Analiza I.1, seria V

3 grudnia 2011

Zadanie 1a (Piotr Baran) Jeśli $0 < \alpha \leqslant 4$, to:

$$\frac{n^2 + 3n^3 \ln n}{n^\alpha + n^4 + 1} = \frac{\frac{1}{n} + 3\ln n}{n^{\alpha-3} + n + \frac{1}{n^3}} > \frac{1}{n^{\alpha-3} + n + \frac{1}{n^3}} > \frac{1}{n+n+n} \tag{1}$$

Pierwsza nierówność zachodzi na pewno dla wszystkich $n \geqslant 3$, zaś druga dla wszystkich n (w tym celu wystarczy udowodnić, że $\frac{1}{n^3} < n$ - co oczywiste, oraz $n^{\alpha-3} \leqslant n \Leftrightarrow n^{\alpha-4} \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha - 4 \leqslant 0$) Ponieważ szereg $\frac{1}{3n}$ jest rozbieżny, to z kryterium porównawczego szereg $\frac{n^2+3n^3\ln n}{n^\alpha+n^4+1}$ też jest rozbieżny, dla $\alpha \leqslant 4$. Jeśli $\alpha > 4$, to:

$$\frac{n^2 + 3n^3 \ln n}{n^\alpha + n^4 + 1} < \frac{1}{n^{\alpha-2}} + \frac{3\ln n}{n^{\alpha-3}} \tag{2}$$

Skoro $\alpha > 4$, to $\alpha - 2 > 2$ oraz $\alpha - 3 > 1$, zatem oba szeregi $\frac{1}{n^{\alpha-2}}$, $\frac{3\ln n}{n^{\alpha-3}}$ są zbieżne (bo szereg $\frac{lnn}{n^p}$ jest zbieżny wtw. $p > 1$), więc ich suma też jest zbieżna. Z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg z zadania jest zbieżny $\Leftrightarrow \alpha > 4$

Zadanie 1b (Piotr Baran)

$$\frac{n^7 + n^{2011}}{1 + \left(\frac{2011}{2012}\right)^n + \left(\frac{2011}{2010}\right)^n} < \frac{n^7 + n^{2011}}{\frac{2011^n}{2010^n}} < \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

Pierwsza nierówność jest oczywista. Pokażemy, że druga nierówność jest prawdziwa dla dostatecznie dużych n. Jest ona (nierówność) równoważna nierówności:

$$\sqrt[n]{n^9 + n^{2013}} < \frac{2011}{2010} \tag{4}$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n^9 + n^{2013}}$ dąży do 1, więc dla odpowiednio dużych n nierówność jest spełniona, bo $\frac{2011}{2010} > 1$. Z kryterium porównawczego wnioskujemy, że szereg z zadania jest zbieżny, bo szereg $\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

zadanie 2a (Piotr Baran) Oznaczmy $S_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{4k^2-1}$, wówczas $S_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4k+2}$. Zatem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{2} \tag{5}$$

zadanie 2b (Adam Michalik) Oczywiście:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} \tag{6}$$

Równie łatwo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^n} && (7)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} && (8)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} && (9)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}} \frac{3}{2} && (10)\\
&= \frac{3}{4} && (11)
\end{aligned}$$

W związku z czym:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} && (12)\\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) && (13)\\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} + 2\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right) && (14)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} + 1 && (15)\\
& && (16)
\end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy, że nasza wyjściowy szereg sumuje się do $\frac{3}{2}$ (wszystkie operacje algebraiczne były poprawne, bo szereg jest bezwzględnie zbieżny, co łatwo widać z dowolnego kryterium).

zadanie 3a (Piotr Baran) Ponieważ $\sin\frac{n\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\}$, to:

$$\frac{1}{n\ln^3 n + n\sin\frac{n\pi}{2}} \leqslant \frac{1}{n\ln^3 n - n} \tag{17}$$

Pokażemy, że szereg $\frac{1}{n\ln^3 n-n}$ jest zbieżny. Jeśli to pokażemy, to zbieżność wyjściowego szeregu wynika z kryterium porównawczego. Weźmy ciąg $a_n = n\ln^3 n - n$. Jest to ciąg o wyrazach dodatnich (od pewnego miejsca), oraz rosnący, bo:

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow n\ln^3(n+1) + \ln^3(n+1) > n\ln^3 n \tag{18}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż logarytm jest funkcją rosnącą, więc $\ln^3(n+1) > \ln^3 n$. Skoro ciąg a_n jest ciągiem rosnącym, to ciąg $b_n = \frac{1}{a_n}$ jest ciągiem malejącym (o wyrazach dodatnich od pewnego n). Z kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu dostajemy, że zbieżność szeregu b_n jest taka sama jak zbieżność szeregu $\frac{2^n}{2^n(n^3\ln^3 2-1}$).

$$\frac{2^n}{2^n(n^3\ln^3 2-1} = \frac{1}{n^3\ln^3 2-1} < \frac{1}{n^2} \tag{19}$$

Nierówność zachodzi dla $n \geqslant \left[\frac{1}{\ln^3 2}\right]$, więc szereg b_n jest zbieżny, a co za tym idzie wyjściowy szereg też jest zbieżny.

zadanie 3b (Piotr Baran) Ponieważ ciąg $c_n = \sqrt[n]{a} - 1$ jest malejący dla $a > 1$, oraz $\lim_{n\to\infty} = 0$, to z kryterium Leibniza od razu dostajemy zbieżność tego szeregu dla $a > 1$. Jeśli zaś $a < 1$, to rozważmy ciąg $b_n = -c_n = 1 - \sqrt[n]{a}$. Wówczas (b_n) jest malejący dla $a \in (0, 1)$ więc z kryterium Leibniza szereg $(-1)^n\left(1 - \sqrt[n]{a}\right)$ jest zbieżny, więc również szereg $-(-1)^n\left(1 - \sqrt[n]{a}\right) = c_n$ jest zbieżny. Zatem szereg z zadania jest zbieżny dla każdego $a > 0$ (dla $a = 0$ sumujemy same zera, więc nie ma się nad czym rozwodzić).