Analiza I.1, seria VII

Adam Michalik

10 stycznia 2012

Niektóre rozwiązania są niepełne, jeżeli komuś zależy na poznaniu reszty rozwiązania, proszę dać mi znać.

Zadanie 1 Obydwa szeregi rozbijamy na sumę na skończenie wielu szeregów geometrycznych, bazując w a) na wartości $n \mod 4$, a w b) na znaku n.

Zadanie 2 Oznaczmy ciąg sum częściowych przez $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k}$. Rozpatrzmy jego podciąg $\{S_{[e^k]}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Gdyby szereg był zbieżny, to również ten podciąg byłby zbieżny. Ten podciąg jest jednak ciągiem sum częściowych szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sum_{i=0}^{[e^{k+1}]-[e^k]-1} \frac{1}{[e^k]+i} \tag{1}$$

którego wyraz ogólny nie zbiega do zera, bo

$$\frac{[e^{k+1}]-[e^k]-1}{[e^{k+1}]} \leqslant \sum_{i=0}^{[e^{k+1}]-[e^k]-1} \frac{1}{[e^k]+i} \tag{2}$$

a ciąg o wyrazach po lewej stronie nierówności dla $k = 1, 2, \ldots$ ma granicę $1 - \frac{1}{e} > 0$. Stąd jego ciąg sum częściowych nie jest zbieżny, zatem S_n nie ma granicy.

Zadanie 3 Wszystkie szeregi poniżej to szeregi potęgowe postaci $\sum a_n x^n$, są zatem bezwzględnie zbieżne wewnątrz kuli zbieżności, oraz rozbieżne poza nią. Promień zbieżności jest równy $R = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

a) Wyznaczmy promień zbieżności. Mamy:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \tag{3}$$

skąd widzimy z tw. o trzech ciągach, że:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(n-1)!}{n^n}} = \frac{1}{e} \tag{4}$$

zatem promień zbieżności jest równy e.

b) Wyznaczmy promień zbieżnosci. Mamy

$$\lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}} = \lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Zatem dla $|x| < e^{-\frac{1}{2}}$ szereg jest bezwzględnie zbieżny, dla $|x| > e^{-\frac{1}{2}}$ szereg jest rozbieżny.

c) Mamy oczywiście:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}} = 1 \tag{6}$$

skąd szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < 1$ i rozbieżny dla $|x| > 1$. Dla $x = 1$ szereg jest zbieżny – wystarczy zastosować kryterium o zagęszczaniu, bo wyraz ogólny monotonicznie zbiega do 0, jest też zatem zbieżny dla $x = -1$.