Analiza, seria II

Adam Michalik

4 listopada 2011

Zadanie 1 Znajdziemy kresy następujących zbiorów, w zależności od parametrów $\alpha, \beta > 0$:

$$A = \left\{ \frac{\alpha m + \beta n}{m + n} : m + n \neq 0 \right\} \tag{1}$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $\alpha \leqslant \beta$. Wtedy mamy:

$$\alpha = \frac{\alpha m + \alpha n}{m + n} \leqslant \frac{\alpha m + \beta n}{m + n} \leqslant \frac{\beta m + \beta n}{m + n} = \beta \tag{2}$$

W powyższych nierównościach równości zachodzą dla $m = 1, n = 0$ i $n = 1, m = 0$, stąd dla $\alpha \leqslant \beta$ mamy $\inf A = \alpha, \sup A = \beta$, zatem z symetrii $\sup A = \max(\alpha, beta), \inf A = \min(\alpha, \beta)$

$$B = \left\{ \alpha x + \frac{1}{4\alpha x} : x > 0 \right\} \tag{3}$$

Dla dowolnego ustalonego $n > 0$, dla $x = \frac{n}{\alpha}$ mamy

$$B \ni \alpha x + \frac{1}{4\alpha x} = n + \frac{1}{4n} > n \tag{4}$$

stąd $\sup B = \infty$.

Z drugiej strony, z nierówności między średnimi mamy:

$$1 = 2\sqrt{\alpha x \frac{1}{4\alpha x}} \leqslant \alpha x + \frac{1}{4\alpha x} \tag{5}$$

i równość zachodzi dla $\alpha x = \frac{1}{4\alpha x}$, czyli dla $x = \frac{1}{2\alpha}$, stąd $\inf B = 1$.

Zadanie 2 Dla $n \geqslant 5$ pokażemy, że:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \log_2 n \tag{6}$$

Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Dla $n = 5$ nierówność jest prawdziwa, o czym przekonujemy się, przeprowadzając proste obliczenie.

Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla ustalonego n. Dodajmy $\frac{1}{n+1}$ stronami:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \log_2 n + \frac{1}{n+1} \tag{7}$$

Wystarczy teraz pokazać, że:

$$\log_2 n + \frac{1}{n+1} \leqslant \log_2 n + 1 \tag{8}$$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \log_2 \frac{n+1}{n} \tag{9}$$

$$1 \leqslant \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{10}$$

Ale $\log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, bo $2 < e$. Z wykładu wiadomo, że $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ zbiega monotonicznie malejąco do e, stąd

$$\log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \log_e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \log_e e = 1 \tag{11}$$

co należało pokazać.

Zadanie 3 Niech będzie dany zbiór A, taki, że jeżeli $a \in A$, to $a > 0$, niech $\sup A = a_s, \inf A = a_i$. Rozpatrzmy zbiór

$$B = \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\} \tag{12}$$

Znajdziemy kresy zbioru B.

Rozpatrzmy najpierw przypadek $a_s = \infty$. Wtedy $\inf B = 0$, bo oczywiście dla $b \in B$, $b > 0$, a przy tym dla pewnego $A \ni a > \frac{1}{\epsilon}$ (taki istnieje, bo $\sup A = \infty$) mamy $\frac{1}{a} < \epsilon$.

Niech teraz a_i, a_s skończone. Mamy dla $a \in A$:

$$a_i \leqslant a \leqslant a_s \tag{13}$$

stąd

$$\frac{1}{a_s} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{a_i} \tag{14}$$

stąd $\frac{1}{a_s}$ i $\frac{1}{a_i}$ są ograniczeniami B, dolnym i górnym. Pokażę, że są kresami. Rozpatrzmy najpierw kres dolny. Dla dowolnego $\epsilon > 0$, szukamy takiego $1/a \in B$, że:

$$\frac{1}{a_s} + \epsilon > \frac{1}{a} \tag{15}$$

Równoważnie,

$$\frac{1 + \epsilon a_s}{a_s} \quad > \quad \frac{1}{a} \tag{16}$$

$$\frac{a_s}{1 + \epsilon a_s} \quad < \quad a \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Ale

$$\frac{a_s}{1 + \epsilon a_s} < a_s = \sup A \tag{19}$$

stąd istnieje takie $a \in A$, że $\frac{a_s}{1+\epsilon a_s} < a$, co należało pokazać.

Kres górny dowodzi się analogicznie.

Zadanie 4 Pokażemy, że jeżeli dla $a_i > 0$, $\prod_1^n a_i = 1$, to $\sum_1^n a_i \geqslant n$, a równość zachodzi tylko dla $a_1 = \ldots = a_n = 1$.

Wystarczy skorzystać z nierówności między średnimi, która mówi, że

$$\sqrt[n]{\prod_1^n a_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_1^n a_i \tag{20}$$

czyli:

$$n \leqslant \sum_1^n a_i \tag{21}$$

a przy tym wiadomo, że równość w powyższej nierówności zachodzi tylko dla $a_1 = \ldots = a_n$ i z warunków zadania wynika, że wszystkie te liczby muszą być równe 1.

Zadanie 5 Pokazać, że n dzieli $\binom{n}{k}$ dla każdego $1 < k < n$ wtw. n jest liczbą pierwszą.

($\Leftarrow$) Mamy:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \tag{22}$$

Wiadomo, że $\binom{n}{k}$ jest liczbą całkowitą. n dzieli licznik powyższego ułamka, lecz nie dzieli mianownika, bo wtedy musiałaby dzielić któryś z czynników mianownika (bo n jest pierwsze, a gdy pierwsze p dzieli ab, to dzieli a lub b), ale każdy z czynnikow mianownika jest mniejszy od n. Stąd n dzieli $\binom{n}{k}$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą, więc $n = pb$, p pierwsze. Rozpatrzmy:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p} = \tag{23}$$

Ponieważ n dzieli $\binom{n}{p}$ i p dzieli n, więc również p dzieli $\binom{n}{p}$. W liczniku jest p czynników, z czego pierwszy dzieli się przez p, zatem z pierwszości p wynika, że żaden inny nie dzieli się przez p. Po skróceniu p z licznika i mianownika otrzymujemy, że licznik nie dzieli się przez p, zatem cały ułamek też nie dzieli się przez p.