

Geometria z Algebrą Liniową I - poglądowe notatki i dygresje

Arkadiusz Męcel

rok akademicki 2021/2022

Wprowadzenie

Wykład GAL I poświęcony jest rozwiązywaniu układów równań liniowych nad ciałem. Omówiona będzie definicja ciała i jego podstawowe własności. Skupimy się na badaniu ciała liczb rzeczywistych i zespolonych. Pokażemy jak opisywać zbiory rozwiązań wprowadzając na nich strukturę przestrzeni liniowej. Podstawowym narzędziem będą macierze opisujące zarówno układy równań jak i przekształcenia liniowe.

Powyższe streszczenie wykładu zaczerpnięte z wydziałowego sylabusu należy uzupełnić bardziej pogłębionym wyjaśnieniem nawiązującym do nazwy przedmiotu, który zamierzamy studiować. Co rozumieć będziemy przez algebrę, a co przez geometrię? Co oznacza pojęcie algebry „liniowej”? Czy odnosić się będziemy do treści szkolnych? Na czym polegać będzie nowość ujęcia, które zaprezentujemy? W jaki sposób przedmiot ów wprowadzi nas w studiowanie matematyki? Pełne odpowiedzi na te pytania przekraczają ramy tego wprowadzenia. Możemy jednak poczynić kilka pożytecznych, być może, uwag.

Z perspektywy absolwenta szkoły przedmiot nasz wydawać się może uogólnieniem geometrii analitycznej (pod podobną nazwą wykładany był zresztą – przy nieco innym rozkładzie akcentów – w latach powojennych). Będziemy mówić o obiektach geometrycznych opisywanych przy pomocy warunków algebraicznych. Będą to początkowo rozwiązania układów równań liniowych. Weźmy, nawiązując do wiedzy szkolnej, problem określenia wzajemnego położenia dwóch prostych leżących na płaszczyźnie kartezjańskiej, na podstawie opisujących ich równań (np. w postaci ogólnej). Trzy możliwe konfiguracje to:

- para prostych przecina się w dokładnie jednym punkcie,
- para prostych równoległych,
- para prostych tożsamy (ta sama prosta może być opisana przez różne równania!).

Sytuacjom tym odpowiada interpretacja algebraiczna:

- układ równań ułożony z równań opisujących poszczególne proste ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- układ równań ułożony z równań opisujących poszczególne proste nie ma rozwiązań,
- układ równań ułożony z równań opisujących poszczególne proste ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Podczas zajęć szybko zrozumiemy, że przedstawiona wyżej odpowiedniość jest w istocie swego rodzaju utożsamieniem rzeczywistości algebraicznej i geometrycznej. Wspólną płaszczyzną pojęciową dla tego utożsamienia będzie pojęcie przestrzeni liniowej. Samo zaś utożsamienie dokonane zostanie przy pomocy aparatu pojęciowego związanego z operacjami na przestrzeniach liniowych. Co więcej, przestrzenie liniowe są pojęciem tak ogólnym i wygodnym w użyciu, że pozwolą na dostrzeganie innych, mniej oczywistych powiązań pomiędzy różnymi działami matematyki. Ciekawe co Czytelnik powiedziałby słysząc, że w odpowiednio dobranym kontekście funkcja sinus może być prostopadłą do funkcji cosinus (a nawet i do samej siebie!) albo, że liniowo niezależne – cokolwiek to znaczy – są przy odpowiednich definicjach dwa podzbiory jego znajomych. Innymi słowy, chodzić nam będzie nie tylko o rozwiązywanie układów równań, ale o umiejętność widzenia „struktury” tych rozwiązań w szerszym kontekście. Tym, co charakteryzuje naukowe podejście do uprawiania matematyki jest w tym kontekście nie tylko dążenie do znalezienia ogólnej struktury, ale też próba opisu „wszystkich możliwych struktur” z dokładnością do pewnych warunków. Przykład tego rodzaju opisu widzimy wyżej: układ dwóch prostych na płaszczyźnie prowadzić może tylko do trzech na swój sposób istotnie różnych konfiguracji. W języku algebry liniowej niezmiennikiem takich „istotnie różnych” konfiguracji będzie m.in. pojęcie wymiaru przestrzeni.

Podejście, o którym tu piszemy nazwać można podejściem klasycznym. Badamy grupę obiektów i próbujemy znaleźć cechy charakterystyczne, które by je odróżniały (na przykład odróżniliśmy rodziny par prostych na płaszczyźnie poprzez opis możliwej liczby ich punktów przecięcia). W kontekście geometrii analitycznej ojcem tego podejścia był R. Descartes (Kartezjusz), stąd też często (w szkole?) mówimy o kartezjańskim układzie współrzędnych. Podejście to bardzo rozwinęło badania geometryczne (do tej pory rozumiane głównie w stylu starożytnych „Elementów” Euklidesa – który to znany jest absolwentowi szkoły i nazywany jest mianem geometrii elementarnej) najpierw poprzez odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego przez Newtona i Leibniza, które doprowadziło do powstania geometrii różniczkowej, potem przez prace dotyczące współrzędnych jednorodnych (tzw. współrzędne barycentryczne) poczynione na początku XIX wieku przez Möbiusa i Plückera, następnie przez rozwój geometrii rzutowej dzięki pracom francuza Ponceleta i wreszcie przez prace Łobaczewskiego i Bolyai, którzy „odkryli” geometrie nieeuklidesowe. Narodziny dziedziny, którą będziemy się zajmować przypisuje się różnym uczonym, zwłaszcza jednak nauczycielowi gimnazjalnemu H. Grassmanowi (prace z roku 1884). Był to czas rozwoju podejścia aksjomatycznego do geometrii, które w tej i innych dziedzinach zrewolucjonizowało w XX wieku Królową Nauk. Jest ono podstawą wykładu uniwersyteckiego matematyki i wszelkich współczesnych badań. Pamiętajmy jednak, że przy całej abstrakcji jaka towarzyszy wykładowi geometrii z algebrą liniową, mowa jest wciąż o geometrii, a więc w najszerszym sensie w jakim rozumiemy to pojęcie – nauce o przestrzeni i jej własnościach. Zarówno wysiłki Kartezjusza, jak i Ponceleta, Łobaczewskiego, Riemanna, Kleina, Hilberta, Minkowskiego czy wielkich geometrów XX wieku miały w sobie zawsze silne pragnienie zrozumienia świata, w którym żyjemy i budowania przekonujących modeli matematycznych dla opisu jego działania. Zetknijmy się z tym trudnym zjawiskiem w drugim semestrze mówiąc o przestrzeniach afinicznych.

Prawdziwą rewolucją w myśleniu (bardzo charakterystyczną dla współczesnej matematyki) jest próba opisu obiektów nie w języku ich wewnętrznej struktury, ale w języku operacji, które na nich wykonujemy. Dla przykładu: kwadrat i okrąg odróżnić można w sposób „klasyczny” mówiąc dość nieprecyzyjnie (jakkolwiek byśmy nie lubili postulatów Euklidesa) o kątach czy wierzchołkach, lub bardziej formalnie: podając równania je opisujące (i tłumacząc kiedy równania opisują obiekty różne – i co to znaczy), ale można je także odróżnić bardzo elegancko poprzez obserwację, że tylko skończenie wiele izometrii płaszczyzny (na przykład obrotów) w siebie pozostawia kwadrat w miejscu, podczas gdy okrąg „jest niezmienniczy” (znowu ważne pojęcie) przy działaniu nieskończenie wielu różnych izometrii. To nowe podejście do matematyki polegające na badaniu obiektów przez „niezmienniki operacji” pochodzi, w kontekście geometrii układów równań i ich przekształceń od matematyków angielskich A. Cayleya, J.J. Sylwestera i G. Salmona. Do ustalenia głębszych związków pomiędzy teorią przekształceń a geometrią przyczynił się tzw. program z Erlangen słynnego matematyka niemieckiego Felixa Kleina sformułowany w 1872 roku.

Nasze podejście pójdzie jednak jeszcze dalej. W powojennej matematyce rewolucji dokonały prace warszawskiego matematyka Samuela Eilenberga i cały ruch nazwany później „New Math” reprezentowany przez środowisko francuskich badaczy, zwanych bourbakistami, którzy zaproponowali jeszcze ogólniejsze pojmowanie matematyki w języku diagramów. Teoria ta, zwaną teorią kategorii, jest obecnie językiem urzędowym całej algebraiczno-geometrycznej strony matematyki. Jednym z zaskakujących przejawów tego podejścia, które zobaczymy na naszym przedmiocie jedynie w załączku, jest istnienie **naturalnych** odpowiedniości, które zamazują rozróżnienie pomiędzy obiektami, a działającymi na nich przekształceniami. W języku matematycznym odpowiedniości takie nazywamy dualnościami. Dla przykładu: obiektom geometrycznym przypiszeny ich przekształcenia, i odwrotnie. Na jednych i drugich wprowadzimy te same operacje. Okaze się, że matematycznie nie ma sensu ich rozróżnianie! W dostrzeżeniu tych dualności podstawowym narzędziem będą niepozorne na pierwszy rzut oka tablice liczbowe zwane macierzami.

Podsumowując ten przydługi wstęp: droga od matematyki szkolnej, zajmującej się głównie rozwiązywaniem konkretnych zadań dotyczących struktury danych obiektów (np. wzajemne położenie dwóch konkretnych prostych na płaszczyźnie) do współczesnej geometrii algebraicznej czy innych dziedzin matematyki prowadzi przez trzy progi: klasyfikowanie „wszystkich konfiguracji” obiektów w języku opartym na współrzędnych, klasyfikowanie obiektów będących „niezmiennikami operacji” bez użycia współrzędnych, ustalanie „dualności” pomiędzy obiektami i operacjami na nich, także w obrębie różnych działów matematyki (ważne hasło na przyszłość dla aspirującego matematyka: **odpowiedniość Galois**). Życzę Czytelnikowi wejścia w tę przygodę z matematyczną abstrakcją dzięki algebrze liniowej z geometrią.

Cały układ merytoryczny tekstu oraz definicje i dowody twierdzeń pochodzą ze skryptu dr. Koźniewskiego, na którym bazuje wykład. Proszę o informowanie mnie o zauważonych uchybieniach w tekście.

Arkadiusz Męcel