Analiza, seria III

Adam Michalik

8 listopada 2011

Zadanie 1 Znajdziemy granicę ciągu

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3} \tag{1}$$

w zależności od $a_0 > 0$.

Załóżmy na początek, że $a_0 \leqslant \sqrt{2}$. Oczywiście wtedy $a_n \geqslant 0$ dla każdego n (prosta indukcja). Pokażemy przez indukcję, że również $a_n \leqslant \sqrt{2}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Istotnie,

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3} = 3 - \frac{7}{a_n + 3} \leqslant 3 - \frac{7}{\sqrt{2} + 3} = \sqrt{2} \tag{2}$$

Pokażemy, że ciąg a_n jest monotonicznie rosnący – istotnie:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3} - a_n = \frac{3a_n + 2 - a_n^2 - 3_a n}{a_n} = \frac{-a_n^2 + 2}{a_n + 3} \tag{3}$$

ale mianownik w powyższym ułamku jest zawsze dodatni, więc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ wtw. $-a_n^2 + 2 \geqslant 0$ wtw. $a_n \leqslant \sqrt{2}$, czego prawdziwość już pokazaliśmy.

Wiemy stąd, że a_n jest monotoniczny i ograniczony, zatem zbieżny. Oznaczmy:

$$\lim a_n = g \tag{4}$$

wiemy wtedy:

$$g = \lim a_{n+1} = \lim \frac{3a_n + 2}{a_n + 3} = \frac{3 \lim a_n + 2}{\lim a_n + 3} = \frac{3g + 2}{g + 3} \tag{5}$$

a stąd otrzymujemy:

$$g^2 + 3g = 3g + 2 \tag{6}$$

czyli $g = \sqrt{2}$ lub $g = -\sqrt{2}$. Ponieważ ciąg a_n jest nieujemny, drugi przypadek możemy odrzucić. Zatem dla $a_0 \leqslant \sqrt{2}$, $\lim a_n = \sqrt{2}$.

Dowód dla $a_0 \geqslant \sqrt{2}$ jest w pełni analogiczny, pokazujemy jedynie, że wtedy ciąg jest ograniczony przez $\sqrt{2}$ z dołu i monotonicznie malejący.

Zadanie 2 . Załóżmy, że $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q < 1$. Pokażemy, że wtedy $\lim x_n = 0$. Istotnie, ustalmy $\epsilon = \frac{1-q}{2}$, dzięki czemu $q + \epsilon < 1$. Z definicji granicy mamy wtedy, że istnieje takie n_0, że dla $n \geqslant n_0$ zachodzi

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < q + \epsilon \tag{7}$$

$$|x_{n+1}| < (q + \epsilon)|x_n| \tag{8}$$

skąd przez prostą indukcję otrzymujemy dla $n > 0$

$$0 \leqslant |x_{n_0+n}| < (q + \epsilon)^n |x_{n_0}| \tag{9}$$

Ponieważ $q + \epsilon < 1$, ciąg po prawej stronie zbiega do zera wraz z $n \to \infty$, teza zatem wynika z twierdzenia o trzech ciągach (bo $\lim |x_{n_0+n}|$ istnieje wtw istnieje granica $\lim |x_n|$ i są sobie równe).

Zadanie 3 Pokażemy, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \tag{10}$$

Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Dla $n = 1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy prawdziwość (10) dla pewnego n. Dodajmy stronami $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{11}$$

Wystarczy teraz pokazać, że

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1} \tag{12}$$

Przekształćmy powyższą nierówność:

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leqslant 2n + 2 \tag{13}$$

$$4n^2 + 4n \leqslant (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \tag{14}$$

Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla każdego n.

Pokażemy teraz, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1) \tag{15}$$

Dowód również przeprowadzimy przez indukcję. Analogicznie dodajemy stronami $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, wystarczy pokazać, że

$$2(\sqrt{n+2} - 1) < 2(\sqrt{n+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{16}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$2\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{17}$$

$$2\sqrt{(n+2)(n+1)} < 2n + 3 \tag{18}$$

$$4(n+2)(n+1) < (2n+3)^2 \tag{19}$$

$$4n^2 + 12n + 8 < 4n^2 + 12n + 9 \tag{20}$$

co jest prawdą.

Stąd, wiemy, że

$$2(\sqrt{n^2+1} - 1) - \sqrt{n^2 - 9n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{n^2 - 9n} < 2\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 9n} \tag{21}$$

ale

$$2(\sqrt{n^2+1} - 1) - \sqrt{n^2 - 9n} > 2(\sqrt{n^2+1} - 1) - \sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2+1} - 2 > \sqrt{n^2} - 2 = n - 2 \to \infty \tag{22}$$

z drugiej strony

$$2\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 9n} > 2\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2} = n \to \infty \tag{23}$$

zatem, z twierdzenia o trzech ciągach, $a_n \to \infty$

Zadanie 4 W zależności od parametru α, znajdziemy granicę:

$$\lim n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right) \tag{24}$$

Szacując sumę z dołu i z góry przez najmniejszy i największy element, otrzymujemy:

$$n^{\alpha}\frac{n+1}{4n^2} < n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right) < n^{\alpha}\frac{n+1}{n^2} \tag{25}$$

Od razu widzimy, że dla $\alpha > 1$, ciągi po lewej i po prawej stronie powyższej nierówności dążą do $+\infty$, a dla $\alpha < 1$ do 0, zatem z twierdzenia o trzech ciągach wyjściowy ciąg również ma taką granicę.

Załóżmy więc, że $\alpha = 1$. Oznaczmy:

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2} \tag{26}$$

Z nierówności (25) wynika, że $a_n \to 0$. Oczywiście b_n zbiega monotonicznie do 0. Skorzystamy z tw. Stolza:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} && (27)\\
&= \lim \frac{\frac{1}{(2n+2)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} && (28)\\
&= \lim \frac{\frac{n^2(2n+1)^2 + 4n^2(n+1)^2 - 4(n+1)^2(2n+1)^2}{4(n+1)n^2(2n+1)^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} && (29)\\
&= \lim \frac{n(n+1)(n^2(2n+1)^2 + 4n^2(n+1)^2 - 4(n+1)^2(2n+1)^2)}{4(n+1)n^2(2n+1)^2} && (30)\\
& && (31)
\end{aligned}$$

Łatwo zobaczyć, że najwyższa potęga n w liczniku i mianowniku jest równa 4, a przy tym współczynnik przy niej w liczniku jest równy 2, a w mianowniku 4, zatem granica jest równa $\frac{1}{2}$.

Rozpatrzymy teraz granicę

$$\lim \left(\frac{n^2(n-3)}{n^3 + 2n + 1} \right)^{n+2} \tag{32}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\lim \left(\frac{n^2(n-3)}{n^3 + 2n + 1} \right)^{n+2} &= \lim \left(\frac{n^3 - 3n^2)}{n^3 + 2n + 1} \right)^{n+2} && (33)\\
&= \lim \left(\frac{n^3 + 2n + 1 - 3n^2 - 2n - 1)}{n^3 + 2n + 1} \right)^{n+2} && (34)\\
&= \lim \left(1 + \frac{-3n^2 - 2n - 1)}{n^3 + 2n + 1} \right)^{n+2} && (35)\\
&= \lim \left(\left(1 + \frac{-3n^2 - 2n - 1}{n^3 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^3+2n+1}{-3n^2-2n-1}} \right)^{\frac{(n+2)(-3n^2-2n-1)}{n^3+2n+1}} && (36)\\
&= e^{-3} && (37)
\end{aligned}$$

Zadanie 5 Znajdziemy granicę ciągu:

$$a_n = \frac{n+1}{3^n} \left(\frac{3^1}{1} + \frac{3^2}{2} + \ldots + \frac{3^n}{n} \right) \tag{38}$$

Niech $b_n = \frac{3^n}{n+1}$, $c_n = \frac{3^1}{1} + \frac{3^2}{2} + \ldots + \frac{3^n}{n}$. Wtedy b_n monotonicznie dąży do $+\infty$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{n+1}n}{3^n(n+1)} = \frac{3n}{n+1} > 1 \tag{39}$$

Skorzystajmy z tw. Stolza:

$$\begin{aligned}
\lim a_n = \lim \frac{c_n}{b_n} &= \lim \frac{c_{n+1} - c_n}{b_{n+1} - b_n} && (40)\\
&= \lim \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n}} && (41)\\
&= \lim \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{3n-n-1}{n(n+1)}} && (42)\\
&= \lim \frac{3n}{2n-1} && (43)\\
&= \frac{3}{2} && (44)
\end{aligned}$$