z dociekaniami nad kwadraturą koła. Został usunięty ze szkoły pitagorejczyków za nauczanie za opłatą. Sprowadził problem podwojenia sześcianu do znalezienia takich dwóch liczb x, y, że dla dwóch danych, dowolnych liczb a i b, zachodzi $a : x = x : y = y : b$, co wykorzystał później Archytas. Jego *Elementy* stanowiły podstawę wykładu Euklidesa, choć nie zachowały się do dziś. Wprowadził używaną później przez Greków konwencję oznaczania punktów i odcinków za pomocą liter. U Hipokratesa znajdziemy też wyraźnie zaznaczoną metodę redukcji jednych twierdzeń do innych.

- **Platon** (-428, -347). Twórca Akademii Ateńskiej, najdłużej działającej instytucji naukowej w dziejach (aż do VI wieku n.e.). Choć nie miał wielkiego wkładu w samą matematykę (mimo nazwy takiej jak wielościany platońskie), był nauczycielem Eudoksosa, Arystotelesa, Teatejosa (i być może Archytasa, choć są tu różne szkoły). Przypisujemy mu przy tym:
  - ograniczenie środków konstrukcyjnych w geometrii do cyrkla i linijki,
  - wprowadzenie dowodzenia apagogicznego (nie wprost), czyli przez uzyskiwanie absurdalnych wniosków z zaprzeczenia dowodzonej tezy.
- **Archytas** (-428, -350). Pitagorejczyk, blisko związany z Platonem, jeden z pierwszych, którego tekst *O harmonii* przetrwał we fragmentach. Jeden z twórców teorii harmonii i skal muzycznych, badający trzy podstawowe średnie: arytmetyczną postaci $a - b = b - c$, geometryczną postaci $a : b = b : c$ oraz harmoniczną postaci $(a - b) : (b - c) = a : c$ (ta trzecia zawdzięcza mu nazwę).
  - Wykazał, że nie istnieje całkowitoliczbowa średnia geometryczna liczb pozostających w stosunku $(n + 1) : n$, (proporcja ważna w muzyce), czyli fakt o niewymierności $\sqrt{n(n + 1)}$.
  - Przypisuje się mu pierwsze geometryczne rozwiązanie problemu podwojenia sześcianu (nie za pomocą cyrkla i linijki), później rozwinięte przez Menaechmusa i jego teorię stożkowych.
  - Uważany jest za twórcę mechaniki matematycznej, która wprowadziła ruch do rozważań geometrycznych (przy problemie podwojenia sześcianu poprzez tzw. krzywą Archytasa).
  - Znany z eksperymentu myślowego mającego dowodzić nieskończoność wszechświata.
- **Eudoksos** (-408, -355). Najwybitniejszy matematyk Akademii Platońskiej, po którym nie zachowały się dzieła, ale jego teorie zawiera ksiega V *Elementów* (wydana niedawno w Polsce[7]). Jego teorie proporcji i wyczerpywania uznawane są za fundament teorii miary i liczb rzeczywistych (Archimedes oraz czy Newton rozwinęli teorię wyczerpywania, zaś Dedekind rozwinął teorię proporcji do teorii przekrojów).
  - Twórca **teorii proporcji**, wyłożonej u Euklidesa, a później rozwijanej przez Archimedesa czy Dedekinda (definicja liczb rzeczywistych przez przekroje), w której (za Bourbakim) wielkości tego samego rodzaju są scharakteryzowane przez to, że mogą być porównywane, dla dwóch wielkości tego samego rozmiaru istnieje wielkość tegoż rozmiaru równa ich sumie oraz zachodzi aksjomat przypisywany Archimedesowi (który go skutecznie używał), czyli każda wielkość dodana do siebie dostatecznie wiele razy przekroczy dowolną wielność (wtedy rozważano tylko wielkności dodatnie)
  - Twórca **teorii wyczerpywania**, którą hasłowo ujmuje się czasem jako całkę Eudoksosa[8], przypisuje się mu także dowód tego, że pola kół (objętości kul) mają się do siebie tak, jak kwadraty ich promieni (sześciany), oraz wyznaczenie objętości ostrosłupa i stożka.
- **Teajtet (Teajtetos)** (-417, -369). Członek Akademii Ateńskiej, znany z dialogów zapisanych przez Platona (także pod nazwą *Teajtet*). Odkrywca dwunastościanu foremnego. Uczony zajmujący się teorią współmierności, w języku której formułuje algorytm Euklidesa. Długości odcinków porównywał poprzez ten algorytm za pomocą ciągów proporcji (potencjalnie nieskończonych), uznawane za alternatywne podejście do liczb rzeczywistych, ujmowane później w języku ułamków łańcuchowych.
- **Arystoteles** (-384, -322). Obok Sokratesa i Platona, jeden z trzech nasłynniejszych filozofów starożytnej Grecji. Twórca odmiennego od platonizmu systemu filozoficznego, który legł u podstaw głównej chrześcjańskiej doktryny filozoficznej (tomizm). Arystoteles założył własną szkołę filizoficzną w Atenach, zwaną Liceum. Szkoła ta, wspierana później przez Aleksandra Macedońskiego, wyparła wkrótce znaczeniem Akademię. Nie uznawał matematyki za samodzielną teorię, ale raczej za narzędzie do opisu różnych zjawisk naturalnych (np. tęczy).
  - Zapoczątkował logikę formalną, zwłaszcza stosowaną do dziś tzw. teorię sylogizmów.
  - Twórca terminów **nieskończoność potencjalna** i **aktualna** (której stosowania zabraniał). Wielu jej aspektów nie rozumiał, czego przykładem jest obalone przez Galileusza twiedzenie, że Arystoteles uważał, że w swobodnym spadku prędkość jest proporcjonalna do drogi.
  - Uważa się, że Arystoteles jako pierwszy sformułował intuicje wektorowe (w odniesieniu do sił), w tym tzw. zasadę równoległoboku dodawania wektorów, obecną póniej w *Mechanice* Herona (I wiek) oraz w *Principiach* Newtona (1687).

[7] `https://ccpress.pl/euklides-elementy-teoria-proporcji-i-podobienstwa`
[8] `https://www.mimuw.edu.pl/sites/default/files/wyczerpywanie.pdf`

- **Euklides** (-325, -265), żyjący w Aleksandrii, związany z wielką biblioteką, być może nawet pierwszy jej kierownik. Tzw. ojciec geometrii, postać, której autentyczność jest dyskutowana. Twórca dzieła *Elementy* – najważniejszego podręcznika, a może i najważniejszego dzieła naukowego w dziejach (na pewno ma najwięcej wydań – ponad 1000). Dzieło Euklidesa uważa się za kompilację wiedzy antycznej i triumf metody dedukcyjnej, ustalonej przez Akademię Ateńską. Podejrzewa się, że może być efektem prac całego zespołu uczonych. *Elementy* złożone są z trzynastu ksiąg, które krótko omawiamy. Treści ksiąg I i II znane były Pitagorejczykom. Księga III zawiera tematy poruszane przez Hipokratesa. Księga V to teoria Eudoksosa, zaś księgi IV, VI, XI i XII prawdpodobnie są autorstwa pigagorejskich lub ateńskich matematyków. Ksiąga X może być oryginalnym podejściem do teorii Teatejosa. Warsztat redakcyjny całości pracy nadaje jej jednak ponadczasowy i monumentalny charakter. Materiał wcześniejszych autorów został odpowiednio uporządkowany, pominięto oczywiste dedukcje, a w niektórych miejscach pojawiły się nowe dowody. Na podstawie *Elementów*, zwłaszcza pierwszych ksiąg, uczono geometrii aż do początków XX wieku (choć nie bezpośrednio).

  Szczególnie pięknego wydania cyfrowego *Elementów* realizującego ideę „poglądowości" dokonał grafik Nicholas Rougeux, przenosząc na stronę `https://www.c82.net/euclid/` słynne wydanie autorstwa Olivera Byrne z 1847 roku. Pełne tłumaczenie interlinearne 13 ksiąg *Elementów* na język angielski: `https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf`.

  – Księga I – Podstawy geometrii płaszczyny. Zawiera definicje, słynne pięć postulatów oraz pięć aksjomatów. Pierwsza połowa to podstawowe fakty dotyczące przystawania trójkątów, a dalej trójkatów równoramiennych i prostopadłości. Kilkanaście twierdzeń dotyczy równoległości, kolejne — wielokątów o równych polach. twierdzenia Ostatnie dwa twierdzenia to twierdzenie Pitagorasa, oraz twierdzenie odwrotne. Księga zawiera też podstawowe konstrukcje (w duchu Platona) np. symetralna odcinka czy dwusieczna kąta.
  – Księga II – „Algebra geometryczna", gdzie za pomocą równości pól dowodzi się podstawowe tożsamości algebraiczne, w tym wzory skróconego mnożenia. Księga zawiera konstrukcję, dla danego odcinka o długości a, odcinka o długości $\sqrt{a}$. Są też uogólnienia twierdzenia Pitagorasa na kąty ostre i rozwarte.
  – Księga III – Okręgi i ich własności, znajdowanie środka, kąty środkowe, wpisane, dopisane, styczne do okręgu, łuki Talesa (czyli Hipokratesa), potęga punktu, twierdzenie Talesa.
  – Księga IV – Konstrukcje okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie, a także wielokątów foremnych o 3, 4, 5, 6, 10 i 15 bokach.
  – Księga V – Teoria proporcji Eudoksosa, w tym podstawowe zasady rachowania na proporcjach (czyli we współczesnym języku – liczbach rzeczywistych).
  – Księga VI – Teoria proporcji w geometrii, zwłaszcza w teorii figur podobnych. Zawiera twierdzenie o proporcjonalności pól i podstaw trójkątów o równych wysokościach, a także dowód twierdzenia Talesa za pomocą pól.
  – Księga VII – Elementarna teoria liczb (ujęcie geometryczne): podzielność, liczby pierwsze i złożone, algorytm Euklidesa, znajdowanie NWD i NWW.
  – Księga VIII – Konstrukcja i istnieje ciągów geometrcznych liczb całkowitych.
  – Księga IX – Zastosowanie poprzednich dwóch ksiąg do dowodu istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszy oraz wszystkich parzystych liczb doskonałych.
  – Księga X – Niewymierność pierwiastków z niekwadratów liczb całkowutych, klasyfikacja niewspółmiernych pierwiastków, w tym konstrukcje pierwiastków typu $\sqrt{a^2+b^2}$ oraz $\sqrt{ab}$. Formuła na trójki Pitagorejskie.
  – Księga XI – Stereometria; prostopadłość, równoległość, objętość i podobieństwo równoległościanów. Twierdzenie o tym, że suma rozwartości dwóch kątów naroża trójściennego jest większa od trzeciego kąta.
  – Księga XII – Teoria wyczerpytania; objętości stożków, ostrosłupów, walców i ich stosunki.
  – Księga XIII – Wielościany foremnych, w tym dowód, że jest ich pięć. Konstrukcja wielościanów platońskich wpisanych w sferę. Porównanie stosunków ich krawędzi do promienia.

księga	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	łącznie
definicje	23	2	11	7	18	4	22	–	–	16	28	–	–	131
postulaty	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5
pojęcia pierwotne	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5
twierdzenia	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465

- **Archimedes** (-287, -212). Uznawany za najwybitniejszego matematyka starożytności. Autor metody wyczerpywania, twórca hydrostatyki i statyki (np. prawo Archimedesa, zasada dźwigni, prawa równi pochyłej, środek masy), astronom (globus, planetarium). Wybrane dzieła
  - *O wymierzaniu koła* – metoda wyczerpywania zastosowana do wyznaczenia pola koła za pomocą wielokątów foremnych, przybliżenia $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ oraz $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.
  - *O kuli i walcu* – wykorzystanie asjomatu Teatejosa czyli tzw. aksjomatu Archimedesa, zależności wiążące pole powierzchni i objętość kuli, walca i czasy kulistej.
  - *Kwadratura paraboli* — pole powierzchni ograniczonej przez parabolę oraz prostą jest równa 4/3 pola trójkąta wpisanego w tą figurę — w istocie jest to problem znajdowania sumy ciągu geometrycznego o ilorazie 1/4.
  - *O liczeniu piasku* – o wielkich liczbach, o tym ile ziarenek piasku potrzebne jest do wypełnienia całego wszechświata (wyszło $8 \cdot 10^{63}$), a największą rozważaną liczbą była $10^{8 \cdot 10^{16}}$.
  - *O liniach spiralnych* – wprowadził tu spiralę Archimedesa
- **Erastotenes** (-276, -194), drugi dyrektor biblioteki aleksandryjskiej, znany najbardziej z tzw. sita Erastotenesa (obecnego już u Euklidesa). Największą sławę przyniosła mu Geografia, w tym obliczenie długości promienia Ziemi (jako kulistej) oraz odległości od Księżyca. Obliczył również nachylenie osi Ziemii.
- **Ptolemeusz** (85, 165), wielki astronom aleksandryjski, twórca wielkiego dzieła *Almagest*, poświęconemu zastosowaniu geometrii w astronomii, opisujący ruch Słońca, Księżyca i planet. Model geocentryczny tego uczonego przetrwał ponad 1400 lat. Za pomocą cięciw powstałych przez wpisanie 360-kąta foremnego wyznaczył nowe przybliżenie π oraz $\sqrt{3}$. Rozważa również metody trygonomeryczne w oparciu o funkcję blisko stowarzyszoną z sinusem, uzyskując między innymi analogi formuł na $\sin(a+b)$ oraz $\sin(a-b)$. Przerwały również inne ważne dzieła: *Optyka* i *Geografia*.
- **Diofantos** (ok. 200-284), uczony aleksandryjski, tzw. „ojciec algebry”. Autor słynnej *Arytmetyki*, liczącej 13 ksiąg, z których znamy obecnie treść 10 (ostatnie cztery zostały odnalezione w II połowie XX wieku!). Wprowadził symbolikę skracającą zapis równań. Równania diofantyczne, czyli żądające rozwiązań w liczbach całkowitych lub wymiernych (dodatnich!), były zarówno oznaczone, jak i nieoznaczone. Arytmetyka liczyła 13 ksiąg. Przez wieku znano jedynie pierwsze 6. W 2023 roku ukazało się pierwsze pełne angielskie tłumaczenie[9]. Przykładowe zagadnienia:
  - Księga 1: *problemy sum i różnic*, np. znajdź dwie liczby znajdąc ich sumę i iloczyn, znajdź dwie liczby takie, że ich suma i suma ich kwadratów są dane, znajdź dwie liczby, których suma i różnica ich kwadratów są dane, znajdź dwie liczby takie, że ich różnica i iloczyn są dane,
  - Księga 2: problemy dotyczące różnic kwadratów i pokrewnych zagadnień
  - Księga 3: problemy dotyczące kwadratów, których „nie można rozwiązać”, np. znajdź trzy liczby takie, że iloczyn dowolnych dwóch zwiększony o trzecią daje kwadrat.
  - Księga 4: problemy kwadratów i sześcianów, np. znajdź dwa kwadraty, których suma jest sześcianem.
  - Księga 5: podobna do księgi czwartej, ale z wyższymi potęgami i bardziej skomplikowanymi rozwiązaniami, np. układ równań
  $$\begin{cases} x+y=20 \\ x^3+y^3=140(x-y)^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^4+my^3=n^2 \\ x^4-ny^3=m^2 \end{cases}.$$
  - Księga 6: do powyższych problemów dochodzą pierwiaski, np. $x^3 \cdot y^2 + \sqrt{x^3 \cdot y^2} = n^2$.
  - Księga 7: podobne problemy, ale wielu zmiennych, np. podzielić kwadrat na cztery części takie, że dwie odjęte od wyściowego kwadratu są kwadratami, a dwie pozostałe dodatne do wyjściowego kwadratu są kwadratami, i wiele bardziej skomplikowanych.

  Problemy te, przypomnijmy to, rozwiązywane są w konkretnych przypadkach, bez omawiania ogólnych metod. Często jednak prezentowane rozwiązania ilustrują głębokie zrozumienie algebraiczne.

  Niezwykle istotny jest również wątek geometryczny rozwiązań Diofantosa. Wiele prezentowanych rozwiązań ma w istocie charakter, który znamy z geometrii analitycznej, patrz np. `https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus_II.VIII`.

[9] Oaks, Christianidis, *The Arithmetica of Diophantus A Complete Translation and Commentary*, Routledge 2023.

Dodatek C. Nauczanie matematyki w kontekście historycznym

Nasze przyglądanie się nauczaniu algebry zamykamy kilkoma uwagami dotyczących dróg jakimi ludzie poznawali matematykę na przestrzeni dziejów. Chodzi jedynie o kilka spostrzeżeń, które mogą wzmocnić naszą intuicję dydaktyczną. Wpisuję się tym samym w stare już postulaty tzw. *zasady paralelizmu*, ku której skłaniało się wielu znanych matematyków (m.in. F. Klein, H. Poincare, G. Polya, R. Thom). Według tej zasady rozwój intelektualny osobnika powtarza, oczywiście w dużym uproszczeniu, rozwój intelektualny ludzkości. Jak pisze prof. Roman Duda w artykule *Kształcenie matematyczne przyszłych nauczycieli matematyki* z roku 1985 (link pod koniec dodatku):

> Zasada paralelizmu dostarcza też ważnej wskazówki metodologicznej: często najlepszą drogą do zrozumienia jakiegoś pojęcia czy twierdzenia jest powtórzenie (w skrócie) drogi jego odkrywania. Powinno to nas powstrzymywać przed pokusą formułowania pojęć czy twierdzeń od razu w wyrafinowanej postaci, jaką uzyskały w toku długiej ewolucji, i jaka dla nieprzygotowanego umysłu jest trudna do przyjęcia. Z tych uwag chcę wyciągnąć trzy ważne, moim zdaniem, wnioski. Wniosek pierwszy: przedmiotem nauczania w szkole jest i musi pozostać matematyka w znacznym już stopniu martwa, ale kulturowo ważna. Wniosek drugi: nauczanie matematyki powinno być tak prowadzone, by była to matematyka dydaktycznie żywa...

Zachęcam Czytelnika do lektury całości powyższego artykułu, z którego tezami mocno się utożsamiam, ale również do zatrzymania się przez kilka chwil nad rozważaniem tego jak ludzkość uczyła się algebry, i jakie były przełomowe kroki w tym procesie. Przyjrzymy się temu naturalnie w wielkim uproszczeniu.

W starożytności, bardziej jeszcze niż w późniejszych epokach, status społeczny był w zasadzie dany wraz z urodzeniem i ewentualne pobieranie nauki wiązało się z przeznaczeniem wytyczonym młodemu człowiekowi. Dotyczyło to zarówno Grecji jak i Rzymu, gdzie zwykle do około dwunastego roku życia wybrane dzieci uczone były w domu, bądź to przez rodziców, bądź to wykształconego niewolnika. Większość z nich poznawała pismo, muzykę, gimnastykę i drobne elementy arytmetyki i geometrii. Po tym czasie chłopcy przenoszeni byli do szkoły, gdzie uczyli się gramatyki oraz podstaw logiki i retoryki. Pod koniec tego etapu wielu nie szło dalej. Nielicznych stać było na zatrudnienie prywatnego nauczyciela (Rzym) lub wejście do akademii prowadzonych przez takich ludzi jak Pitagoras, Platon czy Arystoteles.

Dużą rolę w zachowaniu i przekazaniu dorobku starożytności we wczesnym okresie średniowiecza odegrali w V i VI wieku duchowni Marcjan Capella, Boecjusz oraz Kasjodor. Capella napisał obszerne dzieło, którego część pierwsza obejmowała podstawę nauczania w starożytnym Rzymie: gramatykę łacińską, retorykę i dialektykę, a druga – arytmetykę, muzykę, geometrię i astronomię, które składały się na pitagorejską matematykę. Wyróżnione przez Capellę przedmioty zostały nazwane później *sztukami wyzwolonymi* (łac. *artes liberales*). Boecjusz ujął je w dwa wielkie cykle: niższy zwany *trivium*, czyli gramatyka, retoryka i dialektyka oraz wyższy zwany *quadrivium*, stanowić będą dyscypliny ustalone już przez pitagorejczyków: muzyka, astronomia, arytmetyka i geometria. Kasjodor założył pierwszą wielką bibliotekę zakonną w Vivarium w południowej Italii. Swoim mnichom nadał obowiązek opracowywania i przepisywania starożytnych rękopisów. Było to, rzecz tak można, pierwsze średniowieczne wydawnictwo.

Cykle Boecjusza stały się w średniowieczu podstawą nauczania w całym świecie łacińskim. Jego *Institutis Arithmetica*, w istocie łaciński przekład *Arytmetyki* Nikomachosa z około 100 r. n.e., wprowadzał w arytmetykę liczb całkowitych dodatnich i w tej roli służył Arabom i Europie ponad 500 lat. Jego *Geometria* zawierała wyciąg z trzech pierwszych ksiąg *Elementów* Euklidesa, z całkowitym pominięciem dowodów. Dodane zostały natomiast wskazówki praktyczne, jak mierzyć pola działek oraz wprowadzenie do podstawowego narzędzia, za pomocą którego wykonywano setki lat rachunki – abaku, o którym dalej.

O ile tłumaczenia antycznego *trivium* uważane były przez kolejne wieki za udane, o tyle tłumaczenia dzieł antycznego *quadrivium* krytykowano w takim stopniu, że w XII wieku wielką potrzebą (i bodźcem rozwoju) stało się uzyskanie ponownego łacińskiego tłumaczenia, już na podstawie dorobku arabskiego.

We wczesnym średniowieczu zakładano przy klasztorach szkoły, prowadzące systematyczne nauczanie. Było ono pamięciowe i bierne, bez podziału na klasy i godziny lekcyjne. Uczono głównie czytania i pisana, głównie na potrzeby stanu duchownego. W IX wieku Karol Wielki stworzył pierwsze po cesarstwie rzymskim duże państwo w Europie. Dało ono oparcie tzw. odrodzeniu karolińskiemu, którego podstawą był powszechny w zamierzeniu system szkolny. Przy każdym biskupstwie i opactwie postawały szkoły, a organizatorem szkolnictwa był sprowadzony z Anglii Alkuin (ok. 730-804). Oprócz szkół dla mnichów powstawały też szkoły dla świeckich. Uczono w nich, z nielicznymi wyjątkami, jedynie *trivium*.

Po śmierci Karola Wielkiego cesarstwo się rozpadło, ale do jego refom wrócił po 200 latach papież Grzegorz VII. Europa wieków XI-XIII przeżywała intensywny rozwój. Czynnikiem postępu stawały się ambitniejsze szkoły katedralne, których wykładowcy i uczniowie wzorem cechów zaczęli tworzyć wspólnoty. Czasem były to szkoły przyuczające do ważnych zawodów, ale szybko pojawiły się też szkoły o szerszym profilu. Modelem *uniwersytetu* jako takiej szerszej instytucji stał się Paryż, który aż do końca średniowiecza pozostawał wzorem i główną uczelnią łacińskiego świata. Ważnymi ośrodkami były też Bolonia i Oksford. Prawo zakładania uniwersytetów miał tylko papież, co zapewniało im jednolitą formę i konieczność utrzymania należytego poziomu, a także tę samą strukturę wydziałową. Uniwersytet „pełny" miał 4 wydziały, propedeutyczny, inaczej filozoficzny, gdzie niezależnie od dalszego kierunku uczono sztuk wyzwolonych, a nadto medyczny, prawny i teologiczny. Obowiązek przejścia każdego żaka przez *quadrivium* ogromnie sprzyjał ustabilizowaniu się istotnego miejsca matematyki w kulturze Europy.

Celem nauczania propedeutycznego było raczej ćwiczenie umysłu w sztuce ścisłego wyrażania myśli i przeprowadzania dowodów, mniej zaś uczenie obliczeń, pomiarów czy sztuki prowadzenia rachunków. Zainteresowani poważniejszymi zastosowaniami studiowali matematykę później u osobnych mistrzów (przykładem takiego studenta był Kopernik). Mimo wszystko rosło zainteresowanie matematyką również w szkołach niższych typów. Aż do końca średniowiecza nie pojawiły się znaczniejsze osiągnięcia matematyczne.

Polskie szkoły zaczęły powstawać wraz z zagęszczaniem i stabilizacją administracji kościelnej. Przy siedzibach biskupich, a z czasem i poza nimi, powstawały szkoły, których liczba pod koniec wieku XIII doszła do 30. Wymagano także (z czasem), by nauczanie prowadzone były także w języku polskim. Polacy zaczęli też odbywać studia we Włoszech i Paryżu. Wykształceni na Zachodzie Polacy wracali i wydatnie przyspieszali rozwój własnego kraju. Szkoły nie uczyły według ustalonego kanonu. Krytycznie istotnym momentem stało się powołanie uniwersytetu w Krakowie w 1364 roku, z katedrą sztuk wyzwolonych przy kościele mariackim. W 1402 roku mieszczanin krakowski Jan Stober ufundował w ramach tej uczelni osobną katedrę nauk ścisłych, drugą po Bolonii na europejskich uniwersytetach.

Jak wyglądało nauczanie matematyki w czasach nowożytnych? Wielkie znaczenie miała tu Reformacja. Tak jak w wiekach XI-XIII wysiłkiem Kościoła powstały i ugruntowały się uniwersytety, tak w wieku XVI ukształtowała się nowożytna szkoła średnia, kształcąca już w rozumieniu humanistycznym, wciąż jednak mocno nacechowanym religijnie. Wzorem takiej szkoły stało się protestanckie gimnazjum Jana Sturma, założone w Strasbourgu w 1536 roku. Nowością był w nim system klasowo-lekcyjny, potem powszechnie przyjęty. Językiem nauczania była łacina, a podstawą nauczania *trivium* i *quadrivium*, z wyraźną przewagą tego pierwszego. Uczniem tej szkoły był choćby Jan Zamojski, twórca Akademii w Polsce. Na szkole Sturma wzorowały się zarówno katolickie, jak i protestanckie szkoły, nazywane często gimnazjami lub kolegiami. Dotychczasowe szkoły parafialne i klasztorne w większości spadły na poziom podstawowy. Działania Soboru w Trydencie zaowocowały powstaniem seminariów duchownych i motywacje dla istnienia szkół parafialnych uległy zmianie, co sprawiło, że stały się dostępne dla wszystkich. W szkołach średnich uczono w zasadzie jedynie przedstawicieli zamożniejszych sfer: szlachty, arystokracji i patrycjatu miejskiego. Z czasem stało się to przyczyną dużego kryzysu, widocznego choćby w Polsce.

W świecie katolickim czołową rolę odegrał nowo utworzony zakon jezuitów, który ustalił w 1599 roku pierwszy w historii program nauczania w szkołach średnich, zwany w skrócie *Ratio*. Był to powszechny program nauczania i wychowania zawierający również wytyczne dla profesorów. Początkowo w *Ratio* niewiele było miejsca dla matematyki, Z czasem, w ciągu ośmiu lat nauczania, wykładano *Elementy* Euklidesa, arytmetykę i geometrię. Te i inne innowacje nadały dużą dynamikę nauczaniu na poziomie średnim, wyprzedzającą pod wieloma względami rozwój uniwersytetów, zatrzymany aż do wieku XIX.

Uniwersytety, ukształtowane według średniowiecznych wzorców i głównie pod nadzorem kościelnym, miały niechętny stosunek do idei humanistycznych, Żywy ruch intelektualny przestał odbywać się na uczelniach, a przeszedł pod opiekę możnych mecenasów: królów, książąt i miast. W tych nowych środowiskach intelektualnych wybitną rolę odegrać miały tworzące się towarzystwa naukowe (m.in. Londyn, Paryż), natomiast uniwersytety skupione na uczeniu tradycyjnym zaczęły popadać w marazm. Także w Polsce było to szczególnie widoczne. Szlachta, mając gwarancję monopolu ważnych stanowisk i godności, ograniczała się do nauki w kolegiach i gimnazjach, uzupełnianej ewentualnie studiami zagranicznymi. W Akademii Krakowskiej w XVIII wieku odsetek populacji szlacheckiej wynosił ok 10%. Odbijało się to niekorzystnie na jej statusie i finansach. Do tego doszły wieloletnie konflikty o wpływy z jezuitami.

W nauce, a także w matematyce, nowożytność rozpoczęła się w zasadzie od prac Kopernika i Galileusza. Zmienił się paradygmat nauki. Doświadczenia Galileusza dotyczące opisu ruchu, ograniczonego do swobodnego spadania, oraz jego matematyczny opis, stanowiły zachętę do śmielszego stosowania matematyki i rodziły przekonanie, że matematyka jest językiem przyrody. Była to wielka, choć z początku bardzo powolna i trudna, zmiana w rozumieniu świata. Oczywiście prowadziło to do znanych sporów z instytucjami kościelnymi i uniwersyteckimi. Nie chodziło jedynie o wybór między tą czy inną teorią, jak to miało miejsce w przypadku Kopernika. Nauka „uniwersytecka" dotąd starała się odkryć istotę rzeczy i odpowiadać na pytania dlaczego rzeczy się dzieją, ujmując te przyczyny w jeżyku filozoficzno-teologicznym. Ujęcie Galileusza, Newtona, Keplera i kolejnych wielkich geniuszy XVII i XVIII wieku polegać będzie na zastąpieniu powyższych pytań problemem wyjaśnienia jak się rzeczy mają i dzieją. Newton nie będzie szukał odpowiedzi na pytanie „czym jest grawitacja", natomiast opisze precyzyjne jak ona działa. W końcu metoda znajdzie również filozoficzne oparcie w kartezjańskiej metodzie metodycznego wątpienia.

Wróćmy teraz do kluczowego dla polskiej i (nie tylko) edukacji okresu końca XVIII wieku. Nie wdając się w szeroki kontekst, należy powiedzieć kilka słów o wielkiej wizji i reformie proponowanej przez Komisję Edukacji Narodowej. W 1772 roku nastąpił pierwszy rozbiór Polski, a w roku 1773 ogłoszono kasatę zakonu jezuitów, prowadzącego większość kolegiów w Rzeczypospolitej. Groziło to upadkiem szkolnictwa i dało impuls do reform. W tym samym roku Sejm powołał w zasadzie pierwsze w Europie ministerstwo edukacji, które w skrócie nazywamy dziś Komisją Edukacji Narodowej. Zadania postawione KEN były ambitne: przejęcie szkół jezuickich i opracowanie podstaw prawnych i organizacyjnych nowego systemu edukacyjnego dla całego kraju, opracowanie jednolitych programów szkolnych i podręczników dla realizacji tych programów, przygotowanie nauczycieli i administratorów. Była to pierwsza w dziejach świata próba przekształcenia chaotycznego systemu szkolnego w system obowiązujący na terenie kraju wszystkie szczeble nauczania, zorientowany przy tej okazji na wychowanie według oświeceniowych wartości.

Nie sposób opisać tu całej tytanicznej pracy, wszystkich sukcesów i pomysłów dwudziestoletniej działalności KEN, nadzwyczaj na tamte czasy nowatorskiej (przejęte zostały one właściwie bez istotnych zmian np. w zaborze rosyjskim). Z naszego punktu widzenia kluczowe może być stwierdzenie, że reforma edukacji oparta była o matematykę, która wydzielona została jako osobny przedmiot, będący na szczycie listy przedmiotów nauczania, opatrzony podręcznikami wyłonionymi w ramach konkursu, przetłumaczonymi na język polski i bardzo nowoczesnymi. Po reformach KEN utrwalił się w szkołach polski język nauczania. Istotnie posunął się proces tworzenia polskiej terminologii matematycznej. Zainteresowanych podejściem KEN do nauczania matematyki, odsyłam do tekstu Zofii Iwaszkiewiczowej. Czytelnika zainteresowanego szerszym kontekstem odsyłam do pięknej pracy zbiorowej *Epoka wielkiej reformy. Studja i materijały do dziejów oświaty w Polsce XVIII wieku*, wydanej przez Książnicę w 1923 roku.

Od początku XIX wieku powszechniejsze stało się kształcenie inżynierów cywilnych i wojskowych, nauczycieli itp. co wymogło zmiany w systemie nauczania, przede wszystkim we Francji i w Prusach. Był to również czas narodzin powszechnego nauczania, rozwoju szkół wyższych typu politechnicznego oraz znacznego wzrostu poziomu nauczania kadr niematematycznych. W Prusach wypracowano koncepcję uniwersytetu jako instytucji nie tylko nauczającej, ale prowadzącej badania naukowe. Wzorem stał się uniwersytet w Berlinie, założony w 1811 roku. Cechą wyróżniającą reformy pruskie było wyraźne rozgraniczenie poziomu średniego i wyższego. Na poziomie średnim najważniejsze było 8-letnie gimnazjum, kończące się egzaminem dojrzałości, czyli maturą. Dopiero ona pozwalała na wstęp na uniwersytet. W ślad za tym szła zasada, że nauczycielem gimnazjalnym mógł być jedynie absolwent uniwersytetu, który zdawał do tego trudny państwowy egzamin nauczycielski. Na uniwersytetach ugruntował się panujący obecnie ustrój stopni i tytułów naukowych. Reformy te okazały się niezwykle skuteczne i trwałe.

Potrzeby nauczania wymusiły postęp w kierunku tzw. rygoryzacji analizy (były również powody matematyczne). Jednym z efektów był chociażby podręcznik „Cours d'Analyse" Cauchy'ego czy notatki Weierstrassa publikowane przez jego studentów. Jeszcze w wieku XIX-tym niektóre podręczniki dla szkół średnich zawierały istotne informacje o rozwoju matematyki jako nauki, dające (nauczycielowi, dla którego pisano podręcznik) choćby poczucie bycia na bieżąco z jej rozwojem. Dalszy rozwój analizy oraz powstawanie nowych dziedzin matematyki w drugiej połowie XIX wieku sprawia, że na początku wieku XX luka między matematyką nauczaną a uprawianą jest ogromna, nawet na poziomie uniwersyteckim, a wielokrotnie bardziej na poziomie średnim. W wieku XX miały miejsce dwie wielkie fale reform prowadzących do zwalczania tego opóźnienia, prowadzące do zmian programów nauczania w całej Europie.

Pierwszy z programów, tzw. Program Mereński z roku 1905, który wiąże się z osobą Felixa Kleina – wybitnego matematyka z uniwersytetu w Getyndze, związany był z eksponowaniem w nauczaniu pojęcia funkcji oraz wskazywania. między innymi za jego pomocą, na nowoczesne zastosowania matematyki. Pojawiły się również nieobecne wcześniej w nauczaniu elementy teorii przekształceń algebraicznych. Efekty wprowadzonych reform miały wpływ również na polskie szkoły w zaborze pruskim[10] Oddziaływanie tego programu miało istotny wpływ na przedwojenne programy nauczania, choć ich formowanie było skomplikowane z uwagi na konieczność integracji (i zdecydowanej reformy) programów z terenów różnych zaborów. W Polsce program ten znalazł swoją ostateczną realizację w wielkiej reformie z 1932 roku. Czytelnika zainteresowanego historią reformy i wdrażaniem jej matematycznych założeń odsyłam do dwóch tomików E. Dudkówny i J. Strzeleckiej w bibliografii.

Celów reformy nie udało się osiągnąć. Przepaść pomiędzy uprawianą matematyką, a nauczaniem pogłębiły kryzysy ekonomiczne i wojny. Jednocześnie, choćby w Polsce, do nauczania choćby na poziomie średnim, przystąpiły nieznane wcześniej ilości uczniów. Po raz kolejny powstała idea reformy, której początki datuje się na końcówkę lat pięćdziesiątych XX wieku, a której inicjatorem był członek wpływowej grupy matematyków francuskich, występujących pod nazwą Bourbaki – Jean Dieudonne. Jako centralną ideę nowoczesnego nauczania widział on rozważanie struktur – zbiorów, grup, przestrzeni. Dziedziną, którą miała umożliwić złapanie kontaktu z żywą matematyką była teoria mnogości. Po zyskaniu miejsca w wykładach uniwersyteckich przeniknęła ona także do nauczania w szkołach średnich, a nawet podstawowych. Zwykle program ten (obejmujący także świat nauki) nazywano New Math lub „nową matematyką".

Aby dać Czytelnikowi pogląd na głębokość proponowanych zmian warto zacytować artykuł prof. Elżbiety Gruszczyk-Kolczyńskiej[11], z którego dowiadujemy się, że w opracowanym przez H. Moroza w 1961 r. eksperymencie pedagogicznym realizującym założenia New Math, w klasie pierwszej szkoły podstawowej zalecano następujące treści w ramach bloku *Zbiory i ich elementy*: a) zbiory i ich elementy: diagramy Venna, elementy zbiorów, podzbiory, zbiór jednoelementowy, zbiór pusty, rozkład zbioru na zbiory rozłączne, b) operacje na zbiorach: suma (złączenie), iloczyn (część wspólna), różnica zbiorów, c) porządkowanie elementów zbiorów, d) przyporządkowanie elementów jednego zbioru elementom drugiego zbioru; zbiory równoliczne, grafy strzałkowe, e) klasyfikacja według różnych własności przedmiotów konkretnego materiału dydaktycznego i ćwiczenia logiczne wdrażające do posługiwania się zwrotami „i", „lub", „nie".

W klasie III w ramach bloku *Zbiór i liczba* realizowano m.in tematy: Liczba elementów danego zbioru skończonego: dodawanie liczb a sumowanie zbiorów; własności sumy liczb: przemienność łączność, rola zera. Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów skończonych; liczba iloczynu zbioru kartezjańskiego dwóch zbiorów i dwóch liczb a iloczyn dwóch liczb; własności iloczynu liczb naturalnych: przemienność, łączność, rozdzielność iloczynu względem sumy dwóch liczb, rola liczb zero i jeden. Iloraz. Rozdzielność ilorazu względem sumy i różnicy liczb. Zapis liczby w numeracji o dowolnej podstawie.

Powyższy program realizowano w setkach szkół. Jakkolwiek szokujące może się to wydawać, w roku 1972 opracowany został program, który niektóre z tych treści przeniósł do nauczania przedszkolnego, obejmującego nawet dzieci trzyletnie! Programy te obowiązywały w polskich szkołach i przedszkolach od połowy lat siedemdziesiątych. W ciągu dwudziestu lat okazało się, choć świadomość ta rodziła się w środowisku matematycznym bardzo powoli, że nauczanie według idei *New Math* może być błędem. Cytując prof. Gruszczyk-Kolczyńską, przyczyną było lekceważenie wiedzy o rozwoju umysłowym dzieci.

[10] Karolina Karpińska, *Teaching thinking in terms of functions – fulfilling the fundamental idea of the Merano Programme at Torun Classical Grammar School in the early twentieth century* Czasopismo Techniczne 2016, `https://www.ejournals.eu/pliki/art/6850/`.

[11] Elżbieta Gruszczyk-Kolczyńska, *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei nowej matematyki do edukacji matematycznej dzieci*, `http://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr2/Gruszczyk.pdf`.

Formalny kres wdrażania idei nowej matematyki w edukacji dzieci nastąpił z chwilą opublikowania *Ustawy o systemie oświaty* w roku 1996. Dla niektórych był to może początek końca „romantycznego" ambitnego nauczania, ..starej dobrej szkoły" i obecności treści, które stopniowo zaczęły znikać z programów nauczania. Rodzi to w środowisku matematycznym rozmaite dyskusje i napięcia. Jednocześnie jednak właśnie okres przemian ustrojowych przyniósł kolejną gwałtowną falę zainteresowania edukacją średnią i wyższą, niespotykaną w czasach PRL. Przed całym systemem stanęły nowe wyzwania, odczuwalne zwłaszcza w epoce „globalnej wioski", komputeryzacji oraz wymagań i nieprzewidywalności rynku pracy.

Współcześnie centralną rolę w kształtowaniu programów nauczania matematyki, ma wspomniana we wstępie globalna strategia kształtowania kompetencji matematycznych, proponowana m.in. poprzez badania PISA. Jak pisaliśmy, doprowadziła ona na przełomie milenium do głębokich reform w nauczaniu matematyki, w szczególności – do wprowadzenia egzaminów centralnych oraz do wprowadzenia na nie (również w obowiązkowej dla wszystkich formule podstawowej) rozumowania i argumenacji. Oto kilka przykładów zadań egzaminacyjnych, wraz z krótkimi komentarzami ze sprawozdań CKE.

Zadanie 116 (Poziom podstawowy, 2015)**.** *Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geqslant 0$.*

W egzaminie wzięło udział 177 666 uczniów. Jak przyznają autorzy sprawozdania na stronach CKE, „przeprowadzenie dowodu z zakresu algebry jest tradycyjnie największym wyzwaniem dla maturzystów, zdających egzamin na poziomie podstawowym". Zadanie powyżej rozwiązało 18% zdających.

Zadanie 117 (Poziom podstawowy, 2016)**.** *Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnij, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.*

Powyższe zadanie rozwiązało poprawnie 23% zdających. Było to najtrudniejsze zadanie na egzaminie. Znowu warto zacytować sprawozdanie: „Liczna grupa zdających w ogóle nie podejmuje próby rozwiązania zadań, wymagających uzasadnienia tezy, z góry rezygnując z możliwości uzyskania punktów za umiejętność rozumowania i argumentacji. Regularnie w egzaminach maturalnych występuje prawidłowość, że dowód z zakresu algebry okazuje się trudniejszy od dowodu geometrycznego". Sytuacja ta powtarza się każdego roku. Oto przykłady z czasów pandemii wykonane przez odpowiednio: 20% i 27% zdających.

Zadanie 118 (Poziom podstawowy, 2020)**.** *Wykaż, że dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a(a - 2b) + 2b^2 > 0$.*

Zadanie 119 (Poziom podstawowy, 2021)**.** *Wykaż, że dla każdych trzech dodatnich liczb a, b i c takich, że $a < b$, spełniona jest nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.*

Poniższe zadanie z egzaminu ósmoklasisty w roku 2020 zostało rozwiązane przez jedynie 7% zdających!

Zadanie 120. *W trójkącie o kątach wewnętrznych α, β, γ miara kąta α jest równa różnicy miar dwóch pozostałych kątów. Uzasadnij, że ten trójkąt jest prostokątny.*

Być może interpretując powyższe dane jako wynik całego społeczeństwa ktoś powie, że przeciętny polski uczeń nigdy nie znał matematyki tak dobrze i być może nigdy nie był jej uczony tak nowocześnie jak teraz. Czy to wystarczy? Powszechnie zbagatelizowano raport NIK[12] z 2019 roku, miażdżąco wręcz podsumowujący sytuację nauczania matematyki, rekomendujący odchudzenie wymagań programowych i zawieszenie obowiązkowej matury z matematyki. Nie był to zresztą pierwszy czy ostatni tak alarmujący dokument. W raporcie[13] Instytutu Badań Edukacyjnych z 2015 roku pt. „Wnioski z badań i dyskusji dotyczące nauczania matematyki" przeczytać można m.in. następujące tezy dotyczące nauczania matematyki.

- W nauczaniu matematyki ważne jest, by kształtować zarówno podstawowe umiejętności narzędziowe, jak i umiejętności rozumowania oraz rozwiązywania nietypowych problemów. Tymczasem z szeroko przeprowadzonych obserwacji lekcji wiemy, że nauczanie matematyki w polskich szkołach niemal wyłącznie skupia się na podstawowych umiejętnościach narzędziowych, pomijając umiejętność rozumowania.

- Nadmierne skupienie uwagi na podstawowych umiejętnościach narzędziowych, zwłaszcza na pierwszym i drugim etapie edukacyjnym, zabija ciekawość i kreatywność dzieci i utrudnia, a często uniemożliwia, pogłębianie umiejętności rozumowania matematycznego na kolejnych etapach.

[12]Matematyka do poprawy, `https://www.nik.gov.pl/aktualnosci/matematyka-do-poprawy.html`.

[13]Patrz: `https://www.ibe.edu.pl/images/materialy/Matematyka-wnioski-z-badan-i-dyskusji.pdf`.

- Nauczyciel, który niepewnie czuje się w omawianych z uczniami zagadnieniach, ogranicza się do przekazywania typowych schematów. Tymczasem dzieci bardzo często rozwiązują zagadnienia matematyczne w sposób nietypowy, np. przedstawiając swoje rozumowanie za pomocą rysunku czy posługując się własnymi skojarzeniami, pozornie oderwanymi od zadania[14]. Obawa nauczyciela o poprawność nietypowej drogi dochodzenia do rozwiązania często prowadzi do jej nieuznania. Jest to jeden z mechanizmów zabijania w dziecku poczucia własnego sukcesu. Zamiast dostrzec w rozumowaniu dziecka jego własną myśl, niepewny swoich możliwości nauczyciel sprowadza dziecko w utarte koleiny typowych schematów. Zamiast wzmocnić i rozwinąć naturalny sposób myślenia, działając w dobrej wierze, ale nie do końca kompetentnie, wywołuje niechęć i lęk.

- Nauczyciele deklarowali, że akceptują inne rozwiązania danego zadania niż sami przedstawili uczniom. Z obserwowanych lekcji wynika jednak, że jest to najczęściej tylko deklaracja. Zdarzało się, iż mówili uczniom, że istnieją inne rozwiązania, jednak rzadko je z uczniami omawiali. Wytwarza to w uczniach przekonanie, że zadanie matematyczne można rozwiązać tylko jednym sposobem, że jest jeden słuszny sposób rozumowania, co w konsekwencji uczy bardziej stosowania algorytmów niż rozumowania matematycznego.

Podczas czwartej Szkoły Matematyki Poglądowej prof. Stefan Turnau wygłosił referat przedstawiający opinie wybitnych dydaktyków nauczania matematyki drugiej połowy XX stulecia na nauczanie matematyki. Jest on dostępny pod adresem: `https://smp.uph.edu.pl/msn/4/12-16.pdf`. Czytając ten artykuł dochodziłem nie raz do wniosku, że wszelkie pomysły na nauczanie matematyki już zostały wysłowione, przebadane i w zasadzie nie odmieniły zasadniczego poczucia, że ludziom nie uczy się jej dobrze – jakoś się z nią czują nie najlepiej. Oto problem dostrzrgalny na wszystkich poziomach – podstawy programowe, sylabusy akademickie, podręczniki pełne treści, które po prostu nie zostają w głowie. Co gorsze, okazuje się, że zmuszeni do uczenia się ponad możliwości i siły, nie nauczyliśmy się nawet rzeczy podstawowych.

[14]Przypis autora: polecam obejrzenie obrazka zaczerpniętego z jednego z forów nauczycielskich, który ciekawie ilustruje to zagadnienie: `https://www.mimuw.edu.pl/~amecel/czypoprawnie.jpg`.

Dalsza możliwa lektura

- R. Duda, *Historia matematyki w Polsce na tle dziejów nauki i kultury*, Oficyna Wyd. Aspra 2018.
- R. Duda, *Kształcenie matematyczne przyszłych nauczycieli matematyki*, Dyd. Matematyki 5 (1985), https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/didactica-mathematicae/issue/view/462.
- W. Dubiel, *Dzieje teorii nauczania matematyki w polskiej szkole średniej*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 42/3-4, 85-106.
- E. Dudkówna, J. Strzelecka, *Jak realizować nowy program matematyki*, tomy 1-2, Warszawa 1933, https://polona.pl/sets?searchLike=dudk%C3%B3wna&searchCategory=objectSets
- *Epoka wielkiej reformy. Studja i materijały do dziejów oświaty w Polsce XVIII wieku*, Książnica 1923, http://pbc.up.krakow.pl/Content/6181/epoka_wielkiej_reformy_studja_i_lempicki_stanislaw_red_001028.pdf
- E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Ćwierć wieku modernizacji nauczania matematyki. Pedagogiczna analiza sposobów i konsekwencji wprowadzania idei nowej matematyki do edukacji matematycznej dzieci*, http://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr2/Gruszczyk.pdf.
- Z. Iwaszkiewiczowa, *Nauczanie arytmetyki w szkołach Komisji Edukacji Narodowej*, Książnica 1923, https://www.pbc.biaman.pl/dlibra/publication/6164/edition/6208/content.
- K. Karpinska, *Teaching thinking in terms of functions – fulfilling the fundamental idea of the Merano Programme at Torun Classical Grammar School in the early twentieth century*, Czasopismo Techniczne (2016).
- M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 2006.
- W. Więsław: *Mathematics at Polish universities (Cracow and Vilnius) in the XVIII century,* https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401240.
- A. Wojciechowska-Waszkiewicz, *Rozwój matematyki a przemiany w jej nauczaniu* , https://smp.uph.edu.pl/msn/1/08-11.pdf.

Dodatek D. Miejsce i rola algebry w szkolnej podstawie programowej

Zgodnie z artykułem dr Agnieszki Demby *Przegląd koncepcji nauczania algebry w polskich programach szkolnych z lat 1949-1990*, wyróżniamy cztery typy kluczowych umiejętności algebraicznych.

(Z) Zapisywanie i nazywanie wyrażeń algebraicznych (w tym jednomianów i sum algebraicznych).

(P) Podstawianie liczb za litery oraz obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego.

(T) Tożsamościowe przekształcenia wyrażeń algebraicznych, w czym zawierają się:

- przekształcenia towarzyszące posługiwaniu się równaniami pierwszego stopnia: redukcja wyrazów podobnych, dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych, mnożenie i dzielenie jednomianu przez liczbę, mnożenie i dzielenie sumy algebraicznej przez liczbę,
- przekształcenia, w których pojawiają się potęgi o konkretnych wykładnikach naturalnych (np. x^5, a nie x^n): mnożenie jednomianów, mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian, mnożenie sum algebraicznych, obliczanie potęgi jednomianu, wzory skróconego mnożenia,
- inne: przekształcenia wyrażeń wymiernych, pierwiastkowych, trygonometrycznych, potęgowych, wykładniczych, logarytmicznych.

(R) Sprawdzanie, czy dane liczby spełniają równanie, nierówność lub układ równań, rozwiązywanie równań, nierówności, układów równań oraz ich stosowanie w zadaniach tekstowych i przy przekształcaniu wzorów.

Oczywiście algebra w podręcznikach i programach szkolnych znalazła się dużo wcześniej, niż po II Wojnie Światowej. W nauczaniu matematyki aż do początku XX wieku dominowała, jak pisze prof. Helena Siwek, *strategia mechanistyczna.* W artykule *Główne strategie kształcenia matematycznego uczniów* czytamy

> Praktyka była oporna wobec postępowych idei głoszonych przez teorię, przez uczonych, przez inicjatorów reform oświatowych. Bardzo na przykład postępowe idee utylitaryzmu, psychologizmu i stosowania metody analityczno-syntetycznej, głoszone przez Komisję Edukacji Narodowej i wcielane w życie za pośrednictwem książek szkolnych, opracowanych w ramach Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych, powołanego do działalności w roku 1775, długo nie zyskały powszechnej aprobaty. Wysoko oceniane przez Komisję podręczniki Szymona L'Huilliera do arytmetyki, algebry i geometrii miały wielu zagorzałych przeciwników - szeroki wachlarz sytuacji uzasadniających wprowadzenie nowego pojęcia, rozmaitość i wszechstronność przykładów, uporządkowanie i logiczne następstwo definicji nie zyskało zrozumienia u nauczycieli. Przyzwyczajeni do realizacji pamięciowej podręcznika strona po stronie, nauczyciele uczyli „po staremu”, uczniowie w dalszym ciągu potrafili rozwiązywać tylko zadania typowe, nie radzili sobie z innymi przykładami, nauczyciele dyktowali reguły do zeszytu, woleli krótkie notatki niż rozbudowane teksty nowego podręcznika, dominowało mechaniczne przekazywanie treści (Majorek 1973). Sytuacja ta nasuwała wówczas oczywisty wniosek, że o wiele trudniej o zdolnych wykonawców słusznych założeń metodycznych podręcznika niż o sam podręcznik.


ZBIÓR SŁÓW POLSKICH
albo nowych, albo mniéy znanych, użytych w téy Xiędzie, z przydanémi d
mi łacińſkiémi, toż ſamo w używaniu Matematyków znaczącémi.

Beziſtotny	Imaginarius.
Ciąg	Progreſſio.
Czynnik	Factor.
Iſtotny	Realis.
Mianowanié	Denominatio.
Mnogość	Potentia *albo* Dignit
Nadmiar	Exceſſus.
Niedomiar	Defectus.
Nawias	Parentheſis.
Odiemnik	Subtrahendus.
Odiemny	Minuendus.
Oddzielnie	Abſtractè.
Oddzielny	Abſtractus.
Półdwóyny	Subduplus.
Przerabianié	Reductio.
Przydaynie	Poſitivè.
Przydayny	Poſitivus.
Równanié	Æquatio.
Równorzutnia	Parabola.
Rozbiór	Analyſis.
Rozbiorowy	Analyticus.
Rozwiązanie	Solutio.
Spółczynnik	Coefficiens.
Sprawdzénié	Verificatio.
Strona równania	Membrum æquationis.
Szereg	Series.
Toſamość	Identitas.
Uiémny	Negativus.
Układ	Syſtema.
Warunek	Conditio.
Węgielnica	Norma.
Wielokrotny	Multiplus.
Wykładnik	Exponens.
Wymiar	Dimenſio.
Wyráz	Terminus.
Wyznaczony	Determinatus.
Wzaiemny	Reciprocus.

W przekładach podręczników L'Huilliera pojawiło się pierwsze (nie zawsze trafne) ujednolicone na cały kraj nazewnictwo algebraiczne. Powyżej, strona z *Algebry dla Szkół Narodowych* (1782).

Dzięki pracom Komisji Edukacji Narodowej wyłonione zostały w konkursie Komisji Edukacji Narodowej podręczniki dla szkół polskich. Ich autor, Simon A.J. L'Huillier (1750-1840), był szwajcarskim matematykiem, uczniem Louisa Bertranda – ucznia samego Leonharda Eulera (1707-1783), który miał wielokrotnie kontakt ze środowiskiem nauki polskiej [15], a także z samym królem Stanisławem Augustem Poniatowskim.

Wspominaliśmy już we wstępie słynne dwutomowe dzieło Eulera *Kompletne wprowadzenie do algebry*, wydane w latach 1768-1770, najpierw w Rosji, a potem w Prusach. Jest to, jak wspomina prof. Szurek w referacie wygłoszonym na Szkole Matematyki Poglądowej, druga po *Elementach* Euklidesa, książka matematyczna o największej liczbie wydrukowanych egzemplarzy, błyskawicznie przetłumaczona na najważniejsze języki Europy. Miała niewątpliwie charakter przełomowy, ukazując zagadnienia algebraiczne nie tylko jako pewną piękną całość, ale też przez pryzmat ciekawych zadań, nierzadko także o charakterze rekreacyjnym. Głęboki układ merytoryczny treści dzieła miał wpływ na większość późniejszych podręczników algebry, także w Polsce. Oczywiście, dopiero w wieku XX pojawiły się podręczniki uwzględniające to jak uczymy się matematyki jako dzieci (w Polsce – od tzw. reformy jędrzejewiczowskiej z roku 1932).

[15] Więcej: R. Sznajder, *On known and less known relations of Leonhard Euler with Poland*, Studia Historiae Scientiarum 215 (2016), 75-110. Artykuł jest dostępny on-line, podobnie jak cyfrowe wersje podręczników L'Huilliera.

Oto treści podstawy programowej przyjętej w roku 2017 wraz z zapowiedzią likwidacji gimnazjów. Usunięto podane w podstawie przykłady, zastępując je opisem.

KLASY IV-VI SZKOŁY PODSTAWOWEJ (drugi etap edukacyjny)

1. **Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym.** Uczeń: zapisuje i odczytuje liczby naturalne wielocyfrowe; interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej; porównuje liczby naturalne; zaokrągla liczby naturalne; liczby w zakresie do 3 000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim.

2. **Działania na liczbach naturalnych.** Uczeń: dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe, liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej; dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora; mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach); wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych; stosuje wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania; porównuje liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu; rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100; rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności; rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze; oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych; stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań; szacuje wyniki działań; znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) w sytuacjach nie trudniejszych niż typu NWD(600, 72), NWD(140, 567), NWD(10000, 48), NWD(910, 2016) oraz wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki; rozpoznaje wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone; odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać; rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10; wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby a przez liczbę b i zapisuje liczbę a w postaci $a = nb + r$.

3. **Liczby całkowite.** Uczeń: podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych; interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej; oblicza wartość bezwzględną; porównuje liczby całkowite; wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

4. **Ułamki zwykłe i dziesiętne.** Uczeń: opisuje część danej całości za pomocą ułamka; przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły; skraca i rozszerza ułamki zwykłe; sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika; przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego; zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie; zaznacza i odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej; zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych; zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1 000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie lub skracanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora); zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione wyżej w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora; zaokrągla ułamki dziesiętne; porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne); oblicza liczbę, której część jest podana (wyznacza całość, z której określono część za pomocą ułamka); wyznacza liczbę, która powstaje po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część innej liczby.

5. **Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.** Uczeń: dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane; dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszych), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych); wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne; porównuje ułamki z wykorzystaniem ich różnicy; oblicza ułamek danej liczby całkowitej; oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz

liczb mieszanych; oblicza wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań; wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora; oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych, także wymiernych ujemnych.

6. **Elementy algebry.** Uczeń: korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisuje wzór słowami; stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym, na przykład zapisuje obwód trójkąta o bokach: ; rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (przez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego);

7. **Obliczenia praktyczne.** Uczeń: interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną części danej wielkości liczbowej; w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 20%, 10%; wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach; wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach; odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną); zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr; oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość; w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.

8. **Zadania tekstowe.** Uczeń: czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe; wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania; dostrzega zależności między podanymi informacjami; dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania; do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody; weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku; układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązanym zadaniu.

KLASY VII-VIII SZKOŁY PODSTAWOWEJ (drugi etap edukacyjny)

1. **Potęgi.** Uczeń: zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim; mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich; mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach; podnosi potęgę do potęgi; odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej.

2. **Pierwiastki.** Uczeń: oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych; szacuje wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub sześciennego oraz wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki; porównuje wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajduje liczby wymierne większe lub mniejsze od takiej wartości; oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka; mnoży i dzieli pierwiastki tego samego stopnia.

3. **Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi**. Uczeń: zapisuje wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych; oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych; zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych; zapisuje rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych

4. **Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich.** Uczeń: porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym); dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych; mnoży sumy algebraiczne przez jednomian i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany; mnoży dwumian przez dwumian, dokonując redukcji wyrazów podobnych.

5. **Obliczenia procentowe.** Uczeń: przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości; oblicza liczbę a równą p procent danej liczby b; oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a; oblicza liczbę b, której p procent jest równe a; stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości.

6. **Równania z jedną niewiadomą.** Uczeń: sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą; rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych; rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi; przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych i fizycznych.

7. **Proporcjonalność prosta.** Uczeń: podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych; wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej, na przykład wartość zakupionego towaru w zależności od liczby sztuk towaru, ilość zużytego paliwa w zależności od liczby przejechanych kilometrów, liczby przeczytanych stron książki w zależności od czasu jej czytania; stosuje podział proporcjonalny.

LICEUM
(trzeci etap edukacyjny)

1. **Liczby rzeczywiste.** Uczeń: wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia; stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach; stosuje własności monotoniczności potęgowania, posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej; stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności; wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów; stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi; a w zakresie rozszerzonym dodatkowo stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

2. **Wyrażenia algebraiczne.** Uczeń: stosuje wzory skróconego mnożenia; dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych; wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej; rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu; znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych; dzieli wielomian jednej zmiennej przez dwumian; dzieli wyrażenia wymierne; dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, a ponadto na poziomie rozszerzonym: znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych; stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz współczynnika dwumianowego.

3. **Równania i nierówności.** Uczeń: przekształca równania i nierówności w sposób równoważny; interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe; rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą; rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe; rozwiązuje równania wielomianowe postaci dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania; rozwiązuje równania wymierne, a ponadto na poziomie rozszerzonym: rozwiązuje nierówności wielomianowe, rozwiązuje równania i nierówności wymierne; rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną; analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

4. **Układy równań.** Uczeń: rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych; rozwiązuje metodą podstawiania układy równań,

z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, a ponadto na poziomie rozszerzonym rozwiązuje układy równań kwadratowych pozwalające na określenie punktów wspólnych dwóch okręgów umieszczonych w układzie współrzędnych.

5. **Funkcje.** Uczeń: określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach); oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym; odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie; odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane; interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach; szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem; interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym; wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym; dokonuje podstawowych manipulacji na wykresie funkcji, posługuje się funkcją wymierną również do badania zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi, a ponadto na poziomie rozszerzonym: na podstawie wykresu funkcji rysuje wykres funkcji powstającej przez wzięcie modułu każdej wartości; posługuje się złożeniami funkcji; dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem na określonym przedziale.

6. **Ciągi.** Uczeń: oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym, a ponadto na poziomie rozszerzonym: oblicza granice ciągów, korzystając ze znanych granic podstawowych ciągów oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach; rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

7. **Trygonometria.** Uczeń: wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens; znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora; znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej; korzysta z jedynki trygonometrycznej i wzoru opisującego tangens za pomocą sinusa i cosinusa (o ile to możliwe), a ponadto na poziomie rozszerzonym: stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie; posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens; wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych; korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna omawiane są natomiast w klasie drugiej.

Warto odnotować, że od 2021 roku egzaminy: ósmoklasisty i maturalny przeprowadzane są nie na podstawie podstawy programowej, ale na podstawie tzw. wymagań egzaminacyjnych, stanowiących pewne ograniczenie podstawy [16]

[16] Przykład: `https://www.tomaszgrebski.pl/viewpage.php?page_id=1321`.

W oparciu o wytyczne umieszczone w komentarzach do podstaw programowych [17] odnotować można jakie kluczowe pojęcia i wyniki matematyczne pojawiają się w odpowiednich klasach tworząc swego rodzaju *nauczanie spiralne*. Na przykład korzystając z materiałów[18] udostępnionych przez jednego z największych wydawców podręczników udostępnionych do użytku przez MEiN widzimy, że w nauczaniu poszczególnych działów matematyki pojawiają się „motywy", rozwijane wraz ze wzrostem narzędzi i dojrzałości matematycznej języka ucznia, na przykład:

- Motyw „*podnoszenia do potęgi*". Podnoszenie liczb naturalnych do kwadratu i do potęgi trzeciej wprowadzone jest już w klasie 4 SP. Potęgowane liczb (niekoniecznie naturalnych) pojawia się jako temat nieobowiązkowy w klasie 6 SP (bez działań na potęgach), a dalej już jako standard w klasie 7 SP (wciąż mówimy tylko o wykładniku naturalnym). Pojęcie pierwiastka stopnia 2 i 3 również pojawia się w klasie 7 SP. Całkowite, wymierne, a nawet rzeczywiste potęgi liczb rzeczywistych (o ile są wykonalne) pojawiają się w klasie 1 LO/T, rzecz jasna bez dowodu istnienia.

- Motyw „*przekształceń algebraicznych*". W klasie 4 SP dzieci nie zapisują wyrażeń algebraicznych ani prostych wzorów, zarówno w kontekście zadań testowych, ani zadań związanych z zapisaniem wzoru na pole. Posługują się natomiast jednostkami. W klasie piątej pojawiają się wzory algebraiczne na pola prostych wielokątów oraz na objętości prostopadłościanu i graniastosłupa prostego. W klasie szóstej pojawiają się jednostki czasu oraz wzory z nimi związane, a także po raz pierwszy – wyrażenia algebraiczne, obliczanie ich wartości, upraszczanie, zapisywanie i rozwiązywanie prostych równań. W klasie siódmej wprowadza się działania na wyrażeniach algebraicznych. W klasie ósmej rozwiązuje się trudniejsze równania, związane między innymi z proporcjami, oraz niekiedy wprowadza się najprostsze wzory skróconego mnożenia, choć formalnie są one w programie I LO. wraz z innymi metodami przekształcania wyrażeń algebraicznych. Wielomiany i funkcje wielomianowe pojawiają się w klasie II LO. Rok później omawia się przekształcanie wielomianów, a także wyrażenia, równania, nierówności i funkcje wymierne.

- Motyw „*zbiorów liczbowych*" i reprezentacji liczb w różnych postaciach. W klasie czwartej mowa jest o postaci dziesiętnej liczby naturalnej, a także o zapisie za pomocą cyfr rzymskich. Wykonuje się działania pisemne. Mowa jest również o ułamkach zwykłych i dziesiętnych. W klasie piątej otwarcie mówimy o liczbach naturalnych, cechach podzielności i rozkładzie na czynniki pierwsze. Poznajemy dokładniej działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Pojawia się również pojęcie liczby całkowitej oraz działania na liczbach całkowitych. W klasie siódmej mowa jest o liczbach wymiernych i ich rozwinięciach dziesiętnych. Mowa jest również o pierwiastkach i ich rozwinięciach. Nie pojawia się dowód niewymierności, choćby dla liczby $\sqrt{2}$. W klasie ósmej poznajemy liczbę π. W szkole podstawowej praktykuje się również reprezentowanie liczb na osi. W liceum nagle nazywa się wszystkie (znane i nieznane) liczby (na osi) rzeczywistymi, bez większego komentarza. Pojawiają się jednak dowody niewymierności, a niekiedy nawet nowe przykłady liczb niewymiernych.

- Motyw „*podzielności*". Pojęcie reszty z dzielenia pojawia się już w klasie 4 SP. Rozkład na czynniki pierwsze omawiany jest w klasie piątej. Wtedy pojawia się też pojęcie NWD i NWW. To też czas omawiania prostych cech z dzielenia. Jakiekolwiek rozumowania prowadzone są dzięki metodom licealnym: głównie w oparciu o wzory skróconego mnożenia i manipulacje na wielomianach. Nie ma w programie zasady indukcji, o czym powiemy dalej. O rachunku na resztach mówi się w stopniu bardzo ograniczonym, nie ma oczywiście mowy o kongruencjach. Na egzaminie maturalnym na poziomie rozszerzonym zdarzają się zadania z podzielności.

---

[17] https://www.ore.edu.pl/wp-content/uploads/2017/05/matematyka.-pp-z-komentarzem.-szkola-podstawowa-1.pdf, https://www.ore.edu.pl/wp-content/plugins/download-attachments/includes/download.php?id=23137.

[18] Podręczniki w formie flipbooków:

- klasa 4: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2744,
- klasa 5: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2450,
- klasa 6: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2546,
- klasa 7: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2770,
- klasa 8: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2444,
- klasa I LO: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2526,
- klasa II LO: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2778,
- klasa III LO: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2128,
- klasa IV LO: https://flipbook.apps.gwo.pl/display/2989.