Zasada szufladkowa Dirichleta

XV Warsztaty Matematyczne I LO im. St. Dubois w Koszalinie
Arkadiusz Męcel
27.09.2021 r.

Zadania z zajęć

1. Każdy bok pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Pokazać, że pewne trzy boki są tego samego koloru.

2. Wykazać, że z $n+1$ dowolnych liczb naturalnych można zawsze wybrać takie dwie, których róznica jest podzielna przez n.

3. Tablicę o wymiarach 3×3 podzielono na 9 prostokącików. W każdy z tych prostokącików wpisano jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Uzasadnić, że wśród ośmiu sum otrzymanych przez sumowanie liczb stojących w wierszu, w kolumnie i na każdej z głównych przekątnych, co najmniej dwie sumy będą równe.

4. Przy okrągłym stole zasiadło 100 osób i wszystkie miejsca były zajęte (miejsca są rozstawione równomiernie). Wśród tych osób jest 51 mężczyzn. Udowodnić, że istnieją dwaj mężczyźni, którzy siedzą naprzeciwko siebie.

5. Na przyjęciu znalazło się n osób. Udowodnić, że co najmniej dwie z nich mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych (zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych oraz, że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy osoba B zna osobę A).

6. Uzasadnić, że w gronie sześciu ludzi jest trzech takich, wśród których każdy zna każdego lub trzech takich, wśród których żadni dwaj się nie znają.

7. W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.

8. Uwododnij, że wśród dowolnych 7 różnych liczb całkowitych muszą być takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 10.

9. Wykazać, że wśród dowolnych $n+1$ liczb naturalnych nie większych niż $2n$ istnieją takie, że jedna z nich jest dzielnikiem drugiej.

Zadania trudniejsze (do samodzielnego przemyślenia)

1. Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości n umieścimy n^2+1 punktów, to odległość pewnych dwóch spośród nich nie przekracza 1.

2. Zbiór liczb całkowitych od 1 do 16 podzielono na trzy podzbiory. Udowodnij, że jeden z tych podzbiorów zawiera trójkę liczby x, y, z takich, że $x + y = z$.

3. Wykazać, że istnieje taka potęga liczby 3, która w zapisie dziesiętnym ma trzy ostatnie cyfry tworzące układ 001.

4. W tabeli o 41 wierszach i 5 kolumnach rozmieszczono 41×5 liczb równych $+1$ lub -1. Pokaż, że można tak wybrać trzy wiersze i trzy kolumny tabeli, by wszystkie liczby stojące na przecięciach tych wierszy i kolumn były identyczne.

5. Udowodnij, że parzystokąt wypukły posiada przekątną, która nie jest równoległa do żadnego z boków.

6. W 21-kącie narysowano wszystkie przekątne. Udowodnić, że istnieją dwie przekątne, między którymi kąt ostry jest mniejszy niż 1°.