Analiza I.1, seria VIII

Adam Michalik

10 stycznia 2012

Zadanie 1

a) Znajoma tożsamość mówi, że

$$\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} = 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \tag{1}$$

skąd otrzymujemy oszacowanie:

$$0 \leqslant |2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}| \leqslant |2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}| \tag{2}$$

bo $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$ dla każdego x. Argument sinusa wraz z $x \to \infty$ zbiega do 0, skąd z ciągłości sinusa mamy, że wartość sinusa również zbiega do $\sin 0 = 0$, więc z ciągłości modułu wynika, że prawa strona nierówności zbiega do 0 wraz z $x \to \infty$, zatem teza wynika z tw. o trzech funkcjach.

b) Ponoć na wykładzie było, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \tag{3}$$

Mamy więc:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a = \ln a \tag{4}$$

bo gdy $x \to 0$, to oczywiście również $x\ln a \to 0$.

Zadanie 2

a) W tym zadaniu nie ma nic trudnego, wystarczy usunąć niewymierność z mianownika, rozłożyć na czynniki licznik i mianownik, zauważyć, że osobliwość się skraca i zapisać wynik.

b) Mamy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos(x))}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(1-\cos^2(x))}{\ln(1+x^3)x^2(1+\cos(x))} \tag{5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos(x)} \tag{6}$$

Pierwszy i drugi czynnik zbiegają do 1 gdy $x \to 0$, a trzeci do $\frac{1}{2}$, zatem granica jest równa $\frac{1}{2}$.

Zadanie 3 Poniżej n będzie zawsze oznaczało liczbę naturalną.

Oczywiście $f(x+n) = f(x)+n$, stąd $f(x) = n + f(\{x\})$, gdzie $\{x\}$ to część ułamkowa x. Jasne też jest, że również $f^{(n)}(1) = f^{(n)}(x)+1$ (prosta indukcja), skąd również $f^{(n)}(x) = n + f^{(n)}(\{x\})$.

Widać łatwo również, że $f^{(3n)}(0) = f^{3(n-1)}(1) = f^{3(n-1)}(0)+1 = f^{3(n-2)}(1)+1 = f^{3(n-2)}(0)+2 = \ldots = f^3(0)+n-1 = n$.

Pokażemy, że $0 \leqslant f(0) \leqslant 1$. Istotnie, załóżmy przeciwnie, że $f(0) < 0$, wtedy, korzystając wielokrotnie z monotoniczności f mamy $f(f(0)) < f(0)$, więc $f(f(f(0))) = 1 < f(f(0))$, ale wtedy $f(1) < f(f(f(0))) = 1$, więc łącząc dwie ostatnie nierówności otrzymujemy $f(f(0)) > f(1)$, zatem z monotniczności $f(0) > 1$, sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że $f(0) \leqslant 1$.

Teraz $f(x) = f(\{x\}) + [x]$, ale $0 \leqslant \{x\} \leqslant 1$, więc z powyższego mamy $[x] \leqslant f(x) \leqslant [x]+1$, iterując i korzystając z monotoniczności dostajemy dla dowolnego n:

$$f^{(n)}(0) + [x] = f^{(n)}([x]) \leqslant f^{(n+1)}(x) \leqslant f^{(n)}([x]+1) = f^{(n)}(0) + [x] + 1 \tag{7}$$

Kładąc w powyższym $x = 0$ i zamiast n pisząc $3n$ otrzymujemy:

$$n = f^{(3n)}(0) \leqslant f^{(3n+1)}(0) \leqslant f^{(3n)}(0) + 1 = n + 1 \tag{8}$$

a podstawiając $x = 0$ i $3n+2$ zamiast n otrzymujemy:

$$n < f^{(3n+1)}(0) \leqslant f^{(3n+2)}(0) \leqslant f^{(3n+1)}(0) + 1 < n + 2 \tag{9}$$

Z $f^{(3n)}(0) = n$, (8) i (9) wynika, że

$$\frac{n}{3} - 1 \leqslant \left[\frac{n}{3}\right] \leqslant f^{(n)}(0) \leqslant \left[\frac{n}{3}\right] + 2 \leqslant \frac{n}{3} + 2 \tag{10}$$

Aby pokazać istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x) - x}{n} = \frac{1}{3} \tag{11}$$

wystarczy pokazać istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n} = \frac{1}{3} \tag{12}$$

Ale z nierówności (7) i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że wystarczy w tym celu pokazać istnienie granicy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} = \frac{1}{3} \tag{13}$$

ale ta granica istnieje na mocy (10).

Zadanie 4 Nie napisałem go jeszcze, bo byłem (wciąż zresztą jestem) strasznie zajęty, ale jeżeli komuś zależy na poznaniu rozwiązania tego zadania, to proszę dać mi znać.

Zadanie 5 Pokażemy, że funkcja może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele właściwych ekstremów lokalnych. Pokażemy to dla maksimów, analogicznie przebiega dowód dla minimów, zatem wszystkich ekstremów też jest tylko przeliczalnie wiele.

Istotnie, z definicji właściwego maksimum lokalnego, jeżeli w punkcie x mamy właściwe maksimum lokalne, to istnieje takie $\epsilon > 0$, że dla każdego $y \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ zachodzi $f(x) > f(y)$. Wybierzmy $p, q \in \mathbb{Q}$ takie że $x - \epsilon < p < x < q < x + \epsilon$ (oczywiście takie istnieją) i przypiszmy maksimum x parę (p,q). W ten sposób skonstruowaliśmy funkcję ze zbioru ekstremów w przeliczalny zbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Wystarczy pokazać, że jest ona różnowartościowa, ale to jest jasne, bo jeżeli pewnym dwóm różnym ekstremom z, z' przypisalibyśmy tą samą parę (p,q), to z definicji mielibyśmy, że z, z' leżą w przedziale (p,q), oraz dla każdego $y \in (p,q)$, $f(z) > f(y)$ i $f(z') > y$. Ale z tego wynika, że $f(z) > f(z')$ i $f(z') > f(z)$, sprzeczność.

Teraz pozostaje tylko pokazać tezę zadania. Załóżmy, że $f(0) < f(1)$ (jeżeli jest odwrotnie, to wystarczy rozpatrzyć funkcję $-f$). Wtedy w przedziale $(f(0), f(1))$ jest continuum liczb, podczas gdy ekstremów może być najwyżej przeliczalnie wiele. Stąd istnieje $y \in (f(0), f(1))$ nie będące właściwym maksimum lokalnym (nie jest też oczywiście niewłaściwym maksimum lokalnym, bo ze skończoności przeciwobrazu punktu wynika, że takich nie może być). Pokażemy, że y jest szukaną wartością.

Niech $\{x_1, \ldots, x_n\} = f^{-1}(y)$ oraz $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i połóżmy $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$. Zauważmy, że $f(x) < y$ dla $0 < x < x_1$ – istotnie, ponieważ $f(0) < y$, to gdybyśmy mieli $f(x) > y$ dla pewnego $x < x_1$ to z własności Darboux istniałoby takie $z \in (0,x)$, że $f(z) = y$, ale skoro $z < x_1$, to z nie jest żadnym z x_i dla $i = 1, \ldots, n$, sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że $f(x) > y$ dla $x > x_n$, oraz że $f(x) - y$ ma stały znak na (x_i, x_{i+1}) dla $i = 0, \ldots, n$. Ale ponieważ y nie jest ekstremum lokalnym, to jeżeli $i < n$ i $f(x) < y$ dla $x \in (x_i, x_{i+1})$, to $f(x) > y$ dla (x_{i+1}, x_{i+2}), więc skoro $f(x) - y$ ma ujemny znak na (x_0, x_1) i dodatni znak na (x_n, x_{n+1}), oraz zmienia znak w każdym x_i dla $i = 1, \ldots n$, to musi zmienić znak nieparzyście wiele razy, skąd n jest nieparzyste, co należało pokazać.