Analiza, seria IV

Adam Michalik

27 listopada 2011

Zadanie 1 Dla dowolnego $r \geqslant 1$ i $x > -1$ wykażemy następującą nierówność:

$$(1+x)^r \geqslant 1 + rx \tag{1}$$

Ustalmy najpierw dowolne $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 1$ i $x > -1$. Mamy:

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \geqslant 1 + \frac{p}{q}x \iff \sqrt[p]{\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^q} \leqslant 1 + x \tag{2}$$

Ale z nierówności pomiędzy średnimi mamy:

$$\sqrt[p]{\left(1 + \frac{p}{q}x\right)^q \cdot 1^{p-q}} \leqslant \frac{q\left(1 + \frac{p}{q}x\right) + 1 \cdot (p-q)}{p} = 1 + x \tag{3}$$

Niech teraz $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, r \in (0,1)$, $x \geqslant 0$. Pokażemy odwrotną nierówność:

$$(1+x)^r \leqslant 1 + rx \tag{4}$$

Istotnie, z nierówności pomiędzy średnimi:

$$\sqrt[q]{(1+x)^p 1^{q-p}} \leqslant \frac{p(1+x) + 1 \cdot (q-p)}{q} = 1 + \frac{p}{q}x \tag{5}$$

Ponieważ dla $a > 0$ i dla $x_n \to x$ mamy $\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}$, to ustalając dowolne $r \geqslant 1$ (być może niewymierne) i $x > -1$, istnieje ciąg liczb wymiernych $r_n \to r$ (np. niech $A_n = \mathbb{Q} \cap \left(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right)$, A_n są niepuste, bo $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, więc wystarczy zastosować aksjomat wyboru dla rodziny $\{A_1 \times \{1\}, A_2 \times \{2\}, \ldots\}$ by dostać selektor S, po czym określamy $r_n = x$, gdzie $S \cap A_n = \{(x,n)\}$, otrzymany ciąg oczywiście zbiega do r). Wiemy zatem, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$(1+x)^{r_n} \geqslant 1 + r_n x \tag{6}$$

Stąd z twierdzenia o przechodzeniu z nierównością do granicy mamy:

$$(1+x)^r = \lim(1+x)^{r_n} \geqslant \lim(1 + r_n x) = 1 + rx \tag{7}$$

Analogicznie dowodzimy drugiej nierówności.

Zadanie 2 Dla $p \in \mathbb{N}$, niech $W_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Pokażemy, że dla każdego p, W_p jest wielomianem, stopnia $p+1$, w którym przy najwyższej potędze stoi współczynnik $\frac{1}{p+1}$, z czego od razu wynika teza. Przy okazji, pokażemy efektywny sposób wyznaczania W_p.

Ustalmy p. Dla dowolnego n, zachodzą następujące równości:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{j} k^j \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + (n+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{p+1}{p+1} k^{p+1} + \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} \sum_{k=1}^{n} k^j \tag{11}$$

$$(n+1)^{p+1} = 1^{p+1} + \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} W_j(n) \tag{12}$$

$$\binom{p+1}{p} W_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} W_j(n) \tag{13}$$

$$W_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} W_j(n)}{p+1} \tag{14}$$

Widać, że jeżeli wyznaczyliśmy W_j dla $j < p$, to przy pomocy ostatniej równości i pewnej ilości żmudnych, bezmyślnych obliczeń (lub komputera) wyznaczymy W_p. Jeżeli dla $j < p$, W_j to wielomiany, to oczywiście W_p jest również wielomianem. Jeżeli dla $j < p$, W_j jest stopnia $j+1$, to jedyny wyraz stopnia $p+1$ pochodzi ze składnika $\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, skąd od razu widać, że współczynnik przy nim to $\frac{1}{p+1}$. Wynika również z tego od razu, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{W_p(n)}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \tag{15}$$

Zadanie 3

$$\lim n(\sqrt[n]{13} - 1) = \lim \frac{\ln 13}{\ln(1 + (\sqrt[n]{13} - 1))} (\sqrt[n]{13} - 1) = \lim \frac{\ln 13}{\ln(1 + (\sqrt[n]{13} - 1))^{\frac{1}{\sqrt[n]{13}-1}}} = \ln 13 \tag{16}$$

Zadanie 4 Zbadamy zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n+2} \right) \tag{17}$$

Oznaczmy $x_n = n^2 + 2, y_n = n^3 + 3n + 2$. Oczywiście $\lim \frac{x_n}{n^2} = 1$, jak również $\lim \frac{y_n}{n^3} = 1$
Ponieważ:

$$a - b = \frac{a^6 - b^6}{a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + a b^5 + b^5} \tag{18}$$

więc, stosując powyższą tożsamość do wyrazów szeregu, otrzymujemy:

$$a_n := \sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n+2} = \sqrt{x_n} - \sqrt[3]{y_n} \tag{19}$$

$$= \frac{x_n^3 + y_n^2}{x_n^{\frac{5}{2}} + x_n^{\frac{4}{2}} y_n^{\frac{1}{3}} + x_n^{\frac{3}{2}} y_n^{\frac{2}{3}} + x_n^{\frac{2}{2}} y_n^{\frac{3}{3}} + x_n^{\frac{1}{2}} y_n^{\frac{4}{3}} + y_n^{\frac{5}{3}}} \tag{20}$$

Przekształcając dalej, otrzymujemy następującego potwora:

$$a_n = \frac{-4\,n^3 + 3\,n^2 - 12\,n + 4}{n^5 \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^{\frac{5}{2}} + n^5 \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^{\frac{4}{2}} \left(\frac{y_n}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + n^5 \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{y_n}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + n^5 \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^{\frac{2}{2}} \left(\frac{y_n}{n^3}\right)^{\frac{3}{3}} + n^5 \left(\frac{x_n}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y_n}{n^3}\right)^{\frac{4}{3}} + n^5 \left(\frac{y_n}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{21}$$

skąd widzimy, że $\lim \frac{a_n}{\frac{-1}{n^2}} = \frac{4}{6}$, więc z kryterium porównawczego widzimy, że $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 5 Ponieważ:

$$e^2 = \lim(1 + a_n)^{n^2} = \lim\left(1 + \frac{a^n n^2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{\lim a^n n^2} \tag{22}$$

więc:

$$\lim a^n n^2 = \lim \frac{a^n}{\frac{1}{n^2}} = 2 \tag{23}$$

Zbieżność $\sum a_n$ wynika z asymptotycznego kryterium porównawczego zastosowanego dla szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$, który jest zbieżny.