

Wstęp do rozumowań — zadania warsztatowe

Zadanie 1. Udowodnij, że w gronie 6 osób albo pewne 3 osoby się znają, albo pewne 3 się nie znają.

Zadanie 2. W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.

Zadanie 3. Udowodnij, że w grupie 2024 osób przynajmniej 2 osoby mają taką samą liczbę znajomych (osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy osoba B zna osobę A).

Zadanie 4. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 100\}$ wybieramy takie 51 liczb, że suma żadnych dwóch z nich nie jest równa 100. Pokazać, że zbiór ten zawiera kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 5. Udowodnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie 2, których suma lub różnica dzieli się przez 10.

Zadanie 6. Niech dany będzie zbiór 2024 liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$. Wykaż, że istnieje w nim taki podzbiór, że suma wszystkich jego elementów jest podzielna przez 2011.

Zadanie 7. W pewnej grupie co najmniej jedna para osób to znajomi oraz żadne dwie osoby o tej samej liczbie znajomych nie mają wspólnych znajomych. Wykaż, że pewna osoba w tej grupie ma dokładnie jednego znajomego.

Zadanie 8. Na płaszczyźnie pokolorowano skończenie wiele punktów: część na białą, a część na czarno, przy czym wiadomo, że każdy odcinek łączący dwa punkty tego samego koloru zawiera punkt innego koloru. Pokazać, że wszystkie pokolorowane punkty leżą na jednej prostej.

Zadanie 9. Królowa Śnieżka rozdzieliła 3 litry mleka pomiędzy siedem kubków należących do siedmiu krasnoludków. Następnie pierwszy z krasnoludków rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki (sobie nic nie zostawił). Następnie drugi krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki, a za nim robiły to kolejne krasnoludki. Gdy ostatni, siódmy krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka pomiędzy pozostałych okazało się, że w kubku każdego z krasnoludków jest dokładnie tyle samo mleka, co na początku – gdy otrzymał je od Królowy Śnieżki. W jaki sposób Królowa rozdzieliła mleko między krasnoludki?

Zadanie 10. Znajdź wszystkie dodatnie rozwiązania układu równań:

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

Zadanie 11. Wykaż, że nie istnieje partkietaż płaszczyzny za pomocą nieskończenie wielu kwadratów 1×1 i skończenie wielu trójkątów równobocznych o boku 1.

Zadanie 12. Udowodnij, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 można zmieścić w prostokącie o polu nie większym od 2.

Zadanie 13. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Na płaszczyźnie dane jest n punktów niebieskich oraz n punktów czerwonych, przy czym żadne trzy z tych $2n$ punktów nie są współliniowe. Wykaż, że można dobrać połączyć niebieskie i czerwone punkty w pary za pomocą odcinków w taki sposób, by odcinki te się nie przecinały.

Zadanie 14. Na bankiecie, po turnieju pojedynków rycerskich, na którym każdy z $n > 3$ rycerzy pojedynkował się z każdym innym i nie było remisów, pewna grupa rycerzy (przynajmniej trzech) usiadła przy okrągłym stole. Okazało się, że każdy z nich przegrał z rycerzem siedzącym po swojej prawej stronie, zaś wygrał z rycerzem siedzącym po swojej lewej stronie. Wykaż, że istnieje takich trzech rycerzy A, B, C , że A wygrał z B , B z C i C wygrał z A .

Zadania rozwiązywać należy najpierw samodzielnie lub w małej grupie. Można po pewnym czasie podejść do prowadzącego po podpowiedź lub po to, żeby zaprezentować mu pomysł rozwiązania.

Wstęp do rozumowań — zadania trudniejsze

Zadanie 15. Udowodnij, że w każdym skończonym ciągu kolejnych liczb naturalnych istnieje liczba, która jest podzielna przez pewną taką potęgę liczby 2, przez którą nie jest podzielna żadna inna liczba tego ciągu.

Zadanie 16. Na każdym z 256 pól szachownicy 16×16 wpisano jedną z liczb $1, 2, \dots, 256$ (w każdym polu wpisano inną liczbę). Udowodnij, że istnieją dwa sąsiadujące ze sobą (wystarczy wspólny wierzchołek) pola szachownicy, które zawierają liczby o różnicy równej co najmniej 17.

Zadanie 17. Dane są liczby rzeczywiste $x_1, \dots, x_n$, przy czym suma iloczynów wszystkich możliwych par dwóch różnych elementów tego zbioru jest równa 1. Wykaż, że można z tego zbioru wykreślić jedną liczbę tak, by suma pozostałych była mniejsza niż $\sqrt{2}$.

Zadanie 18. Wykaż, że jeżeli iloczyn dodatnich $a_1, \dots, a_n$ wynosi 1, to $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Zadanie 19. Dwóch graczy na plaży gra w następującą grę. Na plaży ustawiono w rzędzie skończenie wiele wiader, z których każde zawiera pewną liczbę ryb. Dane jest też bardzo duże dodatkowe skupisko ryb, z którego można je w sposób nieograniczony pobierać. Gra odbywa się w turach, naprzemiennie wykonywanych przez graczy. Każdy z nich w swojej turze zabiera rybę z jednego wiadra i dokładnie (ze skupiska) ryby do wiader znajdujących się na lewo od wiadra, z którego wyjął rybę – dokładnie tyle ryb ile chce do każdego wiadra (może nic nie dodać). Wygrywa ten, kto wyjmie ostatnią rybę z wiadra tak, że wszystkie pozostaną puste. Wykaż, że niezależnie od przebiegu każda taka gra koczy się w skończenie wielu ruchach.

Zadanie 20. Przy drodze w kształcie okręgu rozmieszczone są stacje benzynowe. W stacjach znajduje się benzyna w ilości wystarczającej (łącznie) do przejechania całej drogi. Udowodnij, że kierowca może tak wybrać stację, z której rozpocznie podróż, by przejechać całą drogę jadąc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli bak jego pojazdu może zawsze pomieścić całe paliwo, które znajduje się na stacji, do której podjechał.