IV WYZNACZNIK

§ 1. Wyznacznik a operacje elementarne.

1. Własności charakteryzujące wyznacznik i ich pierwsze konsekwencje.

Niech dane będą ciało $\mathbb{F}$ i liczba naturalna k; gdy nie zaznaczono inaczej, rozważane w tym paragrafie macierze są rozmiaru $k \times k$ i mają wyrazy w $\mathbb{F}$. Naszym najbliższym celem jest udowodnienie poniższego twierdzenia i ustalenie pewnych jego konsekwencji:

Twierdzenie 1 (o istnieniu i charakteryzacji wyznacznika, wersja pierwsza)**.** *Istnieje jedyna funkcja* $\det : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$ *o następujących własnościach:*

i) $\det(\mathbf{I}) = 1$*;*

ii) jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *do dowolnego wiersza dodamy inny jej wiersz, pomnożony przez skalar, to otrzymamy macierz* $\mathbf{B}$ *dla której* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$*;*

iii) jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *dowolny wiersz pomnożymy przez skalar* c*, to otrzymamy macierz* $\mathbf{B}$*, dla której* $\det(\mathbf{B}) = c \cdot \det(\mathbf{A})$.

Funkcję tę nazywać będziemy **wyznacznikiem** (po angielsku: „determinant"); skalar $\det(\mathbf{A})$ oznaczany też będzie przez $|\mathbf{A}|$. Wyznacznik odgrywa niezmiernie ważną rolę w algebrze liniowej i geometrii: umożliwia podanie wzorów na rozwiązania pewnych układów równań, odwrotność macierzy, objętość wielowymiarowych wielościanów, iloczyn wektorowy; przy jego pomocy ustalać można równania i znajdować wielomiany dające podstawowe informacje o rozważanych obiektach algebraicznych (np. macierzach) bądź geometrycznych. (Nie wyczerpuje to wszystkich zastosowań, a tylko daje pewien przegląd tych, które są dyskutowane dalej.)

Warunki *ii)* oraz *iii)* traktowane są jako implikacje, tzn. zakładamy, że są spełnione dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i każdego skalara; nie odnotowujemy jednak kwantyfikatorów w tych i dalszych podobnych warunkach, by uczynić je zwięźlejszymi. Jednoznaczność wyznacznika, którą udowodnimy w pierwszej kolejności, należy rozumieć tak, że jeśli funkcja $\mathrm{d} : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathbb{F}$ spełnia warunki $i) - iii)$ przy det zastąpionym przez d, to $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Zadanie 1. Niech funkcja d spełnia warunek *iii)*.

a) Gdy pewien wiersz macierzy $\mathbf{A}$ jest zerowy, to $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = 0$.

b) Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalna i $\mathrm{d}(\mathbf{I}) = 1$, to $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{k} a_{ii}$.

Dowód jednoznaczności wyznacznika. Ustalmy funkcje det i d spełniające żądane warunki i niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. Doprowadźmy macierz $\mathbf{A}$ do postaci zredukowanej $\mathbf{N}$ ciągiem wierszowych operacji elementarnych typu (I) i (II) (patrz lematy 1 i 2 w §II.1.2). Niech będzie to ciąg $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \to ... \to \mathbf{A}_s = \mathbf{N}$. Wobec własności (ii) oraz (iii), dla każdego $i = 2, ..., s$ istnieje skalar $c_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ taki, że

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}_i) = c_i \cdot \ \mathrm{d}(\mathbf{A}_{i-1}) \ \text{ oraz } \ \det(\mathbf{A}_i) = c_i \cdot \det(\mathbf{A}_{i-1}).$$

Stąd przy $c := 1/\prod_i c_i$ zachodzi $c \neq 0$ i

$$\mathrm{d}(\mathbf{A}) = c \cdot \ \mathrm{d}(\mathbf{N}) \ \text{ oraz } \det(\mathbf{A}) = c \cdot \det(\mathbf{N})$$

Są tylko dwie możliwości: albo pewien wiersz macierzy $\mathbf{N}$ jest zerowy, i wtedy $\mathrm{d}(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N}) = 0$ na mocy zadania 1, albo $\mathbf{N} = \mathbf{I}$, i wtedy $\mathrm{d}(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N}) = 1$ na mocy własności (i). Zatem zawsze $\mathrm{d}(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{N})$ i stąd $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$. □

Wykazaliśmy jedyność funkcji spełniającej żądane warunki; nie dowiedliśmy jednak jej istnienia. Uczynimy to dopiero w §2, a wpierw ustalimy pewne konsekwencje własności i), ii) oraz iii). Do §2.2 zakładamy, że funkcja det istnieje.

Wniosek 1. *Jeśli funkcja* $d : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$ *spełnia warunki ii) oraz iii) (lecz niekoniecznie i)), to jest proporcjonalna do wyznacznika, tzn.* $d(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot d(\mathbf{I})$ *dla* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Dowód. Przy poprzednich oznaczeniach, $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 0$ gdy $\mathbf{N} \neq \mathbf{I}$, a w przeciwnym razie $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = c \cdot \mathrm{d}(\mathbf{I})$ i $\det(\mathbf{A}) = c$. Stąd $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\, \mathrm{d}(\mathbf{I})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Ponadto, prawdziwe są następujące ważne twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Macierz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *jest osobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Dowód. Jak wykazaliśmy, $(\det(\mathbf{A}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{N} \neq \mathbf{I})$, gdzie $\mathbf{N}$ jest postacią zredukowaną macierzy $\mathbf{A}$.

Twierdzenie 3 (Cauchy'ego)**.** $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ *dla* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Dowód. Ustalmy $\mathbf{B}$ i niech $\mathrm{d}(\mathbf{A}) := \det(\mathbf{AB})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. Wówczas $\mathrm{d}(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B})$, więc na mocy wniosku 1 pozostaje dowieść, że funkcja d ma własności ii) oraz iii).

Jednak gdy wykonanie danej wierszowej operacji prowadzi od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{A}'$, to prowadzi też od $\mathbf{AB}$ do $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ – bo dla dowolnej macierzy $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_k$ prowadzi od $\mathbf{X}$ do $\mathbf{EX}$, gdzie $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_k$ nie zależy od $\mathbf{X}$, zaś $\mathbf{E}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{EA})\mathbf{B} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$. (Patrz §II.4.3.) Powoduje to, że gdy operacja jest typu (I), to $\mathrm{d}(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB}) = \mathrm{d}(\mathbf{A})$, a gdy jest pomnożeniem pewnego wiersza przez c, to w ten sam sposób $\mathrm{d}(\mathbf{A}') = c \cdot \mathrm{d}(\mathbf{A})$.

Wniosek 2. *Gdy* $\mathbf{A}$ *jest macierzą nieosobliwą, to* $\det(\mathbf{A}^{-1}) \det(\mathbf{A}) = 1$. □

Zakończmy ten punkt dowodząc dalszych dwóch własności wyznacznika.

Stwierdzenie 1. *Funkcja* det *ma też następujące własności:*

iv) jeśli w macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *zamienimy miejscami dwa wiersze, to otrzymamy macierz* $\mathbf{B}$*, dla której* $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$*;*

v) jeśli macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *ma dwa wiersze takie same, to* $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Dowód. Ad *iv*). Załóżmy dla prostoty, że zamieniane są wiersze o numerach 1 i 2. Ciąg operacji $\mathbf{A} \xrightarrow{[1]+[2]} \mathbf{A_1} \xrightarrow{[2]-[1]} \mathbf{A}_2 \xrightarrow{[1]+[2]} \mathbf{A}_3$ prowadzi od $\mathbf{A}$ do macierzy różniącej się od $\mathbf{B}$ tylko znakiem drugiego wiersza. Z własności *ii*) oraz *iii*) wynika więc, że $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_3) = -\det(\mathbf{B})$.

Ad *v*). Odejmijmy jeden z rozważanych wierszy od drugiego; otrzymamy macierz $\mathbf{A}'$ o wierszu zerowym. Stąd $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}') = 0$ na mocy zadania 1 i własności *ii*). □

Zadanie 2. a) Wykonując kilkukrotnie operację dodawania do wiersza krotności innego, uzyskać zmianę znaku dwóch wierszy rozważanej macierzy.

b) Czy można w ten sposób zamienić miejscami dwa wiersze macierzy jednostkowej? Zmienić znak jednego jej wiersza? (Odpowiedź zależy od tego, czy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} = \mathbf{0}_{\mathbb{F}}$.)

2. Wyznacznik macierzy trójkątnej lub transponowanej.

Twierdzenie 1. *Wyznacznik trójkątnej macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *jest równy* $\prod_{i=1}^k a_{ii}$.

Dowód. Wobec zadania 1 z p.1 wystarcza macierz $\mathbf{A}$ przeprowadzić operacjami wierszowymi typu (I) w taką, która ma niezmienioną przekątną i jest diagonalna lub ma pewien wiersz zerowy. Wykorzystamy do tego indukcję względem k. Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest dolnie trójkątna, to dla $a_{11} = 0$ nie ma czego dowodzić, a dla $a_{11} \neq 0$ odejmujemy odpowiednie wielokrotności wiersza 1 od pozostałych, uzyskując $a'_{i1} = 0$ dla $i > 1$, po czym stosujemy założenie indukcyjne do klatki powstałej z $\mathbf{A}'$ przez wykreślenie pierwszego wiersza i kolumny. Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest górnie trójkątna należy wyżej a_{11} zastąpić przez a_{kk}, a pierwszą kolumnę i wiersz przez ostatnie. □

Sprawdźmy, jak wykonanie operacji kolumnowej typu (I) wpływa na wyznacznik.

Lemat 1. *Jeśli w macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *do pewnej kolumny dodamy do inną, pomnożoną przez skalar, to otrzymamy macierz* $\mathbf{B}$*, dla której* $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.

Dowód. Mamy $\mathbf{B} = \mathbf{AE}$, gdzie $\mathbf{E}$ oznacza macierz powstałą przez wykonanie rozważanej operacji na macierzy $\mathbf{I}$. (Patrz twierdzenie 1b) w §II.4.3.) Jest widoczne, że macierz $\mathbf{E}$ jest trójkątna i ma wyłącznie jedynki na przekątnej. Stąd $\det(\mathbf{E}) = 1$ i ostatecznie $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A})$ na mocy twierdzenia Cauchy'ego. □

Twierdzenie 2. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$ *dla każdej macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$.

Dowód. Dla macierzy trójkątnej żądana równość wynika z twierdzenia 1.

W ogólnym przypadku przeprowadźmy $\mathbf{A}$ w macierz schodkową $\mathbf{B}$ przy pomocy ciągu elementarnych operacji wierszowych typu (I); odpowiadający mu ciąg operacji kolumnowych przeprowadza $\mathbf{A}^t$ w $\mathbf{B}^t$. Z własności *ii*) i lematu wynika więc, że $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ i $\det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{B}^t)$, a z powyższego przypadku szczególnego – że $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}^t)$. (Zauważmy, że macierz schodkowa jest trójkątna.) Stąd teza. □

Wyznacznik macierzy obliczyć więc można przez sprowadzenie jej operacjami wierszowymi lub kolumnowymi do postaci schodkowej.

Przykład 1. Niech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ By obliczyć $\det(\mathbf{A})$, doprowadzimy $\mathbf{A}$ do postaci schodkowej, uwzględniając przy każdej operacji własności *ii*) – *v*):

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 16,5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16,5 = 66. \qquad \square$$

Podkreślmy, że wszystkie udowodnione rezultaty mają w tej chwili jedynie warunkowy charakter: jeśli funkcja o własnościach i), ii) oraz iii) istnieje, to ma i dalsze wymienione własności, a wartość jej obliczyć można w opisany sposób. Zaradzimy tej warunkowości dopiero dowodząc istnienia wyznacznika.

Zadanie 1. Gdy klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są kwadratowe, a jedna z klatek $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ jest zerowa, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ jest równy iloczynowi $\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{Q})$. (Wskazówka: gdy $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sprowadzić klatki $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ do postaci schodkowej operacjami typu (I). Gdy $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ przejść do macierzy transponowanej.)

Zadanie uzupełniające 1. Niech funkcja $\mathrm{d} : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$ będzie **multyplikatywna** (czyli taka, że $\mathrm{d}(\mathbf{AB}) = \mathrm{d}(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}(\mathbf{B})$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$). Dowieść, że jeśli $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \prod_i a_{ii}$ dla trójkątnych macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, to $\mathrm{d} = \det$. (Wskazówka: macierze elementarne.)

Problem 1. a) Nadal, niech funkcja $\mathrm{d} : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$ będzie multyplikatywna. Dowieść istnienia takiej multyplikatywnej funkcji $\varphi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, że $\mathrm{d} = \varphi \circ \det$.

b) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dowieść, że jeśli powyższa funkcja φ jest ciągła, to jest zerowa lub dla pewnego $\alpha > 0$ jest postaci $t \mapsto |t|^\alpha$ lub $t \mapsto |t|^\alpha \mathrm{Sgn}(t)$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.3, §I.3.5, §I.3.7.

§ 2. Istnienie wyznacznika. Wyznacznik jako wieloliniowa i alternująca funkcja wierszy macierzy.

1. Dygresja o funkcjach antysymetrycznych, wieloliniowych i alternujących.

Niekiedy wygodnie będzie na det patrzeć jako na funkcję układu wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^k$, określoną tak: $\det(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) := \det(\mathbf{A})$, gdzie $\mathbf{A}$ to macierz o pierwszym wierszu $\mathbf{v}_1$, drugim $\mathbf{v}_2$, itd. Mówimy też wtedy, że wyznacznik traktujemy jako funkcję wierszy macierzy. By nazwać własności tej funkcji wprowadzimy dwie definicje.

Definicja. Niech $X^k = X \times X \times \cdots \times X$ oznacza iloczyn kartezjański k egzemplarzy pewnego zbioru X. O funkcji $f : X^k \to \mathbb{F}$ powiemy, że jest:

alternująca, jeśli $f(x_1, ..., x_k) = 0$ dla każdego ciągu $(x_1, ..., x_k) \in X^k$, mającego dwa wyrazy równe (tzn. takiego, że $x_i = x_j$ dla pewnych $i \neq j$),

antysymetryczna, jeśli $f(x_1, ..., x_k) = -f(x'_1, ..., x'_k)$ dla każdych ciągów $(x_i)_{i=1}^k, (x'_i)_{i=1}^k \in X^k$, z których jeden otrzymano przez zamianę w drugim dwóch wyrazów miejscami.

Wniosek 1. *Wyznacznik jest antysymetryczną i alternującą funkcją wierszy macierzy.*

Dowód. Mówią o tym własności (iv) i (v). $\square$

Definicja. Niech V będzie przestrzenią wektorową. Funkcję $f : V^k \to \mathbb{F}$ nazwiemy **wieloliniową** (lub: k–**liniową**, gdy zaznaczyć chcemy wartość k), jeśli jest ona liniowa względem każdego argumentu przy ustalonych pozostałych, tzn. jeśli dla $i \leq k$ i $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_k \in V$, funkcja

$$\phi(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_k) \text{ dla } \mathbf{v} \in V$$

spełnia warunek

$$\phi(\mathbf{u} + c\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{u}) + c\phi(\mathbf{w}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{u}, \mathbf{w} \in V \quad \text{i} \quad c \in \mathbb{F}.$$

Stwierdzenie 1. *Funkcja $d : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$, która spełnia warunek $d(\mathbf{I}_k) = 1$ i jest, jako funkcja wierszy macierzy, wieloliniowa i alternująca, spełnia warunki (i), (ii) oraz (iii). (Tu, $k \geq 2$.)*

Dowód. Warunek (i) założono, a (iii) wynika z wieloliniowości. By dowieść (ii) oznaczmy kolejne wiersze macierzy $\mathbf{A}$ przez $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ i niech $\mathbf{B}$ będzie macierzą otrzymaną z $\mathbf{A}$ przez dodanie c–krotności jej wiersza $\mathbf{a}_s$ do wiersza $\mathbf{a}_t$. Przyjmując dla prostoty oznaczeń $s = 1, t = 2$ uzyskujemy

$$\mathrm{d}(\mathbf{a}_1, c\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k) = c \cdot \mathrm{d}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k) + \mathrm{d}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k) = \mathrm{d}(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k),$$

co oznacza żądaną równość $\mathrm{d}(\mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{A})$. $\square$

Zadanie 1. Jeśli $1_\mathbb{F} + 1_\mathbb{F} \neq 0_\mathbb{F}$ i funkcja $f : X^k \to \mathbb{F}$ jest antysymetryczna, to jest alternująca.

Zadanie 2. By funkcja $f : X^k \to \mathbb{F}$ była antysymetryczna wystarcza, by spełniała warunek definiujący te funkcje, lecz ze słowami „dwóch wyrazów” zastąpionymi przez „kolejnych dwóch wyrazów”.

Nasz dalszy plan jest taki, by istnienia wyznacznika dowieść w oparciu o stwierdzenie 1. Najpierw jednak musimy dowieść istnienia jakiejkolwiek niezerowej funkcji antysymetrycznej k zmiennych.

Lemat 1. *Niech $X = \{1, ..., k\}$ i $u_0(x_1, ..., x_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k}(x_j - x_i)$ dla $x_1, ..., x_k \in X$. Wówczas $u_0 : X^k \to \mathbb{R}$ jest funkcją antysymetryczną.*

Dowód. Wobec zadania 2 wystarczy dowieść, że że gdy (x'_i) otrzymano z (x_i) przez zamianę x_s z x_{s+1}, to $u_0(x'_1, ..., x'_k) = -u_0(x_1, ..., x_k)$. Nietrudno jednak zauważyć, że liczba ujemnych różnic $x'_j - x'_i$ $(i < j)$ o jeden różni się od liczby takich różnic $x_j - x_i$. $\boxminus$

Wykorzystamy też to, jak permutowanie argumentów zmienia wartość funkcji antysymetrycznej.

Definicja. **Permutacją** zbioru X nazywamy każde różnowartościowe przekształcenie zbioru X na X. Zbiór wszystkich permutacji zbioru X oznaczamy przez $\mathbf{S}_X$, a gdy $X = \{1, ..., n\}$ –przez $\mathbf{S}_n$. Permutacje $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_X$ możemy składać: $(\sigma \circ \tau)(x) := \sigma(\tau(x))$ dla $x \in X$, przy czym często zamiast $\sigma \circ \tau$ piszemy $\sigma\tau$, a złożenie permutacji nazywamy ich iloczynem.

Permutację $\sigma \in \mathbf{S}_X$ nazywamy **cyklem długości** s, jeśli istnieją różne elementy $x_1, ..., x_s \in X$ takie, że σ działa następująco: $x_1 \mapsto x_2 \mapsto ... \mapsto x_s \mapsto x_1$ oraz $x \mapsto x$ dla $x \in X \setminus \{x_1, ..., x_s\}$. Piszemy wtedy $\sigma = (x_1, x_2, ..., x_s)$; gdy $s = 2$, cykl nazywamy **transpozycją**. Okazuje się, że każda permutacja skończonego zbioru jest iloczynem cykli, a cykl długości s –iloczynem $s - 1$ transpozycji.

Zadanie 3. Udowodnić to.

Twierdzenie 1. *Istnieje jedyna funkcja* $\mathrm{Sgn} : \mathbf{S}_n \to \{+, -\}$ *taka, że dla każdej permutacji* $\sigma \in \mathbf{S}_n$ *i każdej funkcji antysymetrycznej* $u : X^n \to \mathbb{F}$ *zachodzi równość*

$$u(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \mathrm{Sgn}(\sigma)u(x_1, ..., x_n) \quad \text{dla } x_1, ..., x_n \in X. \tag{1}$$

Ponadto, $\mathrm{Sgn}(\sigma) = (-1)^s$ *gdy* σ *jest złożeniem* s *transpozycji.*

Dowód. Niech permutacja $\sigma \in \mathbf{S}_n$ będzie złożeniem s transpozycji. Dla każdej antysymetrycznej funkcji $u : X^n \to \mathbb{F}$ otrzymujemy wtedy

$$u(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = (-1)^s u(x_1, ..., x_n) \quad \text{dla} \quad x_1, ..., x_n \in X. \tag{2}$$

Czynnik $(-1)^s$ po prawej stronie jest niezależny od rozważanej funkcji u; traktujemy go przy tym jako odpowiedni znak $\pm$, niezależny i od ciała $\mathbb{F}$.

Obierzmy więc za u funkcję u_0 z lematu 1. Ponieważ liczba $c = u_0(1, 2, ..., k)$ jest niezerowa, więc otrzymana równość $(-1)^s c = u_0(\sigma(1), ..., \sigma(k))$ dowodzi, że znak $(-1)^s$ zależy tylko od permutacji σ (a nie od reprezentacji σ w postaci iloczynu transpozycji). $\square$

Wniosek 2. *Gdy* $\sigma \in \mathbf{S}_n$ *jest iloczynem cykli długości* $k_1, ..., k_p$*, odpowiednio, to* $\mathrm{Sgn}(\sigma) = (-1)^{p+\Sigma_{i=1}^p k_i}$.

Dowód. σ jest złożeniem s transpozycji dla $s = \Sigma_{i=1}^p (k_i - 1)$, patrz zadanie 3.

Twierdzenie 2. $\mathrm{Sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{Sgn}(\sigma)\mathrm{Sgn}(\tau)$ *dla* $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$*, i analogicznie dla iloczynu większej liczby permutacji. W szczególności,* $\mathrm{Sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Sgn}(\sigma)$.

Dowód. Niech σ będzie złożeniem s transpozycji, a τ złożeniem t transpozycji. Wówczas $\sigma\tau$ jest złożeniem $s + t$ transpozycji, skąd $\mathrm{Sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = \mathrm{Sgn}(\sigma)\mathrm{Sgn}(\tau)$. Dla $\tau := \sigma^{-1}$ daje to równość $\mathrm{Sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Sgn}(\sigma)$, bo $\mathrm{Sgn}(\sigma) = \pm 1$ i $\mathrm{Sgn}(1) = +1$. $\square$

Zadanie uzupełniające 1. Gdy wieloliniowa funkcja $f : V^k \to \mathbb{F}$ spełnia warunek $f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) = 0$ dla ciągów $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k \in V^k$ mających dwa kolejne wyrazy równe, to jest ona alternująca i antysymetryczna.

Zadanie uzupełniające 2. **Przestawieniem** dla permutacji $\sigma \in \mathbf{S}_n$ nazywamy każdą parę liczb (i, j) taką, że $1 \le i < j \le n$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$. Dowieść, że $\mathrm{Sgn}(\sigma) = (-1)^p$, gdzie p to liczba przestawień dla σ.

Zadanie uzupełniające 3. Niech permutacja $\pi \in \mathbf{S}_{k+l}$ przeprowadza liczby $1, ..., k$ odpowiednio na $l + 1, ..., l + k$, a $k + 1, ..., k + l$ na $1, ..., l$. Dowieść, że $\mathrm{Sgn}(\pi) = (-1)^{kl}$.

2. Istnienie wyznacznika i jego nowa charakteryzacja.

Przejdźmy do dowodu istnienia funkcji det z p.1.

Definicja. Dla funkcji $f : X^k \to \mathbb{F}$, gdzie X jest dowolnym zbiorem i $k \in \{2, 3..., \}$, przyjmujemy

$$\widehat{f}(x_1, ..., x_k) := \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \mathrm{Sgn}(\pi) f(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(k)}) \text{ dla } x_1, ..., x_k \in X. \tag{3}$$

Oczywiście $\widehat{f}$ jest funkcją z X^k do $\mathbb{F}$, a także $\widehat{f} = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \mathrm{Sgn}(\pi) \cdot (f \circ \widetilde{\pi})$, gdzie dla permutacji $\pi \in \mathbf{S}_k$ i $(x_1, ..., x_k) \in X^k$ przyjmujemy $\widetilde{\pi}(x_1, ..., x_k) = (x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(k)})$.

Przykład 1. Gdy $k = 2$, to $\widehat{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(x_2, x_1)$.

Zadanie 1. $\widetilde{\pi} : V^k \to V^k$ jest bijekcją i dla $\pi, \sigma \in \mathbf{S}_k$ zachodzi $\widetilde{\pi\sigma} = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\sigma}$.

Twierdzenie 1. *Wzór (3) definiuje antysymetryczą i alternującą funkcję $\widehat{f} : X^k \to \mathbb{F}$.*

Dowód. By dowieść antysymetrii zauważamy, że gdy $\sigma \in \mathbf{S}_k$, to pisząc dla krótkości ε_π w miejsce $\mathrm{Sgn}(\pi)$ mamy

$$\widehat{f} \circ \widetilde{\sigma} = \left(\sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_\pi \cdot (f \circ \widetilde{\pi}) \right) \circ \widetilde{\sigma} = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_\pi \cdot (f \circ \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\sigma}) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \varepsilon_{\sigma^{-1}} \cdot \varepsilon_{\pi\sigma} \cdot (f \circ \widetilde{\pi\sigma})$$

Korzystając z zadania 1 i zastępując $\pi \circ \sigma$ przez τ pod znakiem sumy stwierdzamy, że $\widehat{f} \circ \widetilde{\sigma} = \varepsilon_\sigma \cdot \widehat{f}$, co oznacza antysymetrię funkcji $\widehat{f}$.

Gdy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_F$, to z antysymetrii wynika już, że funkcja $\widehat{f}$ jest alternująca; patrz zad. 1 w p.1. Dla zainteresowanych podamy dowód, słuszny w ogólnym przypadku. Niech $x = (x_i)_{i=1}^k \in V^k$ będzie ciągiem takim, że $x_s = x_t$ dla pewnych $s < t$, i niech τ oznacza transpozycję (s, t). Przy $\mathbf{S}_k^\pm$ oznaczającym zbiór permutacji odpowiedniego znaku mamy wtedy $\pi \in \mathbf{S}_k^+ \Leftrightarrow \pi \circ \tau \in \mathbf{S}_k^-$, skąd

$$\widehat{f}(x) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\widetilde{\pi}(x)) - \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\widetilde{\pi} \circ \widetilde{\tau}(x)) = \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\widetilde{\pi}(x)) - \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k^+} f(\widetilde{\pi}(x)) \quad (\text{bo } \widetilde{\tau}(x) = x).$$

Tak więc $\widehat{f}(x_1, ..., x_k) = 0$ gdy $x_s = x_t$ dla pewnych $s < t$, co kończy dowód. □

Uwaga 1. Gdy $X = V$ jest przestrzenią liniową i funkcja $f : V^k \to \mathbb{F}$ jest wieloliniowa, to i funkcja $\widehat{f} : V^k \to \mathbb{F}$ jest taka. Wynika to stąd, że jest ona kombinacją wieloliniowych funkcji $f \circ \widetilde{\pi}$.

Traktujmy teraz funkcję $\mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$, zadaną wzorem $f(\mathbf{A}) := a_{11}a_{22}...a_{kk}$, jako funkcję wierszy macierzy –a więc jako funkcję z V^k do $\mathbb{F}$, gdzie $V = \mathbb{F}^k$. Oczywiście, jest ona liniowa ze względu na każdy z wierszy, przy ustalonych pozostałych. Odpowiadająca jej funkcja $\widehat{f}$ jest zadana wzorem

$$\mathbf{A} \mapsto \sum_{\pi \in \mathbf{S}_k} \mathrm{Sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} ... a_{\pi(k)k} \text{ dla } \mathbf{A} \in \mathcal{M}_k \tag{4}$$

Na podstawie twierdzenia i uwagi, jako funkcja wierszy macierzy jest ona wieloliniowa i alternująca. Stąd i ze stwierdzenia 1 w p.1 wynika, że wzór (4) można przyjąć jako definicję wyznacznika.

Uwaga 2. Tym samym, zakończony został dowód twierdzenia 1 z p.1. Okazało się też, że prócz własności rozważanych w §1.1, wyznacznik ma następującą własność, wynikającą z jego liniowości ze względu na każdy wiersz, przy ustalonych pozostałych:

vi) jeśli, dla pewnego i, wiersz i–ty macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ jest sumą i-tych wierszy macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$, a poza tym wierszem te 3 macierze są równe, to $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}'|$.

Twierdzenie 2 (o charakteryzacji wyznacznika, wersja druga)**.** *Wyznacznik jest jedyną funkcją $\mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$, która jest unormowana (tzn. na macierzy $\mathbf{I}_k$ przyjmuje wartość 1) i jako funkcja wierszy macierzy jest wieloliniowa i alternująca.*

Równoważnie: $\det : \mathcal{M}_k \to \mathbb{F}$ *jest jedyną funkcją o własnościach* $i), iii), v), vi)$.

Dowód. Jak wykazano, wyznacznik ma wymienione własności. Te zaś implikują własności $i) - iii)$, charakteryzujące wyznacznik. (Z zadania uzupełniającego 1 w p.1 wynika, że jest tak nawet, gdy własność $v)$ osłabić, rozważając w niej tylko kolejne dwa wiersze.) □

Twierdzenie 3. *Wyznacznik zachowa własności od $i)$ do $vi)$, gdy w ich sformułowaniach wiersze zastąpić kolumnami. Obie wcześniejsze charakteryzacje wyznacznika też pozostaną wtedy prawdziwe.*

Dowód. Rozpatrzymy tylko własność $vi)$ i jej zmieniony odpowiednik, który oznaczymy przez $vi^t)$. Jeśli macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}$ pozostają ze sobą w związku opisanym w $vi^t)$, to transponując je otrzymamy macierze pozostające ze sobą w związku opisanym w $vi)$. Stąd $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}'|$ na podstawie własności $vi)$ i twierdzenia 2 w §1.2. Rozumowanie w pozostałych przypadkach jest analogiczne. ⊟

Uwaga 3. Z (4) wynika, że $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_2$ oraz

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad \text{dla} \quad \mathbf{A} \in \mathcal{M}_3.$$

Ostatni wzór można łatwo zapamiętać posługując się następującym „schematem Sarrusa" (dla oszczędzenia miejsca, wyrazy reprezentujemy przez ich wskaźniki):

$$\begin{array}{cccccc|cc}
+ & & + & & + & & & \\
 & 11 & & 12 & & 13 & 11 & 12 \\
 & 21 & & 22 & & 23 & 21 & 22 \\
 & 31 & & 32 & & 33 & 31 & 32 \\
- & & - & & - & & &
\end{array}$$

Do 3×3-macierzy dopisujemy jej dwie pierwsze kolumny i sumujemy 6 iloczynów wszystkich układów 3 wyrazów, rozmieszczonych równolegle do którejś z przekątnych; każdy iloczyn opatrzony jest zaznaczonym znakiem + lub −

Zadanie 2. Dla zespolonej macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = (a_{ij})$ przyjmijmy $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a_{ij}})$. Udowodnić, że liczby zespolone $\det(\overline{\mathbf{A}})$ i $\det(\mathbf{A})$ są wzajemnie sprzężone.

Zadania uzupełniające.

1. a) Niech funkcje $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, .., n)$, posiadające pochodne $f_j^{(0)} := f_j, f_i^{(1)}, ..., f_i^{(n-1)}$, będą liniowo zależne. Udowodnić, że wyznacznik macierzy o kolumnach $(f_1^{(j)}(t), ..., f_n^{(j)}(t))$ $(j = 0, ..., n-1)$ jest równy 0, dla każdego $t \in \mathbb{R}$. (Wyznacznik ten nazywany jest **wrońskianem** funkcji $f_1, ..., f_n$, od M. Hoehne–Wrońskiego, polskiego matematyka z połowy 19 w.)

   b) Wykorzystać to do dowodu niezależności funkcji e^x, e^{2x}, e^{3x}.

2. Gdy $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ są rzeczywistymi macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ jest równy $|\det(\mathbf{P} + \mathbf{Q}i)|^2$. (Wskazówka: przy pomocy wierszowych i kolumnowych operacji typu (I), przeprowadzić macierz $\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ w $\begin{bmatrix} \mathbf{P}+\mathbf{Q}i & \mathbf{P}i - \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$, a tę w $\begin{bmatrix} \mathbf{P}+\mathbf{Q}i & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P}-\mathbf{Q}i \end{bmatrix}$.)

3. Gdy $1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$, to twierdzenie 2 zostanie słuszne po zmianie warunku (v) na (iv); wynika to z zadania 1 w p.1.

Dla $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ podać przykład różnej od wyznacznika funkcji $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, która jest antysymetryczna, unormowana i wieloliniowa.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.2, §I.1.3.

§ 3. Rozwinięcia wyznacznika.

W dalszej części, wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ będziemy wymiennie oznaczać przez $\det(\mathbf{A})$ i $|\mathbf{A}|$.

1. Rozwinięcie Laplace'a.

Niejednokrotnie będziemy mieli do czynienie z wyznacznikami kwadratowych podmacierzy rozważanej macierzy; nazywamy je jej **minorami**. Na minor przenosimy nazwy tyczące się podmacierzy, której jest wyznacznikiem. (Mówimy więc o stopniu czy rozmiarze minora, o tym, przez jakie wiersze i kolumny jest wyznaczony, itp.) W tym punkcie ustalone będą związki pomiędzy wyznacznikiem macierzy a pewnymi jej minorami.

Definicja. Niech $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_k$. **Macierzą dopełniającą** wyrazu a_{ij} nazywamy macierz, otrzymaną z $\mathbf{A}$ przez wykreślenie i–tego wiersza i j–tej kolumny. Macierz tę oznaczamy $\mathbf{A}_{ij}$.

Twierdzenie 1 (Laplace'a). *Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ i $n = 1, ..., k$ prawdziwe są wzory:*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{n+j} a_{nj} |\mathbf{A}_{nj}| \quad \textit{oraz} \quad |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+n} a_{in} |\mathbf{A}_{in}|$$

Dowód. Druga równość wynika z pierwszej, gdy odnieść ją do macierzy $\mathbf{C} := \mathbf{A}^t$. (Jest tak, bo $c_{in} = a_{ni}$, $|\mathbf{C}_{in}| = |\mathbf{A}^t_{ni}| = |\mathbf{A}_{ni}|$ i $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|$; patrz twierdzenie 2 w §1.2.) Zajmiemy się więc tylko pierwszą równością.

Niech wpierw $n = 1$ i wiersz pierwszy ma tylko jeden wyraz niezerowy, powiedzmy s–ty. Żądana równość wtedy sprowadza się do następującej: $|\mathbf{A}| = (-1)^{1+s} a_{1s} |\mathbf{A}_{1s}|$. Gdy $s = 1$, to ta ostatnia wynika z zadania 1 w §1.2. Gdy $s > 1$, to stosujemy indukcję, zamieniając kolumnę s–tą z poprzedzającą. Otrzymamy macierz $\mathbf{A}'$ taką, że $|\mathbf{A}'| = -|\mathbf{A}|$ i $\mathbf{A}'_{1\ s-1} = \mathbf{A}_{1s}$; pozostaje więc do niej zastosować założenie indukcyjne.

Gdy zaś nadal $n = 1$, lecz pierwszy wiersz jest dowolny, to przedstawiamy go w postaci $\sum_s a_{1s}\mathbf{e}_s$ i wykorzystujemy liniowość wyznacznika względem pierwszego wiersza, przy ustalonych pozostałych. Otrzymujemy $|\mathbf{A}| = \sum_{s=1}^{k} |\mathbf{A}_s|$, gdzie macierz $\mathbf{A}_s$ powstaje z $\mathbf{A}$ przez zastąpienie jej pierwszego wiersza wierszem $a_{1s}\mathbf{e}_s$. Stosując do $\mathbf{A}_s$ udowodnioną tożsamość uzyskujemy żądaną równość $|\mathbf{A}| = \sum (-1)^{1+s} a_{1s} |\mathbf{A}_{1s}|$.

Wreszcie gdy $n > 1$, to podobnie wykorzystujemy indukcję, zamieniają wiersz n-ty z poprzedzającym i korzystając z tego, że otrzymana macierz $\mathbf{B}$ spełnia warunki $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$ oraz $\mathbf{B}_{n-1\ j} = \mathbf{A}_{n\ j}$ dla $j = 1, ..., k$. Tak więc $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}| = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+n-1} a_{in} |\mathbf{A}_{in}|$, co kończy dowód. □

Wzory powyższe nazywane są **rozwinięciami Laplace'a** wyznacznika wzdłuż n-tego wiersza (pierwszy wzór) bądź n-tej kolumny (drugi wzór).

Przykład 1. Obliczymy wyznacznik stosując rozwinięcie według pierwszego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 42 = 48.$$

Moglibyśmy zastosować rozwinięcie względem innego wiersza lub dowolnej kolumny. Wybierając kolumnę drugą otrzymujemy podobnie:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 42 = 48. \quad \square$$

W przypadku macierzy o dostatecznie regularnej budowie można wykorzystać rozwinięcie Laplace'a do uzyskania rekurencyjnych zależności pomiędzy wyznacznikami macierzy różnych stopni. Rozpatrzymy dwa przykłady.

Przykład 2. Ustalmy ciąg $x, c_1, c_2 ...$ elementów $\mathbb{F}$ i niech $\mathbf{A}_n$ oznacza $n \times n$ macierz, której pierwszym wierszem jest $x\mathbf{e}_1 + c_n\mathbf{e}_n$, drugim $-\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 + c_{n-1}\mathbf{e}_n$, trzecim $-\mathbf{e}_2 + x\mathbf{e}_3 + c_{n-2}\mathbf{e}_n$, i tak dalej aż do wiersza n–tego, którym jest $-\mathbf{e}_{n-1} + (x + c_1)\mathbf{e}_n$. N.p.:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & c_4 \\ -1 & x & 0 & c_3 \\ 0 & -1 & x & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & x + c_1 \end{pmatrix}.$$

W celu obliczenia $|\mathbf{A}_n|$ wykorzystamy rozwinięcie wzdłuż pierszego wiersza. Oznaczmy chwilowo $\mathbf{A}_n$ przez $\mathbf{B}$. Oczywiście, $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{n-1}$, zaś $\mathbf{B}_{1n}$ jest macierzą trójkątną mającą wyłącznie wyrazy -1 na przekątnej. Wobec tego

$$|\mathbf{A}_n| = x|\mathbf{A}_{n-1}| + (-1)^{n+1}c_n(-1)^{n-1} = x|\mathbf{A}_{n-1}| + c_n.$$

Stąd przez indukcję nietrudno dowieść, że $|\mathbf{A}_n| = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_{n-1}x + c_n$.

Przykład 3. Wyliczymy **wyznacznik Vandermonde'a**

$$V(x_0, ..., x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

W tym celu poczynając od przedostatniej, a kończąc na pierwszej, mnożymy każdą kolumnę przez x_0 i odejmujemy od następnej. Ponieważ żadna z tych operacji nie zmienia wartości wyznacznika, więc

$$V(x_0, ..., x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & ... & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & ... & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{pmatrix}.$$

Rozwińmy ten wyznacznik wzdłuż pierwszego wiersza, a następnie zastosujmy wielokrotnie własność *iii)* z p.1. Otrzymamy

$$V(x_0, ..., x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)x_1 & ... & (x_1 - x_0)x_1^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)x_1 & ... & (x_n - x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0)V(x_1, ..., x_n)$$

Stąd przez łatwą indukcję $V(x_0, ..., x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$. $\square$

Nierzadko podobną rekurencję można jednak uzyskać innymi metodami.

Przykład 4. * Ponownie zajmiemy się wyznacznikiem Vandermonde'a. Przy ustalonych $x_1, ..., x_n$ jest on wielomianem zmiennej x_n, stopnia n, przyjmującym wartość 0 gdy $x_n \in \{x_1, ..., x_n\}$. Stąd $V(x_0, ..., x_n) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)W_0$, gdzie W_0 nadal jest wielomianem zmiennej x_n, zależnym jednak od $x_0, ..., x_{n-1}$. (Zakładamy dla uproszczenia, że $x_i \neq x_j$ dla $i < j < n$.) Porównanie stopni obu stron pokazuje, że stopień wielomianu W_0 wynosi zero; jest on więc stałą, zależną od $x_0, ..., x_{n-1}$. Załóżmy (bo nie umiemy obecnie udowodnić), że zależność ta jest wielomianowa. Traktując wtedy x_{n-1} jako zmienną, przy ustalonych $x_0, ..., x_{n-2}, x_n$ stwierdzimy podobnie, że $W_0 = \prod_{i=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_i)W_1$, gdzie W_1 jest wielomianem zmiennych $x_0, ..., x_{n-2}$, aż dojdziemy do udowodnionego w przykładzie 3 wzoru, z dokładnością jednak do pomnożenia prawej strony przez stałą (odpowiadającą wielomianowi W_n). Stałą tą można wyznaczyć porównując n.p. współczynniki obu stron przy x_n^n, gdy obie strony traktować jako wielomiany zmiennej x_n, przy ustalonych pozostałych. W ten sposób znaleźliśmy szukany wzór, co przy rozumowaniach indukcyjnych nie zawsze jest proste.

Zadania uzupełniające. (jak przykład 4, wzorowane na anonimowych metriałach z M.I.T.)

1. Udowodnić wzór Cauchy'ego: $\det\big(1/(x_i+y_j)\big)_{i,j=1}^k = \prod_{1\le i<j\le k}(x_j-x_i)(y_j-y_i)/\prod_{1\le i\le j\le k}(x_i+y_j)$.

2. * W tym zadaniu oznaczamy przez $\mathbf{A}_{ST}$ klatkę macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$, powstałą z $\mathbf{A}$ przez wykreślenie wierszy o numerach ze zbioru S i kolumn ze zbioru T. Udowodnić za Lewisem Carollem (tym od „Alicji"), że $|\mathbf{A}||\mathbf{A}_{\{i,j\}\{i,j\}}| = |\mathbf{A}_{ii}||\mathbf{A}_{jj}| - |\mathbf{A}_{ij}||\mathbf{A}_{ji}|$.

3. * Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ będzie macierzą, której wyraz a_{ij} jest równy x_j gdy $j < i$ i y_j gdy $j \geq i$. Kierując się przykładem 4 znaleźć wzór na $\det(\mathbf{A})$ i udowodnić go indukcyjnie.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.3.4, §I.3.6.

2. Wyznacznik a układy równań liniowych i odwrotność macierzy.

Zaczniemy od przeformułowania twierdzenia 2 w §1.1:

Wniosek 1. *Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ układ jednorodny $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy ma niezerowe rozwiązanie, gdy $|\mathbf{A}| = 0$.*

Przejdźmy do niejednorodnych układów równań.

Twierdzenie 1. *Rozważmy układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Jeśli $|\mathbf{A}| \neq 0$, to układ ten posiada jedyne rozwiązanie $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, i zadane jest ono następującymi* **wzorami Cramera***:*

$$v_j = \frac{1}{|\mathbf{A}|}|\mathbf{B}_j| \qquad (j = 1, 2, ..., k), \tag{5}$$

gdzie $\mathbf{B}_j$ jest macierzą powstałą z $\mathbf{A}$ przez zastąpienie jej j-tej kolumny wektorem kolumnowym $\mathbf{b}$.

Dowód. Na mocy twierdzenia 2 w §1.1 macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, skąd rozważany układ ma jedyne rozwiązanie. Oznaczmy je przez $\mathbf{v}$, a kolumny macierzy $\mathbf{A}$ przez $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$. Równanie $x_1(v_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}) + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ma niezerowe rozwiązanie $(1, v_2, ..., v_k)$, wobec czego wyznacznik macierzy o kolumnach $v_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ jest równy 0. Z „kolumnowych" odpowiedników własności *vi)* oraz *ii)* wynika więc, że $v_1|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}_1| = 0$. Tak samo, $v_j|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}_j| = 0$ dla $j = 2, ..., k$. $\square$

Przykład 1. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwijając poniżej licznik i mianownik względem pierwszych kolumn otrzymujemy:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1}$$

Ponieważ wyznacznik macierzy rozważanego układu równań okazał się różny od zera, więc rozwiązanie (v_1, v_2, v_3) istnieje i jest jedyne, a $v_1 = 1$. (Dla układów, których macierz ma zerowy wyznacznik, zastosowanie wzorów Cramera prowadzi do nonsensownych wyrażeń o mianowniku 0. Rozwiązanie nadal może istnieć, lecz nie jest wtedy jedyne i opis zbioru rozwiązań uzyskujemy stosując metody opisane w rozdziale II.)

Twierdzenie 2. *Niech* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$. *Dla macierzy* $\mathbf{D}$, *której* (i,j)*-tym wyrazem jest* $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$ *(i oraz* j *przebiegają* $\{1,...,k\}$*), prawdziwe są równości:*

$$\mathbf{AD}^t = \mathbf{D}^t\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k.$$

W szczególności, jeśli $|\mathbf{A}| \neq 0$, *to macierz* $\mathbf{A}$ *jest odwracalna i* $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{D}^t$.

Dowód. Obliczmy (i,j)-ty wyraz macierzy $\mathbf{X} := \mathbf{AD}^t$:

$$x_{ij} = \sum_{s=1}^{k} (-1)^{j+s} a_{is} |\mathbf{A}_{js}|$$

Prawa strona jest równa rozwinięciu Laplace'a, wzdłuż j-tego wiersza, wyznacznika macierzy powstałej z $\mathbf{A}$ przez zastąpienie jej j-tego wiersza i-tym. Zatem $x_{ij} = |\mathbf{A}|$ gdy $i = j$ oraz $x_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$ (wykorzystujemy własność (v) z §1.1). To dowodzi, że $\mathbf{AD}^t = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k$, a równości $\mathbf{D}^t\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_k$ dowodzimy analogicznie. □

Istnienie i jedyność rozwiązania w twierdzeniu 1 oraz odwracalność $\mathbf{A}$ w twierdzeniu 2 były już nam znane. Nowe są jednak jawne wzory na $\mathbf{A}^{-1}$ i na rozwiązanie układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest macierzą nieosobliwą. Choć ze względu na liczbę niezbędnych obliczeń tylko dla małych lub bardzo specjalnych macierzy $\mathbf{A}$ wzory te można praktycznie wykorzystać, to jednak ich istnienie i postać mają istotne znaczenie.

Macierz $\mathbf{D}^t$ z twierdzenia 2 nazywana jest **macierzą dołączoną** macierzy $\mathbf{A}$.

Zadanie uzupełniające 1. Oznaczmy macierz $\mathbf{D}$ z twierdzenia 2 przez $\mathbf{D_A}$. Dowieść, że

a) $|\mathbf{D_A}| = |\mathbf{A}|^{k-1}$.

b) $\mathbf{D_{AB}} = \mathbf{D_A}\mathbf{D_B}$ dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 7 w §I.4.2; 6,11,16 w §I.2.3; 18,19,20 w §I.2.1.

3. * Twierdzenie Bineta–Cauchy'ego.

Ten punkt zawiera materiał uzupełniający. Dowodzone w nim uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy wykorzystamy w dalszej części tylko przy badaniu objętości w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$. Tym niemniej, jest ono ważkie, a jego dowód jest dobrym wstępem do studiowania form wieloliniowych.

Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$. Wówczas macierz $\mathbf{AB}$ jest rozmiaru $l \times l$, i celem naszym jest wyrażenie jej wyznacznika poprzez minory macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ stopnia l. Dla opisania tej zależności oznaczmy przez $\mathbf{X}_{S,T}$ podmacierz danej macierzy $\mathbf{X}$, wyznaczoną przez jej wiersze o numerach ze zbioru S i kolumny o numerach ze zbioru T, przy czym za S czy T piszemy & gdy jest to zbiór numerów wszystkich wierszy czy kolumn.

Twierdzenie 1 (Bineta–Cauchy'ego). * *Dla* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ *i* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$ *ma miejsce równość* $|\mathbf{AB}| = \sum_S |\mathbf{A}_{\&,S}||\mathbf{B}_{S,\&}|$, *gdzie* S *przebiega wszystkie* l*-elementowe podzbiory zbioru* $\{1,...,k\}$. *(Jeśli takich nie ma, to* $|\mathbf{AB}| = 0$.*)*

Twierdzenie Bineta–Cauchy'ego wygodnie jest uzasadnić traktując wyznacznik jako wieloliniową i alternującą funkcję wierszy macierzy. (Patrz §2.1 i §2.2). Wykorzystamy mianowicie następujące twierdzenie tyczące się takich funkcji:

Twierdzenie 2. * *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową, a* $f : V^l \to \mathbb{F}$ *funkcją wieloliniową i alternującą. Jeśli* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k \in V$ *i* $\mathbf{v}_i := \sum_{j=1}^k a_{ij}\mathbf{u}_j$ *dla* $i = 1, ..., l$, *to*

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{1\le j_1<...<j_l\le k} |\mathbf{A}(j_1, ..., j_l)| f(\mathbf{u}_{j_1}, ..., \mathbf{u}_{j_l}), \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{A}(j_1, ..., j_l)$ *jest podmacierzą macierzy* $(a_{ij})_{i,j}$, *wyznaczoną przez kolumny* $j_1, ..., j_l$. *(Gdy* $l > k$, *prawą stronę powyższego wzoru należy rozumieć jako 0.)*

Przed dowodem pokażemy, jak wynika stąd twierdzenie Bineta–Cauchy'ego. W tym celu ustalmy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{k,l}$ i połóżmy $f(\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_l) = |\mathbf{AB}|$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o wierszach $\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_l \in \mathbb{F}^k$. Żądaną tezę otrzymamy wprost ze wzoru (6), jeśli za $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ obierzemy wektory $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k \in \mathbb{F}^k$. (Zauważmy, że $f(\mathbf{e}_{j_1}, ..., \mathbf{e}_{j_l})$ jest wyznacznikiem macierzy utworzonej przez wiersze $j_1, ..., j_l$ macierzy $\mathbf{B}$.)

Przejdźmy do dowodu twierdzenia 2. Wobec wieloliniowości funkcji f,

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{s=1}^k a_{1s} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_l).$$

Podobnie

$$f(\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{t=1}^k a_{2t} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_l),$$

skąd

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{s,t=1}^k a_{1s}a_{2t} f(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_l).$$

Kontynuując w ten sposób otrzymujemy

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{s_1,s_2,...,s_l=1}^k a_{1s_1}a_{2s_2}...a_{ls_l} f(\mathbf{u}_{s_1}, \mathbf{u}_{s_2}, ..., \mathbf{u}_{s_l}).$$

Ponieważ funkcja f jest alternująca, więc $f(\mathbf{u}_{s_1}, \mathbf{u}_{s_2}, ..., \mathbf{u}_{s_l}) = 0$ gdy ciąg $(s_n)_{n=1}^l$ nie jest różnowartościowy. Stąd $f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = 0$ przy $k < l$, a gdy $k \ge l$ możemy sumowanie po prawej stronie ograniczyć do różnowartościowych ciągów $(s_n)_{n=1}^l$. Każdy taki ciąg jest przez dokładnie jeden ciąg rosnący $(j_n)_{n=1}^l$ i permutację $\sigma \in \mathbf{S}_l$ wyznaczony wzorem $s_n = j_{\sigma(n)}$ dla $n = 1, ..., l$. (Należy elementy zbioru $\{s_1, ..., s_l\}$ uporządkować, otrzymując $j_1, ..., j_l$, a $\sigma(n)$ określić powyższą równością.)

Wykorzystamy teraz rezultaty z §§2.1 i 2.3. Funkcja f jest antysymetryczna, patrz zad. uzup. 2 w §2.1, wobec czego $f(\mathbf{u}_{s_1}, ..., \mathbf{u}_{s_k}) = \mathrm{Sgn}(\sigma) f(\mathbf{u}_{j_1}, ..., \mathbf{u}_{j_k})$ i dalej

$$f(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l) = \sum_{1 \le j_1 < ... < j_l \le k} f(\mathbf{u}_{j_1}, \mathbf{u}_{j_2}, ..., \mathbf{u}_{j_l}) \left(\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_l} \mathrm{Sgn}(\sigma) a_{1 j_{\sigma(1)}} \cdot ... \cdot a_{l j_{\sigma(l)}} \right). \tag{7}$$

Stosując do sumy w nawiasie wzór (4) otrzymujemy tezę. □

Zadania uzupełniające.

1. a) W oparciu o twierdzenie Bineta–Cauchy'ego udowodnić **tożsamość Lagrange'a** $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \sum_{1 \le i < j \le k} (u_i v_j - u_j v_i)^2$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$. (Przyjmujemy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_i u_i v_i$.)

   b) Udowodnić ogólniejszą **tożsamość Cauchy'ego**: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}') = \sum_{1 \le i < j \le k} (u_i v_j - u_j v_i)(u'_i v'_j - u'_j v'_i)$ dla $\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{F}^k$.

   c) Udowodnić, że $\sum_{i=1}^k |u_i|^2 \sum_{i=1}^k |v_i|^2 - |\sum_i u_i \overline{v_i}|^2 = \sum_{1 \le i < j \le k} |u_i \overline{v_j} - \overline{u_j} v_i|^2$ dla $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, ..., k)$.

2. Dla $l \le k$ i $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ przyjmijmy $N(\mathbf{X}) := \sqrt{\Sigma}$, gdzie Σ jest sumą kwadratów wszystkich $l \times l$ –minorów macierzy $\mathbf{X}$. Udowodnić, że:
a) $N(\mathbf{X}) = \sqrt{|\mathbf{X}\mathbf{X}^t|}$;
b) $N(\mathbf{A}\mathbf{X}) = N(\mathbf{A}) N(\mathbf{X})$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R})$.

3. Dowieść, że gdy $\#S = \#T$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ i macierz $\mathbf{A}$ liczy k kolumn, to $|\mathbf{C}_{S,T}| = \sum_U |\mathbf{A}_{S,U}| |\mathbf{B}_{U,T}|$, gdzie $U \subset \{1, ..., k\}$ przebiega zbiory równoliczne z S. (Przy $\#S = 1$ daje to wzór na wyrazy $\mathbf{C}$, a w innym przypadku –twierdzenie Cauchy'ego z p.1.)

4. Udowodnić następujące **ogólne twierdzenie Laplace'a** o rozwinięciu wyznacznika: Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ i $S \subseteq \{1, ..., k\}$ zachodzi
$$|\mathbf{A}| = \sum_T |\mathbf{A}_{S,T}| |\mathbf{A}_{S',T'}| (-1)^{\sum S + \sum T},$$
gdzie T przebiega wszystkie pozbiory zbioru $\{1, ..., k\}$ równoliczne z S, oraz
   $\sum S$ oznacza sumę elementów zbioru S, zaś $\sum T$ sumę elementów zbioru T,
   S' oznacza $\{1, ..., k\} \setminus S$ i podobnie dla T'.
Wskazówka: traktować $|\mathbf{A}|$ jako funkcję wierszy ze zbioru S, przy ustalonych pozostałych, i znaleźć jej wartość gdy każdy z tych wierszy jest jednym z wektorów $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$; następnie wykorzystać twierdzenie 2.

Problem 1. Niech $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ i $\#S = \#T$. Wówczas $|\mathbf{B}_{S,T}| = \frac{|\mathbf{A}_{T',S'}|}{|\mathbf{A}|} (-1)^{\sum S + \sum T}$. (Wskazówka: poprzedzające dwa zadania.)

5. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^4$. Stosując ogólne twierdzenie Laplace'a do macierzy o kolejnych wierszach $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$, przy $S = \{1, 2\}$, uzyskać zależność między liczbami $p_{ik} := x_i y_k - y_i x_k$ $(i, k = 1, ..., 4, i \ne k)$.

6. Wzór z http://mathworld.wolfram.com/CauchysDeterminantTheorem.html ??

§ 4. Geometryczne zastosowania wyznacznika.

1. Wyznacznik operatora.

Twierdzenie 1 (i definicja). *Niech $L \in \mathcal{L}(V,V)$ i niech $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ będą (skończonymi!) bazami przestrzeni V. Wówczas macierze $[L]_\mathcal{V} := [L]_\mathcal{V}^\mathcal{V}$ i $[L]_\mathcal{W}$ mają ten sam wyznacznik.*

Skalar $\det([L]_\mathcal{V})$*, nie zależący od bazy $\mathcal{V}$, nazywamy* **wyznacznikiem operatora** *L i oznaczamy przez* $\det(L)$.

Dowód. Niech $\mathbf{A} := [L]_\mathcal{W}$, $\mathbf{B} := [L]_\mathcal{V}$, $\mathbf{C} := [I]_\mathcal{V}^\mathcal{W}$. Mamy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, skąd $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$. (Wykorzystaliśmy twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu). $\square$

Podkreślmy, że wyznacznik operatora jest określony tylko gdy ten jest **endomorfizmem**, tzn. działa z pewnej przestrzeni do niej samej.

Przykład 1. Niech $V = U \oplus W$ i niech $S = I_U \oplus -I_W$ będzie symetrią V względem U wzdłuż W. Obierzmy bazy $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p$ przestrzeni U oraz $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni W. Ponieważ $S(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$ oraz $S(\mathbf{w}_j) = -\mathbf{w}_j$ dla $i = i, ..., p$ oraz $j = 1, ..., q$, więc w bazie $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni V macierz symetrii S jest diagonalna, zaś na jej przekątnej stoi kolejno p wyrazów równych 1 i q równych -1. Stąd $\det(S) = (-1)^q$, gdzie $q = \dim(W)$.

Zadanie 1. a) Dla operatorów $L_1, L_2 : V \to V$ ma miejsce równość $\det(L_1 \circ L_2) = \det(L_1)\det(L_2)$.
b) Opretator $L : V \to V$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(L) \neq 0$.

Mimo prostoty dowodu twierdzenia 1, nie jest bynajmniej oczywiste, jak interpretować wyznacznik operatora. Pełną interpretację podamy tylko w przypadku rzeczywistego ciała skalarów. Okazuje się, że znak wyznacznika $\det(L)$ zależy od tego, czy L zachowuje orientację, zaś wartość bezwględna od tego, jak L zmienia objętość brył. Co to oznacza, wyjaśniamy niżej.

2. Orientacja baz przestrzeni rzeczywistych.

Definicja. Bazy uporządkowane $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ skończenie wymiarowej przestrzeni rzeczywistej V są **zgodnie zorientowane**, gdy macierz $[I]_\mathcal{V}^\mathcal{W}$ zmiany baz ma wyznacznik dodatni. Gdy wyznacznik ten jest ujemny, bazy nazywamy **przeciwnie zorientowanymi**.

Przykład 1. Niech $V = \mathbb{R}^k$ i niech $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$ oznacza bazę standardową. Zauważmy, że $[I]_\mathcal{W}^\mathcal{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} = [I]_\mathcal{E}^\mathcal{W}$ i $\mathbf{B} = [I]_\mathcal{E}^\mathcal{V}$ (patrz §III.1.6). Ponadto $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})/\det(\mathbf{A})$, a $[I]_\mathcal{E}^\mathcal{U}$ jest macierzą o kolumnach $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$, dla dowolnej bazy $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Wynika stąd, że zgodna orientacja baz $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jest równoważna temu, by macierze o kolumnach $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ oraz $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$, odpowiednio, miały wyznacznik zgodnego znaku.

Zadanie 1. a) Każde dwie bazy przestrzeni V są albo zgodnie, albo przeciwnie zorientowane.
b) Jeśli bazy $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są przeciwnie zorientowane, to $\mathcal{U}$ i $\mathcal{W}$ są zgodnie zorientowane.
c) Ustanowić analogiczne do b) reguły, gdy bazy $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są zgodnie zorientowane, a także gdy bazy $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ są zgodnie, zaś bazy $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ przeciwnie zorientowane.
d) Bazy $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ i $(-\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 ..., \mathbf{u}_k)$ są przeciwnie zorientowane.

Z zadania wynika, że zgodna orientacja jest relacją równoważności w zbiorze baz przestrzeni V, a także, że dla każdych dwóch baz $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ oraz $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$, albo bazy te są zgodnie zorientowane, albo baza $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ jest zorientowana zgodnie z bazą $(-\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$. Relacja zgodnej orientacji ma więc dokładnie dwie klasy abstrakcji. Każdą z nich nazywamy **orientacją** przestrzeni rzeczywistej V.

O przestrzeni powiemy, że jest **zorientowana**, gdy wybraliśmy pewną jej orientację. Bazy należące do tej orientacji nazywamy wtedy **dodatnio zorientowanymi**, a pozostałe – **ujemnie zorientowanymi**. **Orientacją zadaną przez bazę** $\mathcal{V}$ nazywamy zbiór baz zgodnie zorientowanych z $\mathcal{V}$.

Uwaga 1. Gdy nie powiedziano inaczej, przestrzeń $\mathbb{R}^k$ rozważamy zawsze z **orientacją standardową**, wyznaczoną przez bazę $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$. Baza $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, .., \mathbf{w}_k)$ jest w niej dodatnio zorientowana, gdy $\det(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k) > 0$.

Zapytajmy, czy relacja zgodnej orientacji baz jest zachowywana przez izomorfizmy.

Lemat 1. *Niech V i W będą rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi, niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{V}' = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_k)$ będą zgodnie zorientowanymi bazami w V i niech $L : V \to W$ będzie izomorfizmem. Wówczas bazy $\mathcal{W} = (L(\mathbf{v}_1), ..., L(\mathbf{v}_k))$ i $\mathcal{W}' = (L(\mathbf{v}'_1), ..., L(\mathbf{v}'_k))$ przestrzeni W też są zgodnie zorientowane.*

<u>Dowód.</u> Z definicji macierzy przejścia i liniowości przekształcenia L wynika, że $[I_V]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'} = [I_W]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}'}$. Jeśli więc $\det([I_V]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}) > 0$, to i $\det([I_W]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}'}) > 0$. □

Wniosek 1 (i definicja)**.** *Niech V i W będą zorientowanymi przestrzeniami rzeczywistymi, a $L \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie izomorfizmem. Wówczas albo L przeprowadza każdą dodatnio zorientowaną bazę w V na dodatnio zorientowaną bazę w W, a każdą ujemnie zorientowaną bazę w V na ujemnie zorientowaną bazę w W (i wówczas powiemy, że L* **zachowuje orientację***), albo też L przeprowadza każdą dodatnio zorientowaną bazę w V na ujemnie zorientowaną bazę w W, a każdą ujemnie zorientowaną bazę w V na dodatnio zorientowaną bazę w W (i wtedy o L mówimy, że L* **zmienia orientację***).* □

Zadanie 2. Złożenie skończenie wielu izomorfizmów liniowych wtedy i tylko wtedy zmienia orientację, gdy czyni to nieparzyście wiele rozważanych izomorfizmów.

Zbadajmy na koniec przypadek, gdy $V = W$ (jako przestrzenie zorientowane).

Stwierdzenie 1. *Niech L będzie izomorfizmem skończenie–wymiarowej zorientowanej przestrzeni rzeczywistej V na nią samą. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
a) L zachowuje orientację,
b) L przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę zgodnie z nią zorientowaną,
c) L przeprowadza dowolną bazę przestrzeni V na bazę zgodnie z nią zorientowaną,
d) $\det(L) > 0$.

<u>Dowód.</u> Jeśli zachodzi a), to L przeprowadza dowolną dodatnio zorientowaną bazę na bazę dodatnio zorientowaną, a dowolną ujemnie zorientowaną bazę na bazę ujemnie zorientowaną. Wynika stąd, że *a)* $\Rightarrow$ *c)*. Implikacja *c)* $\Rightarrow$ *b)* jest oczywista i oczywiste jest, że jeśli zachodzi b), to L nie zmienia orientacji. Pozostaje dowieść, że *c)* $\Leftrightarrow$ *d)*.

Niech L przeprowadza bazę $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni V na bazę $\mathcal{W} = (L(\mathbf{v}_1), ..., L(\mathbf{v}_k))$. Z definicji macierzy $[L]_{\mathcal{V}}$ i $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ wynika, że są one równe (i–tą kolumną każdej z nich jest ciąg współrzędnych wektora $L(\mathbf{v}_i)$ w bazie $\mathcal{V}$). Wobec tego bazy $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(L) > 0$. □

<u>Przykład 2.</u> Z przykładu w p.1 wynika, że symetria względem U wzdłuż podprzestrzeni W zachowuje orientację, gdy $\dim(W)$ jest liczbą parzystą, i vice versa.

Na koniec kilka słów o orientacji podprzestrzeni i o intuicyjnym znaczeniu wyboru orientacji.

<u>Definicja.</u> Niech $V = U \oplus W$, przy czym zarówno V, jak i U są przestrzeniami zorientowanymi. Niech orientacja przestrzeni U będzie zadana bazą $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p$. Możemy obrać wówczas taką bazę $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$

przestrzeni W, że baza $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni V jest dodatnio zorientowana. Orientację W zadaną przez $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ nazwiemy **indukowaną** w W przez wybrane orientacje przestrzeni V i U i kolejność U, W rozważanej sumy prostej. Kolejność ta odgrywa rolę, bo na ogół nie jest obojętne, czy wektory bazy $\mathcal{W}$ wypisujemy przed, czy po wektorach bazy $\mathcal{U}$, tworząc bazę przestrzeni V. (Nie ma to jednak znaczenia, gdy $\dim U \cdot \dim W$ jest liczbą parzystą – dlaczego ?)

Ćwiczenie. Rozważmy $\mathbb{R}^3$ ze standardową orientacją i na każdej z prostych $\mathbb{R}\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ rozważmy orientację zadaną bazą $(\mathbf{e}_i)$. Wskazać w każdej z przestrzeni $x_i = 0$ bazę zorientowaną dodatnio w orientacji indukowanej.

Jak można poglądowo przedstawić znaczenie wyboru orientacji k–wymiarowej przestrzeni V, dla $k \leq 3$?

Gdy $k = 1$, wybór orientacji polega na ustaleniu „zwrotu" parametryzacji przestrzeni V: orientacji zadanej wektorem $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ odpowiada parametryzacja $\mathbb{R} \ni t \mapsto t\mathbf{u}$.

Gdy $V = \mathbb{R}^3$, możemy rozpostrzeć kolejne trzy palce lewej ręki, numerując je począwszy od kciuka, i zrobić to samo z palcami prawej. Otrzymamy układy wektorów $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ oraz $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. Możemy ręce ustawić tak, by wektory $\mathbf{l}_i$ oraz $\mathbf{p}_i$ były równe dla $i = 2, 3$, lecz wzajemnie przeciwne dla $i = 1$. Stąd układy te są przeciwnie zorientowane. Wybór orientacji przestrzeni odpowiada więc ustaleniu, czy preferujemy sposób rysowania (standardowych) wektorów osi zgodnie z orientacją L (lewej ręki), czy zgodnie z orientacją P (ręki prawej). Zwyczajowo jest przyjęty wybór P. Odwrotnie, jeśli wybierzemy orientację przestrzeni, to można nazwać „prawą" wyznaczającą tę orientację rękę. Wybór orientacji jest więc tym samym, co przyjęcie umowy, którą rękę uznajemy za prawą.

Wybór orientacji płaszczyzny $V \subset \mathbb{R}^3$ polega na ustaleniu, czy w standardowym układzie osi wektor pierwszy jest na „prawo", czy też na „lewo" od drugiego, który wyobrażamy sobie jako skierowany ku górze, a fragment płaszczyzny jako tablicę. W odniesieniu do płaszczyzny słowa „prawy" i „lewy" nie mają jednak sensu: możemy tylko powiedzieć, że w zwyczajowo na rysunkach przyjmowanym wyborze, wektor pierwszy jest na prawo od drugiego, gdy patrzymy na płaszczyznę V z wnętrza pokoju, na ścianie której wisi tablica. Opis odwołuje się więc do orientacji indukowanej, wykorzystując zarówno orientację przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pojęcia: prawy, lewy), jak i orientację prostej dopełniającej.

Zadania uzupełniające.

1. Niech $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ będzie bazą zespolonej przestrzeni wektorowej $V_{\mathbb{C}}$. Wówczas $\mathcal{U}' = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, i\mathbf{u}_1, ..., i\mathbf{u}_k)$ jest bazą przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$ mającej ten sam, co $V_{\mathbb{C}}$, zbiór wektorów, lecz zbiór skalarów $\mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli wychodząc od innej bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ przestrzeni $V_{\mathbb{C}}$ utworzymy w analogiczny sposób bazę $\mathcal{V}'$ przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$, to bazy $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{V}'$ są zgodnie zorientowane. Struktura przestrzeni zespolonej $V_{\mathbb{C}}$ wyznacza więc pewną orientację przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$. (Wskazówka: zadanie uzupełniające 2 w §3.1.)

2. Przy powyższych oznaczeniach, niech $L : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ będzie pewnym izomorfizmem liniowym. Udowodnić, że gdy L rozpatrujemy jako operator z $V_{\mathbb{R}}$ do $V_{\mathbb{R}}$, to zachowuje on orientację.

3. * Zgodna orientacja baz a ciągła ich deformacja.

Postaramy się wykorzystać pojęcie ciągłości, by wyjaśnić znaczenie zgodnej orientacji baz w przestrzeni $\mathbb{R}^k$. (Uwzględnienie innych przestrzeni rzeczywistych sprawia pewne zbędne kłopoty pojęciowe, choć nie jest trudne; por. zadanie uzupełniające 2.)

Definicja. Funkcja $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ zadana jest przez układ k funkcji współrzędnych $f_1, ..., f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$; nazwijmy ją **ciągłą**, gdy ciągła jest każda z funkcji f_i. **Drogą baz** w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ nazywamy układ k funkcji ciągłych $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k : [a, b] \to \mathbb{R}^k$, dla pewnego przedziału $[a, b]$, taki, że

$$(\mathbf{f}_1(t), ..., \mathbf{f}_k(t)) \quad \text{jest bazą w } \mathbb{R}^k, \text{ dla każdego } t \in [a, b].$$

O takiej drodze baz powiemy, że łączy ona bazę $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ z bazą $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$, gdy

$$\mathbf{f}_i(a) = \mathbf{v}_i \quad \text{i} \quad \mathbf{f}_i(b) = \mathbf{w}_i \quad \text{dla } i = 1, ..., k.$$

Uwaga 1. Zamiast konstruować drogi baz, będziemy konstruować drogi macierzy nieosobliwych, tzn. funkcje $[a, b] \ni t \mapsto \mathbf{X}(t) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ takie, że wyrazy macierzy $\mathbf{X}(t)$ zależą w sposób ciągły od t oraz $|\mathbf{X}(t)| \neq 0$ dla każdego $t \in [a, b]$. Związek jest oczywisty, bo $k \times k$–macierz rzeczywista wtedy i tylko wtedy jest nieosobliwa, gdy jej kolumny (czy wiersze) tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

Zadanie 1. Jeśli drogą macierzy nieosobliwych można połączyć $\mathbf{A}$ z $\mathbf{B}$, a także $\mathbf{B}$ z $\mathbf{C}$, to można i $\mathbf{A}$ z $\mathbf{C}$.

Przykład 1. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą nieosobliwą, zaś $\mathbf{B}$ macierzą powstałą z $\mathbf{A}$ przez dodanie do jej p–tego wiersza c–krotności wiersza q–tego. Wówczas $\mathbf{B}$ można połączyć z $\mathbf{A}$ drogą macierzy $\mathbf{X}(t)$, $t \in [0, 1]$, gdzie $\mathbf{X}(t)$ oznacza macierz powstałą z $\mathbf{A}$ przez dodanie przez dodanie do p–tego wiersza ct-krotności q–tego. Macierze te są nieosobliwe, bo $|\mathbf{X}(t)| = |\mathbf{A}|$. Wraz z zadaniem 1 dowodzi to, że gdy $\mathbf{A}$ zmienimy operacjami wierszowymi typu (I), to otrzymaną macierz można połączyć z $\mathbf{A}$ drogą macierzy nieosobliwych. Tak samo jest dla operacji kolumnowych typu (I).

A oto zasadniczy lemat:

Lemat 1. *Każdą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^k$ można połączyć drogą baz z $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k)$ lub z $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{k-1}, -\mathbf{e}_k)$.*

Równoważne sformułowanie: każdą rzeczywistą macierz nieosobliwą stopnia k można połączyć drogą macierzy nieosobliwych z macierzą diagonalną o przekątnej $(1, ..., 1, \delta)$, gdzie $|\delta| = 1$.

Dowód. Dowiedziemy wpierw, że $\mathbf{A}$ można wierszowyni i kolumnowymi operacjami typu (I) przeprowadzić w macierz postaci $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(1, ..., 1, c)$. Jest to oczywiste gdy $k = 1$, a gdy $k > 1$ wykorzystujemy indukcję, jak następuje. Przeprowadzamy $\mathbf{A}$ w macierz $\mathbf{A}'$ taką, że $a'_{i1} \neq 0$ dla pewnego $i > 1$, a następnie w taką, że $a'_{11} = 1$. (Wpierw wykonujemy operacją kolumnową, a potem wierszową.) Dalej, przy pomocy takich operacji uzyskujemy $a'_{1s} = 0$ i $a'_{s1} = 0$ dla $s = 2, ..., k$, przy zachowaniu $a'_{11} = 1$. Pozostaje wykreślić w macierzy (a'_{ij}) pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, by po wykorzystaniu założenia indukcyjnego przeprowadzić $\mathbf{A}$ w szukaną macierz $\mathbf{B}$.

Ponieważ $c = |\mathbf{A}| \neq 0$, więc dla $\delta := \operatorname{Sgn}(a)$ można $\mathbf{B}$ połączyć z macierzą $\operatorname{diag}(1, ..., 1, \delta)$ drogą macierzy niesosobliwych $[0, 1] \ni t \mapsto \operatorname{diag}(1, ..., 1, (1-t)c + t\delta)$. (Liczba $(1-t)c + t\delta$) jest niezerowa, bo leży w odcinku $[c, \delta]$). Wraz z zadaniem 1 i przykładem 1 kończy to dowód. $\square$

Twierdzenie 1. *Dwie bazy przestrzeni $\mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy są zgodnie zorientowane, gdy można je połączyć drogą baz.*

Równoważne sformułowanie: dwie nieosobliwe $k \times k$ –macierze rzeczywiste wtedy i tylko wtedy można połączyć drogą macierzy nieosobliwych, gdy ich wyznaczniki są tego samego znaku.

Dowód. Jeśli $\mathbf{X}(t), t \in [a, b]$, jest drogą macierzy nieosobliwych, to $t \mapsto |\mathbf{X}(t)|$ jest funkcją ciągłą nie przyjmującą wartości zero, wobec czego $|\mathbf{X}(a)|$ i $|\mathbf{X}(b)|$ są tego samego znaku.

Stąd i z lematu wynika, że odwrotnie, jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ są nieosobliwe, a ich wyznaczniki są tego samego znaku, to zarówno $\mathbf{A}$, jak i $\mathbf{B}$ można połączyć drogą macierzy nieosobliwych z tą samą macierzą diagonalną o przekątnej $(1, ..., 1, \pm 1)$. Można więc taką drogą połączyć $\mathbf{A}$ z $\mathbf{B}$. $\square$

Zadania uzupełniające.

1. a) Dowieść, że każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$ można dla pewnego r połączyć drogą macierzy rzędu r z macierzą (b_{ij}), gdzie $b_{ij} = 1$ gdy $i = j < r$, $b_{rr} = \pm 1$ i $b_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

b) Gdy $r < \max(k, l)$, to wyżej można przyjąć $b_{rr} = 1$.

2. **Drogą** w k–wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nazwiemy funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ taką, że dla pewnej bazy $\mathcal{V}$ tej przestrzeni, funkcja $t \mapsto [f(t)]_{\mathcal{V}} \in \mathbb{F}^k$ jest ciągła. (Jak zwykle, przez $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ oznaczamy ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathcal{V}$.)

a) Dowieść, że bez zmiany znaczenia można wyżej słowo „pewnej" zastąpić przez „każdej".

b) Dowieść, że jeśli przekształcenia $K, L \in \mathcal{L}(V, W)$ mają ten sam rząd i nie są izomorfizmami, to można je w przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$ połączyć drogą przekształceń stałego rzędu.

c) Czy jest tak, gdy K i L są izomorfizmami? Rozróżnić przypadki $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.