Analiza I.1, seria VI

Adam Michalik

3 stycznia 2012

Zadanie 1 Oczywiście mamy:

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}} \leqslant \sqrt{x_n} \tag{1}$$

zatem jeżeli $\sum x_n$ jest zbieżny, to teza wynika z kryterium porównawczego.

Jeżeli natomiast $\sum \sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}$ jest zbieżny, to oczywiście $\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}} \to 0$, stąd dla d.d.d. n:

$$\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}} < \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$\sqrt{x_n} < \frac{1}{2}\sqrt{1+x_n} \tag{3}$$

$$x_n < \frac{1}{4}(1+x_n) \tag{4}$$

$$\frac{3}{4}x_n < \frac{1}{4} \tag{5}$$

$$x_n < \frac{1}{3} \tag{6}$$

zatem:

$$0 < \sqrt{\frac{x_n}{1+\frac{1}{3}}} < \sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}} \tag{7}$$

skąd $\sum \sqrt{\frac{x_n}{1+\frac{1}{3}}}$ jest zbieżny, ale wtedy również $\sum \sqrt{x_n}$ zbieżny.

Zadanie 2

a) Oczywiście szereg nie jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2(1+(-1)^{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2(1+(-1)^{n+1})}[n \,\text{parzyste}] \tag{8}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2(1+(-1)^{n+1})}[n \,\text{nieparzyste}] \tag{9}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1+2(2n-1)^2} \tag{10}$$

Oczywiście pierwszy ze składników nie jest rozbieżny, a drugi jest zbieżny (bo jest bezwzględnie zbieżny, gdyż wyraz ogólny jest ograniczony z góry przez bewzględnie zbieżny szereg $\sum \frac{1}{n}$), zatem gdyby wyjściowy szereg był zbieżny, to zbieżny byłby również szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+n^2(1+(-1)^{n+1})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1+2(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \tag{11}$$

b) Oczywiste jest, że dla $|a| > 2$ wyraz ogólny nie zbiega do 0, szereg zatem jest rozbieżny. Skorzystajmy z kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a(n+1)}{2n+1}\right|^{3n}} = \left|\frac{a(n+1)}{2n+1}\right|^3 \to \frac{|a|^3}{8} \tag{12}$$

stąd dla $|a| < 2$ szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Niech $a = 2$. Wtedy

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{3n} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{3n} \tag{13}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)^{\frac{3n}{2n+1}} \to e^{\frac{3}{2}} \tag{14}$$

zatem dla $a = 2$ szereg jest rozbieżny. Oczywiście podciąg złożony z wyrazów o parzystym indeksie jest również zbieżny do $e^{\frac{3}{2}}$, ale jest on również podciągiem ciągu wyrazów szeregu dla $a = -2$, skąd ciąg wyrazów szeregu dla $a = -2$ ma podciąg, który nie jest zbieżny do 0, zatem dla $a = -2$ szereg również jest rozbieżny.

Zadanie 3 Zbadajmy najpiew bezwzględną zbieżność. Oczywiście:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x^n - x^{n+1}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x^n||1-x| = |1-x| \sum_{n=0}^{\infty} |x^n| \tag{15}$$

więc mamy szereg geometryczny, który oczywiście jest zbieżny dla $|x| < 1$, oraz $x = 1$, bo wtedy wszystkie wyrazy równają się zeru.

Badając zbieżność warunkową widzimy, że ciąg sum cześciowych szeregu ma postać:

$$\sum_{n=0}^{N}(x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{N+1} \tag{16}$$

skąd w sposóbo oczywisty widać, że szereg jest zbieżny tylko wtedy, gdy $|x| < 1$, a suma jest równa 1.

Zadanie 4 Oczywiście szereg nie jest bezwzględnie zbieżny: wystarczy przyjąć za $a_n = 1$, wtedy szereg $\sum \frac{1}{\ln n}$ jest rozbieżny.

Oczywiście szereg $\sum(-1)^n(g - a_n)$ jest zbieżny z kryterium Leibniza. Oznaczmy jego sumę przez C. Wtedy d.d.d. N mamy:

$$|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n(g-a_n)| < 2C \tag{17}$$

$$|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n g| < 2C \tag{18}$$

$$|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n| - |\sum_{n=1}^{N}(-1)^n g| < 2C \tag{19}$$

$$|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n| < 2C + g \tag{20}$$

zatem ciąg sum częściowych $(-1)^n a_n$ jest ograniczony, $\frac{1}{\ln n}$ zbiega monotonicznie do 0, więc teza wynika z kryterium Dirichleta.