II PRZESTRZENIE WSPÓLRZĘDNYCH, ICH PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE, MACIERZE.

Wstęp. Przypomnę, że cel tego przedmiotu, w obu semestrach, określić chcę jako badanie własności przekształceń afinicznych, w tym liniowych, z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, dla $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mimo prostoty wzorów określających przekształcenia liniowe, patrz niżej, wymaga to stworzenia dość bogatego aparatu algebraicznego i geometrycznego. W tym rozdziale, wzory te szybko przywiodą nas do zainteresowania się macierzami i równaniami liniowymi i do uzyskania o nich wyników, mających zarówno niezależne znaczenie, jak i pozwalających uzyskać wstępne informacje o interesujących nas przekształceniach. (Z przekształceniami afinicznymi zetkniemy się dopiero na końcu wykładu – definiowane są one tak, że do prawej strony poniższego wzoru (1) dodana jest stała $b_i \in \mathbb{F}$.)

§ 1. Przekształcenia liniowe przestrzeni współrzędnych i macierze.

1. Podstawowe definicje.

W dalszej części tego rozdziału oznaczamy przez $\mathbb{F}$ ustalone ciało i nazywamy jego elementy **skalarami**. (Najważniejsze dla nas przypadki, to gdy $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.) Dla $k \in \mathbb{N}$ przyjmujemy

$$\mathbb{F}^k := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_k) : u_i \in \mathbb{F} \text{ dla } i = 1, ..., k\}.$$

Zbiór $\mathbb{F}^k$ nazywamy k–tą **potęgą kartezjańską** ciała $\mathbb{F}$ lub k–**wymiarową przestrzenią współrzędnych nad ciałem** $\mathbb{F}$. i–ty wyraz ciągu $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^k$, oznaczany przez u_i lub $u(i)$, nazywamy i–tą **współrzędną kartezjańską** ciągu $\mathbf{u}$. Ciąg, którego każdy z k wyrazów jest równy 0 oznaczamy przez $\mathbf{0}_k$ lub przez $\mathbf{0}$ i nazywamy **zerowym**; przez $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}^k$ oznaczamy ciąg, którego i-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe 0.

<u>Definicja.</u> Przekształcenie $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ nazywamy **liniowym**, gdy dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ współrzędne $w_1, ..., w_l$ ciągu $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ wyrażają się wzorami

$$w_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_j = a_{i1} v_1 + ... + a_{ik} v_k \qquad (i = 1, ..., l) \tag{1}$$

gdzie współczynniki $a_{ij} \in \mathbb{F}$ nie zależą od $\mathbf{v}$.

Wygodnie jest ustawić w tablicę współczynniki a_{ij}, wyznaczające wzór (1).

<u>Definicja.</u> **Macierzą nad** $\mathbb{F}$ nazywamy tablicę postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{l1} & a_{l2} & ... & a_{lk} \end{bmatrix} \qquad \text{(inne oznaczenie, to } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{l1} & a_{l2} & ... & a_{lk} \end{pmatrix} \text{)}$$

utworzoną z elementów $\mathbb{F}$. Piszemy wtedy $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ lub $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j}$, zaznaczając w razie potrzeby zakresy zmienności wskaźników: $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$. O macierzy tej mówimy, że jest **rozmiaru** $l \times k$, lub że jest $l \times k$–macierzą. Skalar a_{ij} nazywamy jej (i, j)-tym **wyrazem**. Ciąg $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}) \in \mathbb{F}^k$ to jej i-ty **wiersz**, zaś $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{lj}) \in \mathbb{F}^l$ to j-ta **kolumna**. Zbiór wszystkich $l \times k$–macierzy o wyrazach w $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ lub, gdy $\mathbb{F}$ traktujemy jako ustalone, przez $\mathcal{M}_{l,k}$.

Z definicji, każda macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ wyznacza przekształcenie liniowe z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, zadane wzorem (1). Jego wartość na ciągu $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$ oznaczamy $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$ lub $\mathbf{Av}$. Tak więc

$$\mathbf{Av} = L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = (\sum_{j=1}^{k} a_{1j}v_j, ..., \sum_{j=1}^{k} a_{lj}v_j) \in \mathbb{F}^l \quad \text{dla } \mathbf{v} \in \mathbb{F}^k \tag{2}$$

Będziemy też ciąg $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ nazywać wynikiem **działania** macierzy $\mathbf{A}$ (czy: przekształcenia liniowego $L_{\mathbf{A}}$) na ciąg $\mathbf{v}$.

Czemu stosujemy dwa oznaczenia $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$ i $\mathbf{Av}$ dla tego samego? Gdy mowa o przekształceniu z $\mathbb{F}^k$ do $\mathbb{F}^l$, oznaczamy je $L_{\mathbf{A}}$ (co jest krótsze niż $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{Av}$); lecz wynik jego działania na ciąg $\mathbf{v}$ na ogół wygodniej będzie oznaczać $\mathbf{Av}$.

Uwaga 1. a) Ciąg $\mathbf{Av}$ jest określony tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}$ ma tyle kolumn, ile $\mathbf{v}$ ma współrzędnych.
b) Przyjmując $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ w (2) stwierdzamy, że $L_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}_j) = (a_{1j}, ..., a_{lj})$ dla $j = 1, ..., k$.

Ze względu na b), przekształcenie liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest wyznaczone przez jedną tylko macierz: tę, której kolejnymi kolumnami są $L(\mathbf{e}_1), ..., L(\mathbf{e}_k)$. Nazywamy ją **standardową macierzą przekształcenia liniowego** $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ i oznaczamy $[L]$; słowo „standardową" będziemy w tym rozdziale opuszczać. Podsumowując, przekształcenie liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jednoznacznie określa $l \times k$–macierz współczynników a_{ij}, dla których zachodzą wzory (1), i tę macierz oznaczamy przez $[L]$.

2. Kombinacje wektorów i charakteryzacja przekształceń liniowych $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.

Elementy zbioru $\mathbb{F}^k$ często nazywamy **wektorami** przestrzeni współrzędnych $\mathbb{F}^k$. Będziemy je dodawać i mnożyć przez skalary, stosując wzory

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_i + v_i)_{i=1}^k \text{ oraz } c\mathbf{u} := (cu_i)_{i=1}^k \text{ dla } c \in \mathbb{F} \text{ i } \mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^k, \ \mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^k.$$

Gdy $\mathbf{v}^1, ..., \mathbf{v}^s \in \mathbb{F}^k$ i $c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$, to wektor $c_1\mathbf{v}^1 + ... + c_s\mathbf{v}^s$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $\mathbf{v}^1, ..., \mathbf{v}^s$ **ze współczynnikami** $c_1, ..., c_s$.

Uwaga 1. Powyżej, wskaźniki $i = 1, ..., s$ przy $\mathbf{v}^i$ umieściliśmy u góry, bo oznaczenie $\mathbf{v}_i$ mogłoby sugerować, iż chodzi o i-tą współrzędną pewnego wektora $\mathbf{v}$. Nie czynimy jednak z tego reguły: gdy nie ma obawy omyłki, będziemy umieszczać u dołu indeksy numerujące pewien ciąg wektorów.

Zadanie 1. a) Wektor $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$ jest równy kombinacji $\sum_{i=1}^k v_i\mathbf{e}_i$.
b) Gdy $\mathbf{A}$ jest macierzą o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^l$, to iloczyn $\mathbf{Av}$ jest dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ równy kombinacji $v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k$.

Podamy teraz bardzo ważną charakteryzację przekształceń liniowych:

Twierdzenie 1. *Dla przekształcenia $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ równoważne są warunki:*
a) L jest przekształceniem liniowym;
b) $L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$ i $L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v})$ dla (wszystkich!)[1] $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ *i $c \in \mathbb{F}$;*
c) $L(c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\mathbf{v}_n) = c_1L(\mathbf{v}_1) + ... + c_nL(\mathbf{v}_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbb{F}^k$.

Dowód. *a) ⇒ b).* Ta implikacja wynika wprost ze wzorów (1) i własności działań w $\mathbb{F}$.
b)⇒c). Latwy dowód indukcyjny (względem n) pozostawiony jest jako ćwiczenie.
c)⇒a). Gdy warunek c) jest spełniony, to z części a) zadania 1 wynika, że $L(\mathbf{v}) = v_1L(\mathbf{e}_1) + ... + v_kL(\mathbf{e}_k)$; natomiast z części b) zadania 1 – że $v_1L(\mathbf{e}_1) + ... + v_kL(\mathbf{e}_k) = \mathbf{Av}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą o kolumnach $L(\mathbf{e}_1), ..., L(\mathbf{e}_k)$. Zatem $L(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ i przekształcenie L jest liniowe. □

[1] Będziemy odtąd słowo „wszystkich" w takich sformułowaniach pomijać.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §I.2.1, zadania 1 i 2.

3. Składanie przekształceń liniowych i działania na macierzach.

Przypomnijmy, że złożeniem $F \circ G$ przekształceń $G : X \to Y$ i $F : Y \to Z$ nazywamy przekształcenie $X \to Z$, zdefiniowane wzorem $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ dla $x \in X$.

Stwierdzenie 1. *Złożenie $K \circ L$ przekształceń liniowych $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ i $K : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^m$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{F}^k$ w $\mathbb{F}^m$. Ponadto, gdy macierze przekształceń K i L oznaczyć przez $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, odpowiednio, to $[K \circ L] = \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,k}$, gdzie*

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{l} a_{is} b_{sj} \quad \text{dla} \quad i = 1, ..., m, \;\; j = 1, ..., k. \tag{3}$$

Dowód. Niech $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ i $\mathbf{y} := (K \circ L)(\mathbf{v}), \mathbf{w} := L(\mathbf{v})$. Z definicji, $\mathbf{y} = K(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w}$ i $\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{v} = (\sum_{j=1}^{k} b_{sj} v_j)_{s=1}^{l} \in \mathbb{F}^l$. Stąd $y_i = \sum_{s=1}^{l} a_{is} w_s = \sum_{s=1}^{l} a_{is} (\sum_{j=1}^{k} b_{sj} v_j)$ dla $i = 1, ..., m$. Zmieniając kolejność sumowania stwierdzamy, że $y_i = \sum_{j=1}^{l} c_{ij} v_j$, gdzie $c_{ij} = \sum_{s=1}^{l} a_{is} b_{sj}$. Zatem $K \circ L$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $[c_{ij}]_{i,j}$. $\square$

Definicja. **Iloczynem macierzy** $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{F})$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ nazywamy macierz $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{F})$ zdefiniowaną równościami (3). Odnotujmy, że iloczyn $\mathbf{AB}$ ma sens jedynie gdy $\mathbf{A}$ ma tyle kolumn, ile $\mathbf{B}$ ma wierszy. Ponadto, ij–ty wyraz macierzy $\mathbf{AB}$ zależy tylko od i–tego wiersza $\mathbf{a}_i$ macierzy $\mathbf{A}$ i j–tej kolumny $\mathbf{b}_j$ macierzy $\mathbf{B}$; śćślej:

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j \text{ gdy przyjąć } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{s=1}^{l} u_s v_s \text{ dla } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^l \tag{2.5}$$

Przykład 1. By obliczyć $(1, 3)$-ci wyraz macierzy $\mathbf{AB}$, gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

zauważamy, że pierwszym wierszem macierzy $\mathbf{A}$ jest $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3)$, a trzecią kolumną macierzy $\mathbf{B}$ –wektor $\mathbf{b}_3 = (1, 3, -4)$. Żądanym wyrazem jest więc $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -5$. Tak samo obliczamy np. $(2, 3)$-ci wyraz, którym jest $4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = -5$. Zauważamy przy tym, że

Uwaga 1. j–ta kolumna macierzy $\mathbf{AB}$ jest równa $\mathbf{A}\mathbf{b}_j$, gdzie $\mathbf{b}_j$ to j-ta kolumna macierzy $\mathbf{B}$.

Przy użyciu mnożenia macierzy stwierdzeniu 1 można nadać następującą postać:

Stwierdzenie 1'. *Złożenie $K \circ L$ przekształceń liniowych $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ i $K : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^m$ jest przekształceniem liniowym, przy czym $[K \circ L] = [K][L]$.*

Zadanie 1. Niech L_α oznacza obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ wokół $\mathbf{0}$, o kąt zorientowany α. Przekształcenie L_α jest liniowe – co może być znane ze szkoły i co udowodnimy w rozdziale V.

a) Wyznaczyć wyrazy macierzy $\mathbf{K}_\alpha := [L_\alpha]$. (Wskazówka: uwaga 1b) w §1.1).

b) W oparciu o równość $L_\alpha \circ L_\beta = L_{\alpha+\beta}$ wyprowadzić wzór na $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$.

Oprócz mnożenia, zdefiniujemy jeszcze następujące operacje na macierzach:

Definicja. Jeśli $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ jest $l \times k$-macierzą, to przez $\mathbf{A}^t$ oznaczamy $k \times l$-macierz, której (i,j)-tym wyrazem jest a_{ji}, dla każdego $i \in \{1, ..., k\}$ i każdego $j \in \{1, ..., l\}$. Inaczej mówiąc: kolejnymi wierszami macierzy $\mathbf{A}^t$ są kolejne kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Macierz $\mathbf{A}^t$ nazywamy **macierzą transponowaną** (względem macierzy $\mathbf{A}$).

Przykład 2. Jeśli $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, to $\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Definicja. **Suma** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ o wyrazach w $\mathbb{F}$ jest zdefiniowana tylko wtedy, gdy macierze te są tych samych rozmiarów (powiedzmy, $l \times k$) i wtedy jest równa

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \qquad (i = 1, ..., l, j = 1, ..., k)$$

Określmy też **iloczyn macierzy** $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j}$ **przez skalar** c jako macierz $c\mathbf{A} := [ca_{ij}]_{ij}$. Oczywiście, $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$ i $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$. A oto inne podstawowe własności omawianych operacji:

Lemat 1. *Dodawanie $l \times k$–macierzy jest przemienne i łączne.* □

Lemat 2. *Jeśli dla pewnych macierzy* **A**,**B**,**C** *zdefiniowana jest macierz stojąca po jednej ze stron którejś z poniższych równości, to zdefiniowana jest też macierz stojąca po drugiej stronie i macierze te są równe:*

(*i*) $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$;
(*ii*) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$;
(*iii*) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$;
(*iv*) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$ oraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{B}C$;
(*iv*) $\mathbf{A}(c\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = c\mathbf{AB}$ dla $c \in \mathbb{F}$;
(*vi*) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Prócz (*vi*), wszystkie własności wynikają łatwo z przyjętych definicji. Własność (*vi*) też można podobnie uzasadnić, a można i następująco. Niech przekształcenia liniowe $F := L_{\mathbf{A}}$, $G := L_{\mathbf{B}}$, $H := L_{\mathbf{B}}$ będą wyznaczone przez macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, odpowiednio. Przez porównanie rozmiarów macierzy sprawdzamy, że jeśli któraś ze stron w (vi) ma sens, to ma sens i druga. Ponadto, ze stwierdzenia 1 wynika, że $[(F \circ G) \circ H] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ i $[F \circ (G \circ H)] = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Jednak $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$, na mocy łączności składania przekształceń, skąd wynika vi). □

Uwaga 2. O ile możenie macierzy związane jest ze składaniem przekształceń liniowych, o tyle dodawanie ich i mnożenie przez skalar związane jest z dodawaniem i mnożeniem przez skalar przekształceń liniowych; por. zadanie na końcu tego punktu. Zrozumienie istotnego znaczenia operacji transponowania macierzy jest trudniejsze. Przez pewien czas będzie ona wykorzystywana głównie do tego, by z rezulatów dotyczących wierszy macierzy móc, poprzez zastosowanie ich do macierzy transponowanej, wnioskować o własności kolumn (i vice versa).

Uwaga 3. Dzięki łączności mnożenia z (vi), możemy zmieniać lub pomijać nawiasy w iloczynach dowolnie wielu macierzy. Np. przez różne ustawienie nawiasów możemy z $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_4$ utworzyć $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4)$, $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)$ i jeszcze 3 inne macierze; jednak dzięki łączności mnożenia, jeśli jedna z nich istnieje, to każda inna też i jest jej równa. Tak samo jest dla iloczynów większej liczby macierzy, choć liczba możliwych ustawień nawiasów wzrasta bardzo szybko (już dla $n = 5$ wypisanie wszystkich jest mozolnym zadaniem). Dowód, taki sam jak dla mnożenia liczb całkowitych, polega na cierpliwym przestawianiu nawiasów i jest prostszy niż jego precyzyjny zapis; z tego też powodu jest tu pominięty. (Znaleźć go można w [Ko-84], str. 99.)

Ćwiczenie. Dowieść równości $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4)$.

Taka sama uwaga odnosi się do dodawania macierzy, bo i ono jest łączne (i, w odróżnieniu od mnożenia, przemienne). Dlatego nawiasy w iloczynach lub sumach macierzy wstawiamy tylko wtedy, gdy chcemy zasugerować pewną kolejność wykonywania działań; w innych przypadkach je pomijamy.

Odnotujmy, że wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ nie jest macierzą: jego wyrazy są indeksowane pojedyńczymi wskaźnikami liczbowymi, a wyrazy dowolnej macierzy–parami (i, j) takich wkaźników. Wyznacza on jednak macierz, kórej jest jedynym wierszem; mówimy wtedy o **wektorze wierszowym**. Podobnie, możemy mówić o **wektorze kolumnowym**, wyznaczonym przez ciąg $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ – co ma więcej zalet, ze względu na poniższą uwagę:

Uwaga 4. Gdy wynik działania macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ na wektorze $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ traktować jako wektor kolumnowy, to jest on równy iloczynowi macierzy $\mathbf{A}$ i wektora kolumnowego $\mathbf{v}$.

Przykład 3. Przyjmując w *vi*) za macierz $\mathbf{C}$ wektor kolumnowy wnosimy, że gdy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami, a $\mathbf{v}$ wektorem, to

(vii) $$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} \qquad \text{(jeśli któraś ze stron jest poprawnie określona).}$$

Zadanie 2. Dla przekształceń liniowych $K, L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ oraz dla $c \in \mathbb{F}$ zdefiniujmy przekształcenia $K+L$ i cK wzorami $(K+L)(\mathbf{v}) := K(\mathbf{v})+L(\mathbf{v})$ i $(cK)(\mathbf{v}) := cK(\mathbf{v})$ $(\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k)$. Dowieść, że otrzymane przekształcenia $\mathbb{F}^k$ w $\mathbb{F}^l$ są liniowe, a ich macierze są równe $[K] + [L]$ i $c[K]$, odpowiednio.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1,2,3 w §I.4.1.

§ 2. Dalsze własności macierzy

Materiał w tym paragrafie jest w dużej mierze uzupełniający i podany w postaci zadań, ułatwiających nabycie niezbędnej wprawy w operowaniu macierzami.

1. Pierścień macierzy kwadratowych. (Zadania i proste własności.)

Macierze kwadratowe odgrywają szczególną rolę. O $k \times k$–macierzy też, że jest **stopnia** k, a zbiór $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{F})$ wszystkich macierzy stopnia k nad $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ lub przez $\mathcal{M}_k$.

Definicja. Macierz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_k$ jest
- **górnie trójkątna** (odp. **dolnie trójkątna**) gdy $a_{ij} = 0$ dla $j < i$ (odp. $j > i$);
- **trójkątna**, gdy jest bądź górnie, bądź dolnie trójkątna;
- **symetryczna** gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ (czyli gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j \in \{1, ..., k\}$);
- **diagonalna**, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Ciągi $(a_{11}, ..., a_{kk})$ i $(a_{k1}, ..., a_{1k})$ nazywamy **przekątną główną** i **przekątną boczną** macierzy $\mathbf{A}$. Na ogół skracamy „przekątna główna” do „przekątna”. Macierz diagonalną o przekątnej $(1, ..., 1)$ nazywamy **jednostkową** i oznaczamy $\mathbf{I}$ lub $\mathbf{I}_k$.

Zadanie 1. Udowodnić, że
a) Przekształcenie $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$, wyznaczone przez macierz jednostkową, jest identycznościowe (tzn. przeprowadza każdy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ na tenże wektor).
b) $\mathbf{I}_l\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_k$ dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$.

Uwaga 1. Z zadania i rezultatów p.1 wynika, że $\mathcal{M}_k$ jest pierścieniem, którego jedynką jest macierz $\mathbf{I}_k$, a zerem macierz $\mathbf{0}$ o wszystkich wyrazach zerowych. Odgrywa on ważną rolę i poniższe zadania mają na celu przybliżenie niektórych jego własności.

Zadania.

2. a) Istnieją macierze $\mathbf{D}, \mathbf{J} \in \mathcal{M}_2$ takie, że $\mathbf{DJ} \neq \mathbf{JD}$ i $\mathbf{J}^2 = \mathbf{0}$, przy czym za $\mathbf{D}$ można obrać macierz diagonalną, a za $\mathbf{J}$ macierz o trzech wyrazach równych 0,

b) Podobnie, dla $k \geq 2$ mnożenie w $\mathcal{M}_k$ nie jest przemienne i istnieją niezerowe macierze, których kwadrat jest zerem.

c) W $\mathcal{M}_2$, dać wszystkie rozwiązania równań 1) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$, 2) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{0}$, 3) $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$. Przy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, które z tych równań mają skończenie wiele rozwiązań?

3. Niech $\mathbf{J} \in \mathcal{M}_k$ oznacza macierz, mającą jedynki bezpośrednio pod główną przekątną i zera w pozostałych miejscach.

a) Zbadać działanie przekształcenia $L = L_{\mathbf{J}}$ na wektorach $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$ i na tej podstawie wyznaczyć kolejne potęgi macierzy $\mathbf{J}$.

b) Wywnioskować, że w $\mathcal{M}_k$ istnieje macierz, której k–ta potęga jest zerowa, lecz poprzednia – niezerowa. (Nie można tu zastąpić potęgi k przez wyższą, co udowodnimy znacznie później.)

4. Jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ są macierzami górnie trójkątnymi (odp. dolnie trójkątnymi, diagonalnymi), to $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ i $\mathbf{AB}$ również.

5. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ będą macierzami dolnie trójkątnymi. Jeśli pierwszych l wierszy macierzy $\mathbf{B}$ i $l+1$-szy wyraz przekątnej macierzy $\mathbf{A}$ są zerowe, to pierwszych $l+1$ wierszy w $\mathbf{AB}$ jest zerowych.

6. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą macierzami symetrycznymi, tzn. takimi, że $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ i $\mathbf{B} = \mathbf{B}^t$. Wówczas:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ jest macierzą symetryczną;

b) $\mathbf{AB}$ wtedy i tylko wtedy jest macierzą symetryczną, gdy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. (Patrz lemat 2iii) w §1.3.)

7. Jeśli $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami górnie trójkątnymi, to $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ dla $i = 1, 2, ..., k$; podobnie, gdy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami dolnie trójkątnymi.

8. Jeśli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami diagonalnymi, to $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

9. Niech $\mathbf{D}$ będzie $k \times k$ –macierzą diagonalną, której wyrazy stojące na przekątnej są parami różne.

a) Znaleźć wszystkie macierze $\mathbf{A}$ takie, że $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$.

b) Dowieść, że macierz, której główna przekątna jest zerowa, jest postaci $\mathbf{BD} - \mathbf{DB}$ dla pewnej macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$.

10. Niech G będzie zbiorem 2×2-macierzy, zamkniętym ze względu na mnożenie i takim, że każda macierz $(a_{ij}) \in G$ spełnia warunek $a_{11} = a_{22}$. Wówczas albo G składa się z macierzy dolnie trójkątnych, albo istnieje skalar K taki, że dla każej macierzy $(a_{ij}) \in G$ mamy $a_{21} = Ka_{12}$.

Definicja. Suma wszystkich wyrazów głównej przekątnej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywana jest **śladem A** i oznaczana $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, od angielskiego „trace”.

11. a) $\mathrm{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + b\mathrm{tr}(\mathbf{B})$ dla macierzy kwadratowych $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ tego samego rozmiaru i $a, b \in \mathbb{F}$.

b) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$ gdy oba iloczyny $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ istnieją (tzn. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{lk}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{kl}$ dla pewnych k, l).

Definicja. Dla $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i dla $p = a_0 + a_1x + ...a_sx^s \in \mathbb{F}[x]$ przyjmijmy

$$p(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I}_k + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + ... + a_s\mathbf{A}^s$$

Ćwiczenie. Wyznaczyć $p(\mathbf{A})$, gdy
a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $p = x^3 + x^2 + 1$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $p = x^2 - (a+d)x + ad - bc$.

Zadania.

12. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ i $p, q \in \mathbb{F}[x]$.
a) $(p(\mathbf{A}))^t = p(\mathbf{A}^t)$.
b) Jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są **przemienne**, tzn. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, to $p(\mathbf{A})$ i $p(\mathbf{B})$ też są.
c)$(pq)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})q(\mathbf{A})$ i analogicznie dla iloczynu większej liczby wielomianów.

13. Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą (górnie) trójkątną o przekątnej $(c_1, ..., c_k)$. Wykazać, że dla $p \in \mathbb{F}[x]$ macierz $p(\mathbf{A})$ jest (górnie) trójkątna i jej przekątną jest $(p(c_1), ..., p(c_k))$.

Zadania uzupełniające.

1. Które macierze kwadratowe są przemienne z każdą inną tego samego stopnia? (Wskazówka: zad. 9a).)

2. Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ mają tę własność, że dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$ wektor $\mathbf{Bv}$ jest proporcjonalny do $\mathbf{Av}$. Dowieść, że $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ dla pewnego skalara λ.

3. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2$. Dowieść, że:
a) $\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{A} + \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{B} - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = (\mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{AB}))\mathbf{I}$;
b) $(\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = 2\det(\mathbf{A})$, gdzie det to wyznacznik, zdefiniowany dalej w uwadze 2 w §5.1;
c) $2\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{AB})\mathrm{tr}(\mathbf{C}) + \mathrm{tr}(\mathbf{BC})\mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{AC})\mathrm{tr}(\mathbf{B}) - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathrm{tr}(\mathbf{C})$; w szczególności, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^3) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{A})[3\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) - (\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2]$. (Wskazówka: część a)).
(Nie znam odpowiedników tych tożsamości dla macierzy większych rozmiarów.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: z §I.4.1: 4a),4b),5,6,9,15,16; z §I.4.3: 1,5,7,8,11,14,17*,21.

2. * 2×2–macierze a kwaterniony (zadania uzupełniające).

1. * Dla $a, b \in \mathbb{C}$ oznaczmy przez $\mathbf{Q}(a, b)$ 2×2–macierz zespoloną o pierwszej kolumnie (a, b) i drugiej $(-\overline{b}, \overline{a})$. Niech $\mathbb{H}' := \{\mathbf{Q}(a, b) : \ a, b \in \mathbb{C}\}$. Dowieść, że:
a) Zbiór $\mathbb{H}'$ jest zamknięty tak względem mnożenia macierzy, jak i ich dodawania.
b) Każdy element $\mathbb{H}' \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest odwracalny w $\mathbb{H}'$ i odwrotnością $\mathbf{Q}(a, b)$ jest $\frac{1}{|a|^2+|b|^2}\mathbf{Q}(\overline{a}, -b)$.
c) Każdą macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{H}'$ można w dokładnie jeden sposób przedstawić w postaci $\mathbf{A} = t\mathbf{I} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, gdzie $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ oraz

$$\mathbf{i} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

d) $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{I}$.
e) $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$

2. * Zdefiniujmy $\mathbb{H}$ jako zbiór wyrażeń postaci $v := v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$, gdzie $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, a i, j, k są ustalonymi symbolami. Elementy $\mathbb{H}$ nazywamy **kwaternionami**; dodajemy je i mnożymy jak wyrażenia algebraiczne, przyjmując jednak $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j$.
a) Określmy przekształcenie $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ wzorem $\Phi(v) := v_0\mathbf{I} + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ dla $v \in \mathbb{H}$. Dowieść, że Φ jest bijekcją, zachowującą działania dodawania i mnożenia.
b) Wykorzystując a) i poprzedzające zadanie dowieść, że $\mathbb{H}$ z opisanymi wyżej działaniami jest **ciałem nieprzemiennym** – czyli spełnia warunki definicji ciała, prócz przemienności mnożenia. (Warto odnotować, jak łatwo uzyskano nieoczywistą skądinąd własność łączności mnożenia!)

3. * Dowieść, że 2×2–macierz zespolona, przemienna z każdą z macierzy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, jest **skalarna** (tzn. postaci $z\mathbf{I}$, gdzie $z \in \mathbb{C}$). Stąd gdy $v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k$ jest kwaternionem przemiennym z każdym innym, to $v_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3$.

3. *Klatki macierzy.

Podmacierzą macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy macierz, powstałą z $\mathbf{A}$ przez wykreślenie pewych wierszy i kolumn; mówimy, że podmacierz jest **wyznaczona** przez wiersze i kolumny, których nie wykreślono. Podmacierz wyznaczoną przez pewien zbiór kolejnych kolumn i pewien zbiór kolejnych wierszy nazywamy **klatką**.

Przykład 1.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{4} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{8} \\ -1 & -\cancel{2} & -3 & -\cancel{4} \\ -5 & -\cancel{6} & -7 & -\cancel{8} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ – podmacierz wyznaczona przez wiersze 1, 3, 4 i kolumny 1 i 3,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{5} & 6 & 7 & \cancel{8} \\ -\cancel{1} & -2 & -3 & -\cancel{4} \\ -\cancel{5} & -6 & -7 & -\cancel{8} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ – klatka wyznaczona przez wiersze 2, 3, 4 i kolumny 2 i 3.

Czasem macierz zadana będzie przez zaznaczenie położenia pewnych jej znanych klatek. Na przykład, jeśli $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, to $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ oznacza macierz $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right]$.
Rozmiarów klatek $\mathbf{I}$ oraz $\mathbf{0}$ należy się domyśleć –muszą być zgodne z rozmiarami klatek $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$. Macierz podzieloną na klatki pewnym układem poziomych i pionowych linii nazywamy **macierzą podzieloną na klatki** lub **macierzą blokową**. Zaznaczanie linii nie jest konieczne –pomagają one tylko przekazać informację o tym, jakie klatki wyróżniamy.

Przy dodawaniu i mnożeniu, klatki zachowują się podobnie jak wyrazy macierzy:

Stwierdzenie 1. * *Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami podzielonymi na klatki:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} & \dots & \mathbf{A}_{lk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{B}_{1q} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \dots & \mathbf{B}_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{B}_{p2} & \dots & \mathbf{B}_{pq} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

i) Jeśli $l = p$ oraz $k = q$ i dla każdych i, j suma $\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}$ istnieje, to istnieje też suma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ oraz ma miejsce podział na klatki:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1k} + \mathbf{B}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2k} + \mathbf{B}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{l1} + \mathbf{B}_{l1} & \mathbf{A}_{l2} + \mathbf{B}_{l2} & \dots & \mathbf{A}_{lk} + \mathbf{B}_{lk} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

ii) Jeśli $k = p$ oraz dla każdych wskaźników $i \in \{1, ..., l\}, s \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., q\}$ iloczyn $\mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj}$ istnieje, to istnieje też iloczyn $\mathbf{AB}$ i ma miejsce podział na klatki

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & ... & \mathbf{C}_{1q} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & ... & \mathbf{C}_{2q} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{C}_{l1} & \mathbf{C}_{l2} & ... & \mathbf{C}_{lq} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \mathbf{C}_{ij} = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj} \text{ dla } i, j \text{ jak wyzej.} \tag{6}$$

<u>Ćwiczenie.</u> Wykorzystując zaznaczony podział macierzy $\mathbf{A}$ na klatki wyznaczyć $\mathbf{AA}^t$, gdy

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przejdźmy do dowodu części ii) stwierdzenia. (Częśc i) jest oczywista,)

Zadanie 1. Teza ii) jest prawdziwa i wynika bezpośrednio z definicji iloczynu macierzy, gdy a) $k = q = 1$, lub b) $l = k = 1$, lub c) $l = 1 = q$. (Przypominamy, że z założenia $p = k$.)

Przy oznaczeniach (4) niech teraz

$$\mathbf{A}_i := [\mathbf{A}_{i1} \ ... \ \mathbf{A}_{ik}], \qquad \mathbf{B}_j := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} \\ \mathbf{B}_{2j} \\ ... \\ ... \\ ... \\ \mathbf{B}_{kj} \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1, ..., l \text{ oraz } j = 1, ..., q.$$

Wówczas zachodzą równości (ostatnia wynika z części a) zadania):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ \mathbf{A}_l \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ ... \ \mathbf{B}_q], \qquad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{B} \\ ... \\ ... \\ ... \\ \mathbf{A}_l\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Następnie, z części b) zadania:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B} = [\mathbf{A}_i\mathbf{B}_1 \ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_2 \ ... \ \mathbf{A}_i\mathbf{B}_q] \text{ dla } \ i = 1, ..., l. \tag{8}$$

Wreszcie z części c) zadania oraz określenia $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{B}_j$ otrzymujemy $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_j = \sum_{s=1}^{k} \mathbf{A}_{is}\mathbf{B}_{sj}$ dla $i = 1, ..., l$ oraz $j = 1, .., q$. Wraz z (7) i (8) kończy to dowód. $\square$

Podział macierzy na klatki może zmniejszyć koszt obliczeń wykonywanych przy mnożeniu macierzy. Interesujące zadanie na ten temat jest w [Ko-Ma] na str. 38-39.

§ 3. Układy równań liniowych.

Już wyznaczenie zbioru wektorów, które danym przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przeprowadzane są na $\mathbf{0}$, wymaga rozwiązania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi. W tym paragrafie zajmiemy się badaniem układów równań liniowych i wnioskami, które z tego płyną dla teorii macierzy; do związków zaś z przekształceniami liniowymi powrócimy w końcowych paragrafach 4 i 5.

1. Układ równań liniowych i jego zbiór rozwiązań.

Definicja. **Równaniem liniowym** w $\mathbb{F}^k$ nazywamy wyrażenie $a_1x_1+...+a_kx_k = b$, gdzie $a_1, ..., a_k, b \in \mathbb{F}$. Układ l takich równań zapisujemy tak:

$$(U) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k = b_2 \\ \quad .... \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{lk}x_k = b_l \end{cases}$$

Mówimy, że

symbole $x_1, ..., x_k$ to **niewiadome** lub **zmienne** układu;

układ (U) jest **jednorodny**, gdy $b_1 = b_2 = ... = b_l = 0$;

$a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}$ to **współczynniki** i-tego równania, a b_i to jego **stała**;

i–te równanie jest **zerowe**, gdy $a_{i1} = a_{i2} = ... = a_{ik} = b_i = 0$.

Rozwiązaniem układu (U) w nazywamy każdy ciąg $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$ taki, że $\sum_{j=1}^k a_{ij}v_j = b_i$ dla $i = 1, 2, ..., l$. Gdy rozwiązań nie ma, układ nazywamy **sprzecznym**. Układ jednorodny jest niesprzeczny: rozwiązaniem jest $\mathbf{0}_k$.

Zadanie rozwiązania układu (U) polega na podaniu opisu **zbioru rozwiązań**:

$$R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{v} \text{ jest rozwiązaniem układu } (U)\} \tag{9}$$

Uwaga 1. Zwyczajowo, wyrazenia $0x_j$ w (U) pomijamy. Powoduje to jednak, że zbiór rozwiązań zależy od tego, w której z przestrzeni $\mathbb{F}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) układ jest rozpatrywany. Dla przykładu, zbiór rozwiązań pojedyńczego równania $x_1 = 0$ jest punktem $0 \in \mathbb{R}$, gdy rozpatrujemy je w $\mathbb{R}$, prostą $\{(0, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{R}\}$, gdy rozpatrujemy je w $\mathbb{R}^2$, oraz płaszczyzną $\{(0, x_2, x_3) : \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, gdy rozpatrywane jest w $\mathbb{R}^3$.

Ćwiczenie. Jakie zbiory zadają w $\mathbb{R}^3$ równania: a) $0 = 0$, b) $0 = 1$, c) $x_1 = x_2 = 1$.

Z układem (U) zwiążemy macierz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$, zwaną **macierzą współczynników** tego **układu** (U), oraz **wektor stałych** $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_l) \in \mathbb{F}^l$. Pełną informację o układzie daje **macierz rozszerzona**, powstała z $\mathbf{A}$ przez dopisanie wektora kolumnowego $\mathbf{b}$ i oznaczana przez $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

Układ równań (U) będziemy często zapisywać w postaci skróconej następująco:

$$(U)' \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie $\mathbf{x}$ oznacza zespół niewiadomych $(x_1, ..., x_k)$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.2.3, zadanie 15.

2. Operacje elementarne i doprowadzanie macierzy do postaci schodkowej.

Znana ze szkoły (dla małych k i l) metoda rozwiązywania układu (U) polega na rugowaniu niewiadomych przez wykonywanie następujących operacji:

a) dodanie do pewnego równania innego, pomnożonego przez skalar, oraz

b) pomnożenia jakiegoś równania (stronami) przez skalar różny od zera.

Dla wygody zapisu dołączmy tu jeszcze operację zamiany miejscami dowolnej pary równań układu. Ponadto, wypisywanie kolejnych otrzymywanych układów równań zastąpić chcemy podawaniem ich rozszerzonych macierzy. Celowe jest więc wprowadzenie następujących transformacji macierzy:

Definicja. **Elementarną operacją** na wierszach macierzy $\mathbf{M}$ nazywamy

(I) Dodanie do pewnego wiersza macierzy innego wiersza, pomnożonego przez skalar. (Jeśli do wiersza o numerze p dodajemy c–krotność wiersza o numerze q, i chcemy to zaznaczyć, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{[p]+c[q]} \mathbf{N}$, gdzie $\mathbf{N}$ to otrzymana macierz.)

(II) Pomnożenie pewnego wiersza macierzy przez skalar różny od zera. (Jeśli mnożymy wiersz p przez skalar c, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{c[p]} \mathbf{N}$.)

(III) Zamianę miejscami dwóch wierszy. (Jeśli zamieniane są wiersze o numerach p i q, to piszemy $\mathbf{M} \xrightarrow{([p],[q])} \mathbf{N}$.)

Gdy nie chcemy zaznaczać, o którą z tych operacji chodzi, piszemy $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$.

Powyższe operacje elementarne nazwiemy **wierszowymi**; słowo „elementarne” będziemy często opuszczać. Podobne operacje, wykonywane na kolumnach, nazwiemy **kolumnowymi**.

Przykład 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]+10[2]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{7[3]} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{([2],[3])} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

Zadanie 1. a) Jeśli $\mathbf{A}'$ można otrzymać z $\mathbf{A}$ przez wykonanie operacji wierszowych, to $\mathbf{A}$ można na tej drodze otrzymać z $\mathbf{A}'$. (Wskazówka: rozpatrzeć przypadek, gdy wykonujemy tylko jedną operację.)

b)* Otrzymać operację typu (III) wykonując kolejno kilka pozostałych operacji.

Definicja. Układy równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{A'x} = \mathbf{b}'$ są **równoważne**, gdy mają te same zbiory rozwiązań.

Zauważmy, że równoważne układy mają tyle samo niewiadomych.

Lemat 1. *Jeśli rozszerzoną macierz* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *układu* (U) *zmienić operacjami wierszowymi, to otrzymana macierz* $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ *wyznaczy układ* $\mathbf{A'x} = \mathbf{b}'$ *równoważny wyjściowemu.*

Dowód. Niech R oznacza zbiór rozwiązań wyjściowego, a R' -zmienionego układu równań. Ze względu na opisaną w zadaniu 1a) symetrię wystarcza pokazać, że $R \subset R'$. Dowód tej inkluzji sprowadza się do przypadku, gdy wykonujemy tylko z jedną operację, a wtedy jest on oczywisty. $\boxminus$

Uwaga 1. Przy oznaczeniach lematu, jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, to $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$.

Definicja. a) **Wyraz prowadzący** ciągu $(u_i)_{i=1}^k \in \mathbb{F}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ to najwcześniejszy niezerowy jego wyraz.

b) O macierzy $\mathbf{A}$ powiemy, że jest **wierszowo półzredukowana** (lub: **schodkowa**), gdy wyrazy prowadzące kolejnych jej niezerowych wierszy występują w coraz to dalszych kolumnach i każdy niezerowy wiersz poprzedza każdy z wierszy zerowych.

c) Gdy ponadto wszystkie wyrazy prowadzące wierszy są równe 1, a kolumny, w których występują, zawierają poza nimi same zera, to macierz $\mathbf{A}$ jest **wierszowo zredukowana** (lub: w postaci **normalnej Hermite'a**).

W dalszej części, będziemy słowo „wierszowo” opuszczać.

<u>Przykład 2.</u> (Wytłuszczone są wyrazy prowadzące wierszy.)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spośród tych macierzy, schodkowe są trzy ostatnie, a zredukowana tylko czwarta.

Lemat 2. *Każdą macierz można przeprowadzić w schodkową przez kolejne wykonanie pewnych operacji wierszowych (a nawet operacji wyłącznie typu I).*

<u>Dowód.</u> Zastosujemy indukcję względem liczby niezerowych kolumn. Można postępować tak:

i) Obrać najwcześniejszą niezerową kolumnę wyjściowej macierzy; niech ma ona numer p.

ii) Przez dodanie odpowiedniego wiersza do pierwszego uczynić pierwszy wyraz kolumny p niezerowym. (Być może nic nie trzeba robić, a prostsza może być zamiana tych wierszy.)

iii) Przez odjęcie odpowiednich krotności pierwszego wiersza otrzymanej macierzy od następnych jej wierszy, wyzerować wszystkie wyrazy kolumny p, poza pierwszym.

iv) W powstałej macierzy pominąć pierwszy wiersz i pierwszych p kolumn i postępować dalej w ten sam sposób (inaczej mówiąc, wykorzystać założenie indukcyjne). $\square$

Lemat 3. *Przy pomocy operacji typu I i II można macierz schodkową przeprowadzić w zredukowaną, bez zmiany miejsc, w których występują wyrazy prowadzące wierszy.*

<u>Dowód.</u> Wystarczy wykonać następujące operacje:

v) Pomnożyć niezerowe wiersze rozważanej macierzy przez odpowiednie skalary, by uczynić wyrazy prowadzące wierszy równymi 1.

vi) Kolejno, dla $i = 2, ..., r$ (gdzie r to liczba niezerowych wierszy) odjąć odpowiednie krotności wiersza i od poprzedzających. $\boxminus$

Wniosek 1. *Zadana macierz* $\mathbf{A}$ *jest* **wierszowo równoważna** *macierzy zredukowanej* $\mathbf{N}$*, tzn. istnieje ciąg macierzy* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n = \mathbf{N}$ *takich, że każda z macierzy* $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$ *powstaje przez wykonanie pewnej operacji wierszowej na macierzy poprzedzającej.*

Powyższą macierz $\mathbf{N}$ nazwiemy **postacią zredukowaną** lub **normalną** macierzy $\mathbf{A}$. Podobnie, dzięki lematowi 2 możemy mówić o **postaci schodkowej** macierzy $\mathbf{A}$.[2]

<u>Przykład 3.</u> (Przerywaną linią poziomą odcięto rozważaną w następnym kroku klatkę, a tłustym drukiem zaznaczono kolumny czy też wyrazy istotne dla niektórych kroków. (Ostatnie 2 kroki są jak opisano w dowodzie lematu 3, a wcześniejsze – lematu 2.)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & -2 & 3 & 15 & 0 \\ \mathbf{2} & 4 & 1 & 16 & 15 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\mathbf{1} & 5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}$$

[2] Postać schodkowa nie jest jedyna, zaś zredukowana jest, co za Hermitem zauważymy w następnym rozdziale. Z jednoznaczności tej jednak nie będziemy korzystać, poza przypadkiem macierzy niesobliwych, omówionym w §5.1.

Zadania uzupełniające.

1. Udowodnić, że wykonując wyłącznie operacje wierszowe typu (I) można daną macierz przeprowadzić w macierz różniącą się od zredukowanej tylko tym, że wyrazem prowadącym jej ostatniego niezerowego wiersza niekoniecznie jest 1.

2. Dowieść, że przy pomocy operacji wierszowych typu (I) można
   a) zamienić miejscami dwa wskazane wiersze macierzy, zmieniając przy tym znak jednego z nich;
   b) zmienić znak dwóch wskazanych wierszy.

3. Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami, których iloczyn ma sens. Udowodnić, że jeśli dany ciąg operacji wierszowych przeprowadza $\mathbf{A}$ w $\mathbf{A}'$, to przeprowadza on też $\mathbf{AB}$ w $\mathbf{A}'\mathbf{B}$. Podobnie, jeśli ciąg operacji kolumnowych przeprowadza $\mathbf{B}$ w $\mathbf{B}'$, to ten sam ciąg przeprowadza $\mathbf{AB}$ w $\mathbf{AB}'$. (Wskazówka: wystarczy rozważyć pojedyńczą operację. Wykorzystać wzór (2.5) z §1.3.)

4. * Niech $\mathbf{A}$ będzie niezerową macierzą o wyrazach w zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, zaś d będzie największym wspólnym dzielnikiem jej wyrazów. Rozpatrzmy zbiór tych macierzy $\mathbf{B}$, które można otrzymać z $\mathbf{A}$ przy pomocy ciągu operacji typu (I) nad $\mathbb{Z}$, wykonywanych na wierszach i na kolumnach. (Wyjaśnienie: „nad $\mathbb{Z}$" oznacza, że krotności dodawanych wierszy czy kolumn są całkowite.) Udowodnić, że jeśli macierz $\mathbf{A}$ nie jest rozmiaru 1×1, to
   a) Wszystkie wyrazy takich macierzy $\mathbf{B}$ są podzielne przez d.
   b)* d jest najmniejszą liczbą dodatnią, będącą wyrazem którejś z macierzy $\mathbf{B}$.
   c) Wśród macierzy $\mathbf{B}$ istnieje taka, której wyraz stojący w lewym górnym rogu jest równy d, a pozostałe wyrazy pierwszego wiersza i pierwszej kolumny są równe 0.
   d) Macierz $\mathbf{A}$ można opisanymi operacjami przeprowadzić w taką macierz $\mathbf{B}$, że $b_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ (a także liczba b_{ii} dzieli b_{jj} gdy $i < j$; jest to **lemat Smitha**).

3. Metoda rugowania niewiadomych

Metoda ta, ujęta w pewien schemat przez Gaussa, polega na zastąpieniu układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ układem $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, gdzie $\mathbf{A}'$ jest postacią schodkową, lub zredukowaną, macierzy $\mathbf{A}$. Ponieważ układy te są równoważne, więc pozostaje zająć się układami o schodkowej macierzy współczynników.

Definicja. Gdy macierz $\mathbf{A}$ układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest schodkowa i jej j–ta kolumna zawiera wyraz prowadzący pewnego wiersza, to tak tę kolumnę, jak i niewiadomą x_j nazywamy **prowadzącymi**. Pozostałe niewiadome i kolumny nazwiemy **wtórnymi**.

Twierdzenie 1. *Niech w układzie równań* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *o schodkowej macierzy* $\mathbf{A}$ *nie występują równania postaci* $0 = b_i$*, gdzie* $b_i \neq 0$*. Wówczas układ jest niesprzeczny i każde jego rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone przez ustalenie wartości niewiadomych wtórnych, które mogą być dowolne. (Gdy nie ma niewiadomych wtórnych oznacza to, że rozwiązanie jest jedyne.)*

Dowód. Załóżmy wpierw, że macierz $\mathbf{A}$ jest zredukowana. Wtedy każda niewiadoma prowadząca występuje w jednym równaniu układu, ze współczynnikiem 1. (Gra rolę brak równań $0 = b_i$, gdzie $b_i \neq 0$.) Pozostawmy te niewiadome po lewych stronach, a pozostałe wyrażenia $a_{ij}x_j$ przenieśmy na strony prawe; równania zaś $0 = 0$ (jeśli takie są) pomińmy. Zakładając dla ustalenia uwagi, że wtórnymi są niewiadome $x_{r+1}, ..., x_k$, otrzymujemy następujący układ równań, równoważny wyjściowemu

$$x_i = b_j - \sum_{j=r+1}^{k} a_{ij}x_j \text{ dla } i = 1, ..., r. \tag{10}$$

Nadając niewiadomym wtórnym zadane wartości $v_{r+1}, ..., v_k$, a wcześniejsze wyznaczając zgodnie z (10), otrzymujemy jedyne rozwiązanie $\mathbf{v}$ takie, że v_j jest jego j–tą współrzędną dla $j = r+1, ..., k$.

Przypadek schodkowej macierzy $\mathbf{A}$ sprowadzamy do powyższego, redukując klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ w oparciu o lemat 3 z p.2. □

Wniosek 1. *Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o schodkowej macierzy $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy jest niesprzeczny, gdy nie występuje w nim równanie postaci $0 = b_i$ dla $b_i \neq 0$. Układ ten ma jedyne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczny i macierz $\mathbf{A}$ nie ma kolumn wtórnych.* □

Wniosek 2. *Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy postać schodkowa $\mathbf{A}'$ macierzy $\mathbf{A}$ ma kolumny wtórne.*

Dowód. Wynika to z wniosku 1, zastosowanego do równoważnego układu $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Wniosek 3. *a) Gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $l < k$, to układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_l$ ma rozwiązanie niezerowe.*
b) Dla $l < k$ nie istnieje różnowartościowe przekształcenie liniowe $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.

Dowód. a) Postać schodkowa $\mathbf{A}'$ macierzy $\mathbf{A}$ ma kolumny wtórne (bo ma więcej kolumn niż wierszy).

b) Niech przekształcenie liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ będzie liniowe. Przyjmijmy $\mathbf{A} := [L]$; jeśli $l < k$, to $\mathbf{Av} = \mathbf{0}_l$ dla pewnego niezerowego wektora $\mathbf{v}$. Zachodzi więc wtedy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_l = L(\mathbf{0}_k)$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_k$, tzn. przekształcenie L nie jest różnowartościowe. □

Przykład 1. Rozwiążemy układ równań:

$$(u) \qquad \begin{cases} x + 2y - z + 5p + 12q = 1 \\ 2z + 4p - 6q = 2 \\ x + 2y - 2z + 3p + 15q = 0 \\ 2x + 4y + z + 16p + 15q = 5 \end{cases}$$

Jego rozszerzoną macierzą jest macierz $\mathbf{M}$ z przykładu 2 w p.2. Korzystając z lematu z p.1 stwierdzamy więc, że jest on równoważny układowi następującemu:

$$(u') \qquad \begin{cases} x + 2y + 7p + 9q = 2 \\ z + 2p - 3q = 1 \end{cases}$$

Pozostaje rozwiązać układ (u'), którego macierz współczynników jest zredukowana. Pozostawienie po jednej stronie tylko niewiadomych prowadzących, zgodnie z dowodem twierdzenia, daje $x = 2 - 2y - 7p - 9q$ i $z = 1 - 2p + 3q$. Stąd $R = \{(x, y, z, p, q) \in \mathbb{R}^5 : (2 - 2y - 7p - 9q, y, 1 - 2p + 3q, p, q) : y, p, q \in \mathbb{R}\}$.

Zadania uzupełniające.

1. Trzy proste w $\mathbb{R}^2$ zadane są równaniami $ax + by + c = 0$, $cx + ay + b = 0$, $bx + cy + a = 0$, odp. Udowodnić, że przecinają się one w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c = 0$.

2. Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$, gdzie $k < l$. Udowodnić, że dla pewnego $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^l$ układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest sprzeczny.

3. Udowodnić, że układ równań liniowych wtedy i tylko wtedy jest sprzeczny, gdy 0=1 jest kombinacją liniową jego równań (t.j. istnieją skalary c_i takie, że po pomnożeniu pierwszgo równania układu przez c_1, drugiego przez c_2 itd. i dodaniu otrzymanych równań, otrzymujemy równanie $0 = 1$).

4. Na kolumnach macierzy $\mathbf{A}$ dokonano pojedyńczej operacji elementarnej $\mathcal{O}$, otrzymując macierz $\mathbf{A}'$. Niech wektor $\mathbf{v}'$ będzie rozwiązaniem „zmienionego” układu równań $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}$, przy czym $\mathbf{v}'$ traktujemy jako macierz o jedynym wierszu (równym $\mathbf{v}'$).

a) Udowodnić, że jeśli na $\mathbf{v}'$ wykonać operację $\mathcal{O}'$ opisaną niżej, to otrzymamy rozwiązanie $\mathbf{v}$ „wyjściowego" układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tu $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ jeśli $\mathcal{O}$ jest operacją typu (II) lub (III), zaś jeśli $\mathcal{O}$ jest dodaniem do kolumny p–tej c–krotności kolumny q-tej, to $\mathcal{O}'$ jest dodaniem do kolumny q–tej c–krotności kolumny p-tej. (W sprawdzeniu przyjąć $p = 1, q = 2$.)

b) Odwrotnie, jak z rozwiązania układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ otrzymać rozwiązanie układu $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$?

Zadania ze zbioru Kostrykina: z §I.2.3: 3,6 (zaniedbać polecenie o wzorach Cramera), 7,8,9,10.

4. Opis zbioru rozwiązań

Definicja. **Rozwiązaniem ogólnym** układu równań liniowych w $\mathbb{F}^k$ nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : T \to \mathbb{F}^k$, gdzie T jest dowolnym zbiorem, taką, że $f(T)$ jest zbiorem rozwiązań rozważanego układu. Jak dla każdej funkcji, w miejsce „$f : T \to \mathbb{F}^k$ " piszemy też „$f(t)$ $(t \in T)$" lub „$T \ni t \mapsto f(t)$", jak wygodniej.

Gdy T jest zbiorem skończonym (co ma miejsce, gdy $\#\mathbb{F} < \infty$) możemy o rozwiązaniu ogólnym myśleć jako o liście, na której każde rozwiązanie pojawia się jeden raz. W pozostałym przypadku też możemy tak myśleć, lecz lista jest nieskończona.

Nie zawsze rozwiązanie ogólne przekazuje użyteczne informacje. Dlatego będziemy dążyć do tego, by dziedzina T funkcji f była postaci $\mathbb{F}^s$ dla pewnego s, a funkcja f była zadana prostymi wzorami.

Przykład 1. Rozważmy ponownie układ równań z przykładu 1 z p.3. Dowiedliśmy, że za rozwiązanie ogólne można przyjąć $\mathbb{R}^3 \ni (y, p, q) \mapsto (2 - 2y - 7p - 9q, y, 1 - 2p + 3q, p, q)$. (Dlaczego funkcja ta jest różnowartościowa?) Rozwiązanie to można też zapisać tak:

$$(x, y, z, p, q) = (2, 0, 1, 0, 0) + y(-2, 1, 0, 0, 0) + p(-7, 0, -2, 1, 0) + q(-9, 0, 3, 0, 1)$$

gdzie y, p, q mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. $\square$

Okazuje się, że każdy układ równań liniowych ma rozwiązanie ogólne takiej postaci:

Twierdzenie 1. *Niesprzeczny układ równań linowych w $\mathbb{F}^k$ ma rozwiązanie ogólne postaci*

$$\mathbf{w}_0 + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s \quad (c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}),$$

dla pewnej liczby $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i pewnych wektorów $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s \in \mathbb{F}^k$.

Dodatek: *Można uzyskać, by współrzędne wektorów $\mathbf{w}_i$ należały do każdego podciała ciała $\mathbb{F}$, które zwiera wszystkie współczynniki i stałe układu.*

Dowód. Zredukujmy klatkę $\mathbf{A}$ rozszerzonej macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ badanego układu, otrzymując układ $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ równoważny wyjściowemu. Możemy założyć, że kolumny wtórne macierzy $\mathbf{A}'$ występują na końcowych miejscach $r + 1, ..., k$. (Gdy tak nie jest, zmieniamy numerację niewiadomych.)

Z dowodu twierdzenia 1 w p.3 wiemy, że każde rozwiązanie jest postaci

$$\mathbf{v} = (b_1' - \textstyle\sum_{p>r} a_{1p}' v_p, ..., b_r' - \sum_{p>r} a_{rp}' v_p, v_{r+1}, ..., v_k) \qquad (v_{r+1}, ..., v_k \in \mathbb{F}).$$

Przez proste przektałcenie zapisujemy je tak: $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + \sum_{j=1}^{k-r} v_{r+j}\mathbf{w}_j$, gdzie

$$\mathbf{w}_0 := (b_1', ..., b_r', 0, ..., 0) \text{ i } \mathbf{w}_j = (-a_{1j}', ..., -a_{rj}', 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$$

(wyraz 1 jest na $r+j$-tym miejscu). Przy $s := k-r$ wynika stąd, że dla dowolnych $c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$ wektor $\mathbf{v} = \mathbf{w}_0 + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ jednoznacznie wyznacza $c_1, ..., c_s$ (bo c_j jest jego $(r + j)$–tą współrzędną). Wobec tego $(c_1, ..., c_s) \mapsto \mathbf{w}_0 + c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ jest przekształceniem różnowartościowym, którego obraz jest zbiorem rozwiązań układu.

By uzasadnić „Dodatek” zauważmy, że wyrazy macierzy $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ otrzymujemy z wyrazów macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ wykonując dzielenie, mnożenie i dodawanie. Wraz z podanymi wzorami na wektory $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ dowodzi to, że mają one żądaną własność. □

Zajmiemy się bliżej przypadkiem jednorodnym.

Definicja. Powiemy, że wektory $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s \in \mathbb{F}^k$, gdzie $s \geq 1$, tworzą **fundamentalny zbiór rozwiązań** jednorodnego układu równań w $\mathbb{F}^k$, gdy

i) $c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$ $(c_1, ..., c_s \in \mathbb{F})$ jest rozwiązaniem ogólnym (równoważnie: każde rozwiązanie jednoznacznie przedstawia się jako kombinacja $c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_s\mathbf{w}_s$, dla $c_1, ..., c_s \in \mathbb{F}$, i każda taka kombinacja jest rozwiązaniem), oraz

ii) współrzędne wektorów $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s$ leżą w każdym podciele ciała $\mathbb{F}$, które zawiera współczynniki układu.

Wniosek 1. *Jeśli jednorodny układ równań liniowych ma rozwiązanie niezerowe, to ma i fundamentalny zbiór rozwiązań.*

Dowód. Przy oznaczeniach dowodu twierdzenia mamy teraz $\mathbf{b} = \mathbf{0}_l$. Stąd $\mathbf{b}' = \mathbf{0}_l$ (patrz uwaga 1 w p. 2) i wobec tego $\mathbf{w}_01 = \mathbf{0}_k$. Ponadto, $s > 0$, bo inaczej $\mathbf{0}_k$ byłoby jedynym rozwiązaniem. □

Przykład 2. a) Rozpatrzmy jednorodny układ równań nad $\mathbb{C}$, którego lewe strony są jak w przykładzie 1 z p.3. Wcześniejsze rachunki pokazują, że fundamentalny zbiór rozwiązań tworzą wektory $\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{w}_2 = (-7, 0, -2, 1, 0)$, $\mathbf{w}_3 = (-9, 0, 3, 0, 1)$. Rozwiązanie ogólne jest postaci

$$y(-2, 1, 0, 0, 0) + s(-7, 0, -2, 1, 0) + t(-9, 0, 3, 0, 1) \quad (y, s, t \in \mathbb{C}) \tag{11}$$

Gdyby układ był rozpatrywany nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ zmieniłoby się tylko to, że w (11) należałoby zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{Q}$, dla tych samych wektorów $\mathbf{w}_i$.

b) W równaniu $x_1 + x_2 = 0$, rozpatrywanym nad $\mathbb{R}$, rozwiązaniem ogólnym jest $c\mathbf{w}$ $(c \in \mathbb{R})$, gdzie $\mathbf{w} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Jednak współrzędne wektora $\mathbf{w}$ nie należą do ciała $\mathbb{Q}$, zawierającego współczynniki równania, i dlatego $\{\mathbf{w}\}$ nie jest zbiorem fundamentalnym rozwiązań. Oczywiście wzór $c\mathbf{w}$ $(c \in \mathbb{Q})$ nie daje już rozwiązanie ogólnego nad $\mathbb{Q}$, bo $c\mathbf{w}$ nie ma współrzędnych wymiernych np. dla $c = 1$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech wszystkie współczynniki i stałe układu równań liniowych leżą w pewnym podciele $\mathbb{G}$ ciała $\mathbb{F}$. Wówczas:

a) Jeśli układ ten jest niesprzeczny w $\mathbb{F}^k$, to jest niesprzeczny i w $\mathbb{G}^k$,

b) Jeśli układ ma w $\mathbb{F}^k$ jedyne rozwiązanie, to leży ono w $\mathbb{G}^k$.

c) Jeśli układ ma jedyne rozwiązanie w $\mathbb{G}^k$, to ma i jedyne rozwiązanie w $\mathbb{F}^k$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.2.3, zadania 1,2,4,24 *. (Wskazówka do zadania ....: zadania uzupełniające 2 w p.2 i p.3.)

5. Równania macierzowe $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ i $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Poznaną metodą można prócz układów równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozwiązywać i pewne równania macierzowe.

A). Niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,q}$. Pytamy: czy istnieją i jakie są macierze $\mathbf{X}$, dla których $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$?

Możemy założyć, że $p = l$ (inaczej rozwiązań brak). Szukana macierz $\mathbf{X}$ musi mieć k wierszy i q kolumn. Jeśli jej kolumny oznaczyć przez przez $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_q$, a macierzy $\mathbf{B}$ przez $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_q$, to równość $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ możemy zapisać w postaci układu równości

$$\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{Ax}_q = \mathbf{b}_q.$$

(Patrz uwaga 1 w §1.3.) Każde z równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ można rozwiązać opisaną w poprzednim paragrafie metodą i w ten sposób ustalić, czy żądana macierz istnieje i jakiej postaci są jej kolumny. Redukcję klatki $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}_j]$ można przy tym wykonać dla wszystkich j równocześnie, biorąc macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ powstałą z $\mathbf{A}$ przez dopisanie wszystkich kolumn $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_q$ i wykorzystując następujący

Lemat 1. *Niech macierze* $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ *i* $[\mathbf{A}'|\mathbf{B}']$ *będą wierszowo równoważne i niech* $\mathbf{X}$ *będzie dowolną macierzą. Wówczas* $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

Dowód. Oznaczmy kolumny $\mathbf{B}'$ przez $\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_q$. Na mocy lematu 1 w §3.2, równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ i $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_j$ są równoważne. Jak wyżej, równość $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (odp. $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy j–ta kolumna macierzy $\mathbf{X}$ jest rozwiązaniem równania $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j$ (odp. równania $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'_j$), dla $j = 1, ..., q$. Stąd wynika teza. □

Możemy więc równanie $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ badać przez doprowadzenie macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ do postaci $[\mathbf{A}'|\mathbf{B}']$, gdzie klatka $\mathbf{A}'$ jest zredukowana, i zastąpienie go równaniem $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

Wniosek 1. *Gdy postać zredukowana macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ *jest macierzą jednostkową, to dla każdej macierzy* $\mathbf{B}$ *o* k *wierszach, równanie* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *ma jedyne rozwiązanie.*

Dowód. Powyżej, $\mathbf{A}' = \mathbf{I}_k$, więc jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$ jest $\mathbf{B}'$. □

Przykład 1. Rozwiązać równanie $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$ $\to \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{array}\right]$. Ostatnia klatka jest jedynym rozwiązaniem równania. □

Uwaga 1. Gdy klatka $\mathbf{A}'$ nie jest jednostkowa, np. gdy macierz $\mathbf{A}$ nie jest kwadratowa, to i tak otrzymujemy równania $\mathbf{A}'\mathbf{x}_j = \mathbf{b}'_j$ na kolejne kolumny rozwiązań, ze zredukowaną macierzą $\mathbf{A}'$. Pozwala to dać parametryczny opis rozwiązań, przez podanie opisu kolumn, lub wykazać brak rozwiązań.

B). By rozwiązać równanie $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ zauważamy, że jest ono równoważne równaniu $\mathbf{A}^t\mathbf{X}^t = \mathbf{B}^t$, a to umiemy badać. (Skorzystaliśmy z lematu 3iii) w §1.3.) Dla przykładu, z przeprowadzonych rachunków wynika, że jedynym rozwiązaniem równania

$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1 i 3 z §I.4.2.

§ 4. Zastosowania do badania przekształceń liniowych $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.

1. Przekształcenia liniowe, wyznaczone równaniem $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ lub $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Uwaga 1. Niech dane będą przekształcenia liniowe $S : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$ i $T : \mathbb{F}^l \to \mathbb{F}^n$. Spytajmy: czy istnieją przekształcenia liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ takie, że $T \circ L = S$, i jak je wyznaczyć? By na nie odpowiedzieć zauważmy, że macierz $[L]$ szukanego przekształcenia jest, na podstawie ...., rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} := [T]$ i $\mathbf{B} := [S]$. Również i odwrotnie, przekształcenie, którego macierz jest takim rozwiązaniem, ma żądaną własność. Np. z rachunków z §3.5 wynika, że gdy $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ są zadane wzorami $S(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, x_1 + x_3)$ i $T(x_1, x_2) =$

$(x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2)$, to $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3)$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$ jest jedynym przekształceniem z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ takim, że $T \circ L = S$.

Uwaga 2. Można też spytać: dla danych przekształceń liniowych $S : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$ i $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^l$, czy istnieją przekształcenia liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ takie, że $L \circ S = T$, i jak je wyznaczyć? Tym razem L ma żądaną własność, gdy jego macierz jest rozwiązaniem równania $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} := [S]$ i $\mathbf{B} := [T]$. Np. z rachunków z §3.5 wynika, że przy $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określonych wzorami $S(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 4x_2)$ i $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1, -x_1 + x_2)$, wzór $L(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2, -2x_1 + \frac{3}{2}x_2, 3x_1 - 2x_2)$ zadaje jedyne przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $L \circ S = T$.

Uwaga 3. Na koniec, niech dane będą wektory $\mathbf{a}_i \in \mathbb{F}^k$ i $\mathbf{b}_i \in \mathbb{F}^l$ $(i = 1, ..., n)$. Pytamy: czy istnieją i jak wyznaczyć przekształcenia liniowe $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ takie, że $L(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ dla $i = 1, ..., n$? Żądana własność jest równoważna temu, by $[L]\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ dla $i = 1, ..., n$ – a więc temu, by macierz $[L]$ była rozwiązaniem rownania $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{k,n}$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,n}$ to macierze o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ i $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$, odpowiednio. (Patrz §3.5.) Np. jak w uwadze 2 wnosimy, że podane tam przekształcenie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jest jedynym (liniowym), dla którego $L(1, 2) = (0, 1, -1)$ i $L(3, 4) = (1, 0, 1)$.

Do zagadnień poruszonych w powyższych uwagach powrócimy, rozpatrując je z ogólniejszego punktu widzenia, w zadaniach .... w §III. ....

2. Obraz przekształcenia liniowego $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ a układy równań liniowych.

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą o kolumnach $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^l$. Jak wiemy z zad. 1b) w §1.2,

$$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Av} = v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k \text{ dla } \mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k \qquad (*)$$

Każde rozwiązanie układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ można więc interpretować jako ciąg współczynników pewnego przedstawienia $\mathbf{b}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$, a także jako ciąg współrzędnych kartezjańskich pewnego wektora $\mathbf{v} \in L_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{b})$.

Definicja. a) **Przestrzenią kolumn** macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy zbiór $\{\sum_{j=1}^{k} c_j\mathbf{a}_j : c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}\}$ wszystkich kombinacji liniowych jej kolumn $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$. (Jest to podzbiór przestrzeni $\mathbb{F}^l$.)

b) **Obrazem** przekształcenia $L_{\mathbf{A}}$, oznaczanym przez $\mathrm{im}(L_{\mathbf{A}})$, nazywamy zbiór $\{L_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{F}^k\}$.

Z równości (*) wynika równoważność warunków:
a) układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest niesprzeczny;
b) $\mathbf{b}$ leży w obrazie przekształcenia $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, tzn. $\mathbf{b} \in L_{\mathbf{A}}(\mathbb{F}^k)$;
c) $\mathbf{b}$ leży w przestrzeni kolumn macierzy $\mathbf{A}$ (czyli jest ich kombinacją liniową).

Poprzez a), możemy b) i c) badać rozwiązując układ równań liniowych.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §I.2.1: 3,7,8,9,11,17,18,19*,20* (w dwóch ostatnich zadaniach, końcowe „niezależne" ma zbędne „nie".)

3. Opisanie obrazu przekształcenia układem równań.

Definicja. Mówimy, że dany zbiór jest **opisany** układem równań, gdy jest równy zbiorowi rozwiązań tego układu.

Niekiedy użyteczne jest opisanie przestrzeni kolumn danej macierzy $\mathbf{A}$, czyli obrazu przekształcenia $L_{\mathbf{A}}$, jednorodnym układem równań liniowych. Na przykład, warto tak zrobić już wtedy, gdy spośród wielu wektorów $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ chcemy wybrać te, które należą do $\mathrm{im}(L_{\mathbf{A}})$. Wielokrotne bowiem sprawdzanie niesprzeczności kolejnych układów $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ szybko okaże się zbyt czasochłonne.

Cel nasz możemy osiągnąć następująco.

Traktujmy $\mathbf{b}$ jako ciąg l zmiennych $b_1, ..., b_l$. Utwórzmy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ i operacjami wierszowymi przeprowadźmy ją w $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$, gdzie klatka $\mathbf{A}'$ jest schodkowa. Każdy wyraz otrzymanej kolumny $\mathbf{b}'$ jest pewną kombinacją liniową zmiennych $b_1, ..., b_l$, której współczynniki zależą tylko od wykonanego ciągu operacji. Szukanym układem równań jest $b'_i = 0$ dla $i = r+1, ..., l$, gdzie r to liczba niezerowych wierszy macierzy $\mathbf{A}'$ i b'_i traktujemy jako wymienioną kombinację zmiennych $b_1, ..., b_l$. (Wynika to z wniosku 1 w §3.3.)

Przykład 1. Znajdziemy układ równań, którego zbiorem rozwiązań jest przestrzeń kolumn macierzy $\mathbf{A}$ o kolumnach $(1, 2, 2, 3)$ i $(1, -1, 3, -2)$.

Przeprowadzamy więc w macierz schodkową klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \\ 3 & -2 & b_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 3b_3 + b_2 - 8b_1 \\ 0 & 0 & b_4 + 5b_3 - 13b_1 \end{bmatrix}$$

Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wtedy i tylko wtedy jest niesprzeczny, gdy spełnione są obie równości $3b_3 + b_2 - 8b_1 = 0$ i $b_4 + 5b_3 - 13b_1 = 0$. Jest to szukany układ równań, w zmiennych $b_1, ..., b_4$, opisujący badaną przestrzeń kolumn. (Można te zmienne w równaniach jeszcze uporządkować.)

§ 5. Macierze nieosobliwe.

Definicja. Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest **nieosobliwa**, jeśli jest wierszowo równoważna macierzy jednostkowej, zaś **osobliwa** w przeciwnym razie.

Macierze nieosobliwe pojawiły się już niejawnie we wniosku 1 w §3.5. W dalszej części wykładu odgrywają one znaczną rolę.

1. Macierze nieosobliwe a układy równań i przekształcenia liniowe.

Zadanie 1. Wierszowo zredukowana macierz kwadratowa albo jest jednostkowa, albo ma ona kolumny wtórne i jej ostatni wiersz jest zerowy.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne dla $k \times k$–macierzy $\mathbf{A}$:*

a) układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ma tylko zerowe rozwiązanie;

b) dla każdego wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$, układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest niesprzeczny;

c) dla każdego wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$, układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ma jedyne rozwiązanie;

d) macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa;

e) każda postać zredukowana macierzy $\mathbf{A}$ jest macierzą jednostkową.

Dowód. a)⇒e). Jeśli zachodzi a), to postać zredukowana $\mathbf{A}'$ macierzy $\mathbf{A}$ nie ma kolumn wtórnych, patrz wniosek 2 w §3.3. Na podstawie zadania, $\mathbf{A}' = \mathbf{I}$.

nie e)⇒ nie b). Niech Ψ będzie ciągiem operacji wierszowych, doprowadzających $\mathbf{A}$ do postaci zredukowanej $\mathbf{A}' \neq \mathbf{I}_k$. Na podstawie zadania, układ $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ jest sprzeczny. Wykonajmy na $[\mathbf{A}'|\mathbf{e}_k]$ ciąg operacji przeciwny do Ψ, otrzymując macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ dla pewnego $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jest sprzeczny, bo jest równoważny układowi $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$.

d)⇒c). Niech $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$. Zredukujmy klatkę $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, uzyskując macierz $[\mathbf{I}|\mathbf{b}']$. Układ $\mathbf{Ix} = \mathbf{b}'$ ma oczywiście jedyne rozwiązanie, więc jest tak i dla równoważnego z nim układu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Implikacje c)⇒a), c)⇒b) i e)⇒d) są oczywiste. □

Wniosek 1. *Dla liniowego przekształcenia $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ równoważne są warunki:*

a′) przekształcenie L jest różnowartościowe;

b′) przekształcenie L jest „na”;

c′) przekształcenie L jest bijektywne;

d) Macierz $\mathbf{A} := [L]$ tego przekształcenia jest nieosobliwa.

Dowód. Niech $\mathbf{A} := [L]$. Wówczas $L(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, wobec czego warunek a′) pociąga za sobą warunek a) z twierdzenia, a warunki b′) i c′) są przeformułowaniem warunków b) i c), odpowiednio. Ponieważ ponadto c′)⇒a′), więc teza wniosku wynika z twierdzenia. □

2. Odwrotność macierzy i odwrotność przekształcenia.

Definicja. a) Jeśli macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ spełniają warunek $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k = \mathbf{BA}$, to każdą z nich nazywamy **odwrotnością** drugiej i piszemy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$. Macierz, posiadającą odwrotność, nazywamy **odwracalną** (względem mnożenia).

b) Podobnie, gdy przekształcenia $F : X \to Y$ i $G : Y \to X$ spełniają warunki $G \circ F = I_X$ i $F \circ G = I_Y$, to powiemy, że są one **odwracalne** i każde z nich jest **odwrotnością** drugiego; piszemy też $G = F^{-1}, F = G^{-1}$.

Zadanie 1. a) Przekształcenie $F : X \to Y$ wtedy i tylko wtedy jest odwracalne, gdy jest 1-1 i „na”.

b) Gdy przekształcenia $F : X \to Y$ i $G : Y \to X$ spełniają warunek $G \circ F = I_X$, przy czym F jest „na” lub G jest 1-1, to $F \circ G = I_Y$.

c) Przy $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2$ oraz $F(a) = (a, 0), G(a, b) = a$ $(a, b \in \mathbb{R})$ zachodzi $G \circ F = I_X$, lecz $F \circ G \neq I_Y$.

d) Podobnie, dla $\mathbf{A} = [1\ \ 0], \mathbf{B} = \mathbf{A}^t$ zachodzi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_1$, lecz $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}_2$.

Zadanie 2. Odwrotność odwracalnej macierzy jest jedyna, i tak samo dla przekształceń. (Wskazówka: wykorzystać łączność mnożenia czy składania.)

Uwaga 1. Dla macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ równość $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = I_{\mathbb{F}^k}$. (Patrz zadanie 1a) w §2.1 i stwierdzenie 1′ w §1.3.) Stąd:

Wniosek 1. *Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są wzajemnie odwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy wzajemnie odwrotne są przekształcenia $L_\mathbf{A}$ i $L_\mathbf{B}$.*

Twierdzenie 1. *Gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ spełniają warunek $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$, to $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_k$, tzn. każda z tych macierzy jest odwrotnością drugiej.*

Dowód. Niech $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_k$. Wtedy $L_\mathbf{A} \circ L_\mathbf{B} = L_{\mathbf{AB}} = I_{\mathbb{F}^k}$, skąd przekształcenie $L_\mathbf{A}$ jest „na”. Z wniosku 1 w p.1 wynika więc, że jest ono różnowartościowe, a z zadania 1b) – że przekształcenia $L_\mathbf{A}$ i $L_\mathbf{B}$ są wzajemnie odwrotne. Tak więc $L_\mathbf{B} \circ L_\mathbf{A} = I_{\mathbb{F}^k}$ i wobec tego $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_k$. □

Twierdzenie 2. *Macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy jest odwracana, gdy jest nieosobliwa.*

Dowód. Nieosobliwość macierzy $\mathbf{A}$ jest równoważna bijektywności przekształcenia $L_\mathbf{A}$, patrz wniosek 1 w p.1. Bijektywność zaś tego przekształcenia jest równoważna jego odwracalności, patrz zadanie 1a), a więc i odwracalności macierzy $\mathbf{A}$. (Korzystamy z wniosku 1.) □

Uwaga 2. a) Nazw „macierz odwracalna” i „macierz nieosobliwa” będziemy więc używać wymiennie.

b) Uzyskane wyniki umożliwiają ustalenie, czy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest odwracalna, a także wskazanie $\mathbf{A}^{-1}$, przez zbadanie równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_k$. Postępujemy następująco:

1. Tworzymy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_k]$ i wykonując ciąg wierszowych operacji elementarnych doprowadzamy ją do postaci $[\mathbf{N}|\mathbf{C}]$, gdzie klatka $\mathbf{N}$ jest zredukowana;

2. Macierz $\mathbf{A}$ wtedy i tylko wtedy jest odwracalna, gdy $\mathbf{N} = \mathbf{I}_k$ (wynika to z twierdzenie 2); przy tym jeśli $\mathbf{N} = \mathbf{I}_k$, to $\mathbf{C}$ jest na podstawie wniosku 1 odwrotnością macierzy $\mathbf{A}$ (bo jest rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{I_k}$, patrz §3.5.)

Przykład 1. Znaleźć $\mathbf{A}^{-1}$ (jeśli istnieje) dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Tworzymy macierz $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ i redukujemy jej klatkę $\mathbf{A}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest więc odwracalna (bo jej postacią zredukowaną jest $\mathbf{I}_3$) i $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Zbadajmy pewne własności macierzy odwracalnych (=nieosobliwych):

Twierdzenie 3. *a) Odwrotność macierzy odwracalnej* $\mathbf{A}$ *też jest taką macierzą, i* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
b) Iloczyn macierzy odwracalnych $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ *też jest odwracalny, i* $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
c) Jeśli macierz $\mathbf{A}$ *jest odwracalna, to macierz* $\mathbf{A}^t$ *też, i* $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$.

Dowód. a) wynika z definicji odwrotności macierzy, a b) stąd, że $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Podobnie, $(\mathbf{A}^{-1})^t\mathbf{A}^t = (\mathbf{AA}^{-1})^t = \mathbf{I}^t = \mathbf{I}$, por. lemat 2ii) w §1.3. $\square$

Ćwiczenie. Jeśli iloczyn dwóch macierzy kwadratowych jest macierzą odwracalną, to każda z nich jest odwracalna.

Zadanie 3. a) Macierz trójkątna, bez zer na przekątnej, jest odwracalna.
b) Nieodwracalna jest macierz, mająca zerowy wiersz (lub takąż kolumnę).

Zadanie 4. Gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_k$ są przemienne i $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$.

Zadania uzupełniające. Dowieść, że:

1. Zbiór nieosobliwych macierzy górno – trójkątnych jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności, i tak samo jest ze zbiorem macierzy górno – trójkątnych z jedynkami na przekątnej oraz ze zbiorem macierzy górno – trójkątnych z jedynkami na przekątnej i wyrazami całkowitymi.

2. Istnieje tylko skończenie wiele macierzy trójkątnych $\mathbf{A}$ danego stopnia k, dla których $\mathbf{AA}^t = \mathbf{I}_k$. Wyznaczyć też liczbę tych macierzy.

3. Gdy $\mathbb{G}$ jest podciałem ciała $\mathbb{F}$ i macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{G})$ jest odwracalna w $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$, to jej odwrotność leży w $\mathbf{M}_k(\mathbb{G})$.

4. * (J. Hadamard) Gdy macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ ma tę własność, że $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ dla $i = 1, ..., k$, to jest ona nieosobliwa.

5. Gdy wszystkie rozważane niżej odwrotności macierzy istnieją, to:
a) $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ i $(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;
b) $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I})^{-1}$, i ogólniej $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

6. * a) Gdy macierze $\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{M}, \mathbf{A}-\mathbf{M}$ wszystkie są odwracalne, to przy $\mathbf{P} := (\mathbf{A}+\mathbf{M})(\mathbf{A}-\mathbf{M})^{-1}$ i $\mathbf{Q} := (\mathbf{A}+\mathbf{M})^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{M})$ zachodzi $\mathbf{PAQ} = \mathbf{A}$, a macierze $\mathbf{I}+\mathbf{P}$ i $\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ są odwracalne. (Wskazówka: dowieść wpierw, że $(\mathbf{A} + \mathbf{M})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{M}) = (\mathbf{A} - \mathbf{M})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{M})$.)
b) Odwrotnie, jeśli $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ są odwracalne i $\mathbf{PAQ} = \mathbf{A}$, to przy założeniu odwracalności macierzy $\mathbf{I} + \mathbf{P}$ i $\mathbf{I} + \mathbf{Q}$ istnieje macierz $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_k$, dla której zachodzą równości z a).

7. * Przy oznaczeniach i założeniach zadania 6a), jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna, a $\mathbf{M}$ antysymetryczna, to $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^t$ i wobec tego $\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ} = \mathbf{A}$. (Wyniki z zadań 6 i 7 pochodzą od A. Cayley'a).
b)(Frobenius, Cayley.) Jeśli $\mathbf{Q}^t\mathbf{AQ} = \mathbf{A}$ i macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I} + \mathbf{Q}$ są odwracalne, w tym $\mathbf{A}$ jest symetryczna, to $\mathbf{Q} = (\mathbf{A} + \mathbf{M})^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{M})$ dla pewnej macierzy antysymetrycznej $\mathbf{M}$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §I.4.2: 7 (pominąć polecenia o macierzy dołączonej), 8,9*,10,11*,16*; w §I.4.3: zad.15*

3. Operacje elementarne a mnożenie przez macierz nieosobliwą.

Istotny dla dalszej części jest związek operacji elementarnych z mnożeniem macierzy. Był on już przedmiotem zadania uz. 3 w §3.2, lecz uzasadnimy go ponownie.

Twierdzenie 1. *a) Gdy operacjami wierszowymi zmienimy macierz* $\mathbf{A}$ *o* p *wierszach, to pomnożymy ją z lewej strony przez pewną macierz* $\mathbf{E}$*, niezależną od* $\mathbf{A}$*.*
b) Gdy operacjami kolumnowymi zmienimy macierz $\mathbf{A}$ *o* p *kolumnach, to pomnożymy ją z prawej strony przez macierz* $\mathbf{F}$*, niezależną od* $\mathbf{A}$*.*
c) W obu przypadkach, macierz $\mathbf{E}$ *(odp.* $\mathbf{F}$*) otrzymamy zmieniając* $\mathbf{I}_p$ *rozważanym ciągiem operacji.*

Dowód. a) Rozważany ciąg operacji przeprowadza macierz $[\mathbf{I}_p|\mathbf{A}]$ w $[\mathbf{E}|\mathbf{B}]$, skąd równania $\mathbf{I}_p\mathbf{X} = \mathbf{A}$ i $\mathbf{EX} = \mathbf{B}$ mają te same rozwiązania. Ponieważ $\mathbf{A}$ jest rozwiązaniem pierwszego równania, więc jest i rozwiązaniem drugiego: $\mathbf{EA} = \mathbf{B}$.
b) Wykonanie ciągu operacji kolumnowych wychodząc z $\mathbf{A}$ sprowadza się do wykonania odpowiadającego mu ciągu operacji wierszowych wychodząc z macierzy $\mathbf{A}^t$ i transponowania wyniku. Ponieważ jest nim $\mathbf{EA}^t$, dla macierzy $\mathbf{E}$ nie zależącej od $\mathbf{A}$, więc w b) otrzymamy macierz $(\mathbf{EA}^t)^t = \mathbf{AF}$, gdzie $\mathbf{F} = \mathbf{E}^t$.
c) Wynika to z a) i b), bo $\mathbf{E} = \mathbf{EI}_p$ i $\mathbf{F} = \mathbf{I}_p\mathbf{F}$. □

Wniosek 1. *Wykonanie operacji elementarnych (wśród których mogą być wierszowe i kolumnowe) prowadzi od nieosobliwej macierzy* $\mathbf{A}$ *do macierzy nieosobliwej.*

Dowód. Wystarcza rozpatrzeć przypadek pojedyńczej operacji. Gdy $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i operacja jest wierszowa, teza jest prawdziwa (z definicji macierzy nieosobliwych). Stąd tak samo jest gdy $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i operacja jest kolumnowa, na podstawie twierdzenia 3c) w p.2. W przypadku dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ mnożymy ją więc z lewej lub prawej strony przez macierz nieosobliwą, i teza wynika z twierdzenia 3b) w p.2. □

Zadania uzupełniające.

1. Macierz zmieniono wierszowymi i kolumnowymi operacjami elementarnymi. Wykazać, że ten sam wynik otrzymamy, gdy wpierw wykonamy wszystkie wierszowe, a potem kolumnowe z tych operacji, jedne i drugie w pierwotnej kolejności.

2. Przypuśćmy, że wyżej z macierzy $\mathbf{A}$ otrzymano $\mathbf{I}$. Czy wykonane operacje zawsze prowadzą z $\mathbf{I}$ do $\mathbf{A}^{-1}$? (Por. uwaga 2 w p.2.)

3. Dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ dowieść równoważności warunków: a) macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są wierszowo równoważne, oraz b) istnieje macierz nieosobliwa $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_l$ taka, że $\mathbf{A} = \mathbf{EB}$.

4. Udowodnić, że dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ istnieją macierze nieosobliwe $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_l$ i $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_k$ takie, że $\mathbf{B} := \mathbf{EAF}$ jest macierzą następującej postaci: dla pewnej liczby $r \leq \min(k, l)$ mamy $b_{ij} = 1$ gdy $i = j \leq r$, oraz $b_{ij} = 0$ w przeciwnym razie.

5. Nazwijmy **elementarną** każdą macierz powstałą w wyniku wykonania na macierzy jednostkowej jednej wierszowej operacji elementarnej.

a) Jeśli $\mathbf{E}$ jest macierzą elementarną, to $\mathbf{E}^t$ i $\mathbf{E}^{-1}$ również.

b) Macierz nieosobliwa jest iloczynem macierzy elementarnych, i odwrotnie.

6. Rozważamy ciąg operacji na macierzach $\mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2 \to ... \to \mathbf{X}_s = \mathbf{U}$. i–ta operacja polega na dodaniu do jakiegoś wiersza macierzy $\mathbf{X}_i$ któregoś z poprzedzających go wierszy tej macierzy, pomnożonego przez skalar. Dowieść, że $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą dolnie trójkątną, mającą jedynki na przekątnej.

Zadania ze zbioru Kostrykina: §I.4.3, zadanie 2.

§ 6. Możliwe tematy kolokwialne.

„Możliwe" są wszystkie omówione tematy, lecz szczególnie dobrze jest upewnić się co do znajomości:

a) charakteryzacji przekształceń liniowych z §1.2;

b) stwierdzeń z §1.3 i omówionych tam własności działań na macierzach;

c) metody Gaussa rozwiązywania równań liniowych i jej konsekwencji, w tym znajdywania rozwiązania ogólnego, a w przypadku jednorodnym – układu fundamentalnego rozwiązań;

d) własności macierzy odwracalnych (=nieosobliwych), w tym wyznaczania odwrotności;

e) związku operacji elementarnych z mnożeniem macierzy;

f) zastosowań do badania przekształceń liniowych $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, omówionych w paragrafach 4 i 5.