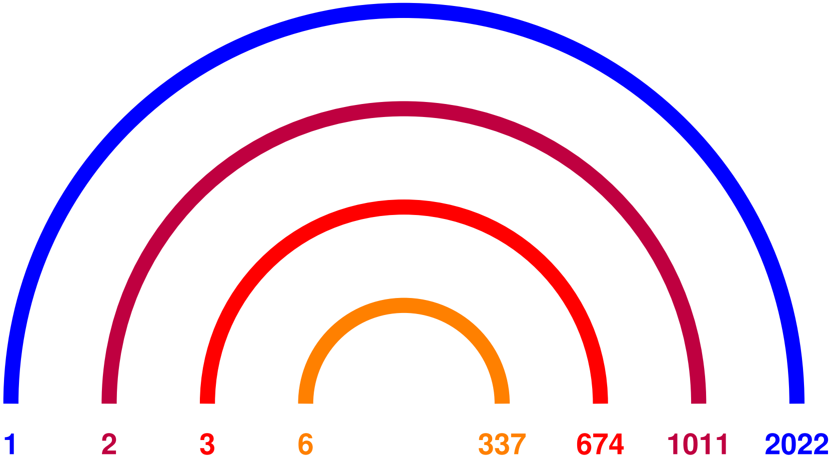

DZIELNIKI MAŁE I DUŻE

Definicja dzielnika

Liczba całkowita d jest **dzielnikiem** liczby całkowitej n, jeśli istnieje liczba całkowita m taka, że:

$$n = m \cdot d.$$

Oznaczenie: $d \mid n$.

Umowa:

- liczba — liczba całkowita dodatnia,
- dzielnik — dzielnik dodatni.

Zadanie 1. Znajdź liczbę n o dokładnie czterech dzielnikach, wśród których jest liczba 49.

Zadanie 1. Znajdź liczbę n o dokładnie czterech dzielnikach, wśród których jest liczba 49.

1			n

- 1 jest najmniejszym dzielnikiem, zaś n jest największym dzielnikiem.

Zadanie 1. Znajdź liczbę n o dokładnie czterech dzielnikach, wśród których jest liczba 49.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{} \qquad \boxed{} \qquad \boxed{n}$$

- 1 jest najmniejszym dzielnikiem, zaś n jest największym dzielnikiem.
- Skoro $49 \mid n$, to $7 \mid n$. Gdzie umieścić 7?

Zadanie 1. Znajdź liczbę n o dokładnie czterech dzielnikach, wśród których jest liczba 49.

1	7	49	n

- 1 jest najmniejszym dzielnikiem, zaś n jest największym dzielnikiem.
- Skoro $49 \mid n$, to $7 \mid n$. Gdzie umieścić 7?
- Liczba 49 ma trzy dzielniki, więc $n > 49$.

Zadanie 1. Znajdź liczbę n o dokładnie czterech dzielnikach, wśród których jest liczba 49.

1	7	49	343

- 1 jest najmniejszym dzielnikiem, zaś n jest największym dzielnikiem.
- Skoro $49 \mid n$, to $7 \mid n$. Gdzie umieścić 7?
- Liczba 49 ma trzy dzielniki, więc $n > 49$.
- Zatem $n = 7 \cdot 49 = \frac{n}{49} \cdot \frac{n}{7} = 343$.

Dzielnik dzielnika jest dzielnikiem.

Dla dowolnych liczb a, b, c warunki
$a \mid b$ oraz $b \mid c$ **implikują** $a \mid c$.

Prawie każdy dzielnik ma parę.

Dla liczb n, d **równoważne** są warunki
$d \mid n$ oraz $\frac{n}{d} \mid n$.

Zadanie 2. Znajdź liczbę n podzielną przez 5 i mającą dokładnie pięć dzielników.

Zadanie 2. Znajdź liczbę n podzielną przez 5 i mającą dokładnie pięć dzielników.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{} \qquad \boxed{\sqrt{n}} \qquad \boxed{} \qquad \boxed{n}$$

- Środkowy dzielnik równy jest $\sqrt{n}$. Zatem liczba n jest kwadratem.

Zadanie 2. Znajdź liczbę n podzielną przez 5 i mającą dokładnie pięć dzielników.

1	5	$\sqrt{n}$		n

- Środkowy dzielnik równy jest $\sqrt{n}$. Zatem liczba n jest kwadratem.
- $5 \mid n$, a skoro n jest kwadratem, to $25 \mid n$. Mamy też $25 < n$ oraz $5 < \sqrt{n}$.

Zadanie 2. Znajdź liczbę n podzielną przez 5 i mającą dokładnie pięć dzielników.

1	5	25		625

- Środkowy dzielnik równy jest $\sqrt{n}$. Zatem liczba n jest kwadratem.
- $5 \mid n$, a skoro n jest kwadratem, to $25 \mid n$. Mamy też $25 < n$ oraz $5 < \sqrt{n}$.
- $5 \cdot 25$ ma tylko 4 dzielniki, więc $\sqrt{n} = 25$. Zatem $n = 625$.

Zadanie 3. Dane są liczby a, b. Czy mogą zachodzić jednocześnie trzy warunki

- a ma 99 dzielników,
- b ma 101 dzielników,
- $a \cdot b$ ma 150 dzielników?

Zadanie 3. Dane są liczby a, b. Czy mogą zachodzić jednocześnie trzy warunki

- a ma 99 dzielników,
- b ma 101 dzielników,
- $a \cdot b$ ma 150 dzielników?

Odpowiedź. NIE, ponieważ:

- a jest kwadratem,
- b jest kwadratem,
- $a \cdot b$ jest iloczynem kwadratów, czyli jest kwadratem i ma dzielnik „bez pary".

Zadanie 4. Wypisano wszystkie dzielniki liczby n, oprócz 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{x} \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \boxed{45x} \qquad \boxed{n}$$

Zadanie 4. Wypisano wszystkie dzielniki liczby n, oprócz 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

$\boxed{1} \quad \boxed{x} \quad \cdots \quad \boxed{45x} \quad \boxed{n}$

- $45 \mid n$, więc $3 \mid n$, a stąd $x \leq 3$.

Zadanie 4. Wypisano wszystkie dzielniki liczby n, oprócz 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \cdots \quad \boxed{90} \quad \boxed{180}$$

- $45 \mid n$, więc $3 \mid n$, a stąd $x \leq 3$.
- Jeśli $x = 2$, to $n = 45x^2 = 180$.

Zadanie 4. Wypisano wszystkie dzielniki liczby n, oprócz 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\cdots$ $\boxed{135}$ $\boxed{405}$

- $45 \mid n$, więc $3 \mid n$, a stąd $x \leq 3$.
- Jeśli $x = 2$, to $n = 45x^2 = 180$.
- Jeśli $x = 3$, to $n = 45x^2 = 405$.

Zadanie 5. Liczba n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że $6 \mid n$.

$\boxed{1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \boxed{c} \quad \boxed{b} \quad \boxed{a} \quad \boxed{n}$

Zadanie 5. Liczba n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że $6 \mid n$.

$$\boxed{1} \quad \cdots \quad \boxed{c} \quad \boxed{b} \quad \boxed{a} \quad \boxed{n}$$

- Szacujemy

$$a \leq \frac{n}{2}, \quad b \leq \frac{n}{3}, \quad c \leq \frac{n}{4}.$$

Zadanie 5. Liczba n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że $6 \mid n$.

$$\boxed{1} \quad \cdots \quad \boxed{c} \quad \boxed{b} \quad \boxed{\tfrac{n}{2}} \quad \boxed{n}$$

- Szacujemy
$$a \leq \frac{n}{2}, \quad b \leq \frac{n}{3}, \quad c \leq \frac{n}{4}.$$
- Mamy $a = \frac{n}{2}$. W przeciwnym przypadku:
$$a + b + c \leq \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < n.$$

Zadanie 5. Liczba n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że $6 \mid n$.

$$\boxed{1} \quad \cdots \quad \boxed{c} \qquad \boxed{\tfrac{n}{3}} \qquad \boxed{\tfrac{n}{2}} \qquad \boxed{n}$$

- Szacujemy
$$a \leq \frac{n}{2}, \quad b \leq \frac{n}{3}, \quad c \leq \frac{n}{4}.$$

- Mamy $b = \frac{n}{3}$. W przeciwnym przypadku:
$$a + b + c \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < n.$$

Zadanie 5. Liczba n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że $6 \mid n$.

$$\boxed{1} \quad \cdots \quad \boxed{\frac{n}{6}} \quad \boxed{\frac{n}{3}} \quad \boxed{\frac{n}{2}} \quad \boxed{n}$$

- Szacujemy
$$a \leq \frac{n}{2}, \quad b \leq \frac{n}{3}, \quad c \leq \frac{n}{4}.$$
- Zatem $c = \frac{n}{6}$, czyli $6 \mid n$.

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Wykaż nierówność

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k < n^2.$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Wykaż nierówność

$$L = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k < n^2.$$

Szacujemy

$$d_k = n, \quad d_{k-1} \leq \frac{n}{2}, \quad d_{k-2} \leq \frac{n}{3}, \quad \ldots$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Dostajemy

$$L \leq \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} + \ldots + \frac{n}{k-1} \cdot \frac{n}{k}.$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Dostajemy

$$L \leq \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} + \ldots + \frac{n}{k-1} \cdot \frac{n}{k}.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby s

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Stąd

$$L \leq n^2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

czyli

$$L \leq n^2\left(1 - \frac{1}{k}\right) < n^2.$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Dla jakich n zachodzi podzielność

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k \mid n^2 \,?$$

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdots \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Dla jakich n zachodzi podzielność

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k \mid n^2 \, ?$$

- Największy dzielnik właściwy n^2 to $d_{k-1} d_k$.

Zadanie 6. Kolejne dzielniki liczby $n \geq 2$ równe są (od najmniejszego do największego)

$$\boxed{d_1} \quad \boxed{d_2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \boxed{d_{k-1}} \quad \boxed{d_k}$$

Dla jakich n zachodzi podzielność

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k \mid n^2 \, ?$$

- Największy dzielnik właściwy n^2 to $d_{k-1} d_k$.
- Zatem $k = 2$, czyli n jest liczbą pierwszą.

Wzór na liczbę dzielników

Rozłóżmy liczbę $n > 1$ na czynniki:

$$n = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{a_1 \text{ razy}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{a_2 \text{ razy}} \cdot \ldots \underbrace{p_s \cdot \ldots \cdot p_s}_{a_s \text{ razy}},$$

gdzie

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_s$$

są liczbami pierwszymi oraz $a_1, a_2, \ldots, a_s$ to pewne liczby. Liczba dzielników n to:

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_s + 1).$$

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

ma 101 dzielników?

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

ma 101 dzielników?

Wiemy, że 101 jest liczbą pierwszą.

- Czy $n!$ jest potęgą liczby pierwszej p?
- Czy $n!$ jest kwadratem liczby naturalnej?

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

ma 101 dzielników?

Wiemy, że 101 jest liczbą pierwszą.

- Czy $n!$ jest potęgą liczby pierwszej p?
- Czy $n!$ jest kwadratem liczby naturalnej?

NIE, ponieważ wszystkie dzielniki p^n są potęgami liczby p.

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

ma 101 dzielników?

Wiemy, że 101 jest liczbą pierwszą.

- Czy $n!$ jest potęgą liczby pierwszej p?
- Czy $n!$ jest kwadratem liczby naturalnej?

NIE, ponieważ wszystkie dzielniki p^n są potęgami liczby p.

NIE, ale potrzebujemy mocnego wyniku...

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

jest kwadratem?

- Żaden dzielnik pierwszy kwadratu nie może występować pojedynczo w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

jest kwadratem?

- Żaden dzielnik pierwszy kwadratu nie może występować pojedynczo w rozkładzie na czynniki pierwsze.
- Dzielnik pierwszy p liczby $n!$ to jedna z liczb od 1 do n,

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

jest kwadratem?

- Żaden dzielnik pierwszy kwadratu nie może występować pojedynczo w rozkładzie na czynniki pierwsze.
- Dzielnik pierwszy p liczby $n!$ to jedna z liczb od 1 do n,
- przy czym jeśli $p^2 \mid n!$, to także $2p$ jest jedną z liczb do 1 do n.

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

jest kwadratem?

Twierdzenie Czebyszewa

Dla każdej liczby $n \geq 4$ istnieje taka liczba pierwsza p, że:

$$\frac{n}{2} < p < n.$$

Zadanie 7. Czy istnieje taka liczba $n > 1$, że

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

jest kwadratem?

Twierdzenie Czebyszewa

Dla każdej liczby $n \geq 4$ istnieje taka liczba pierwsza p, że:

$$\frac{n}{2} < p < n.$$

Stąd $2p > n$, czyli $n!$ nie jest kwadratem (sprawdź osobno $n = 2, 3$).

Twierdzenie Erdősa-Selfridge'a

Iloczyn co najmniej dwóch kolejnych liczb

$$(n+1)(n+2)\dots(n+k)$$

nie jest kwadratem, sześcianem, ani żadną wyższą potęgą żadnej liczby.

Twierdzenie Erdősa-Selfridge'a

Iloczyn co najmniej dwóch kolejnych liczb

$$(n+1)(n+2)\dots(n+k)$$

nie jest kwadratem, sześcianem, ani żadną wyższą potęgą żadnej liczby.

Problem Legendre'a

Czy dla każdej liczby $n \geq 1$ pomiędzy n^2 oraz $(n+1)^2$ znajduje się liczba pierwsza?