TFU :

$$\underset{\substack{\cap\,\text{otw} \\ \mathbb{R}^n_x}}{(x_0,y_0) \in U} \times \underset{\substack{\cap\,\text{otw} \\ \mathbb{R}^m_y}}{V} \xrightarrow{\;F\in C^1\;} \mathbb{R}^m \quad , \quad F(x_0,y_0)=0$$

Jeśli $$T_{y_0}\mathbb{R}^m_y \xrightarrow{\;D_yF(x_0,y_0)\;} T_{F(x_0,y_0)}\mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m$$

[przyp.: $D_yF(x_0,y_0)$ jest to pochodna przekszt. $y \longmapsto F(x_0,y)$ w $y=y_0$]

jest odwracalna, to istnieją:

1° otoczenia $x_0 \in U_0 \subset U$
$y_0 \in V_0 \subset V$

2° przekształcenie

$$U_0 \xrightarrow{\;\varphi\in C^1\;} V_0 \quad , \quad \varphi(x_0)=y_0$$

takie, że

$$\{(x,y)\in U_0\times V_0 \;:\; F(x,y)=0\} = \text{wykres }\varphi =$$
$$= \{(x,y)\in U_0\times V_0 \;:\; y=\varphi(x)\}.$$

$V_F = \{(x,y) : F(x,y)=0\}$

TFO: $\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow{f \in C^1} \mathbb{R}^n_y$

$x_0 \in U, \quad y_0 = f(x_0)$

Jeśli $f'|_{x_0} : T_{x_0}\mathbb{R}^n_x \longrightarrow T_{y_0}\mathbb{R}^n_y$ jest izomorfizmem, to f^{-1} istnieje i jest C^1 w pewnym otoczeniu y_0;

dokładniej: istnieją takie otoczenia $x_0 \in U_0 \subset U$, $y_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n_y$

$U_0 \xrightarrow{f} V_0$ jest bijekcją i $f^{-1} \in C$

⚠ : 1) popularnie TFU mówi, że równanie $F(x,y)=0$ daje się rozwikłać względem y.

a) równanie $x^2+y^2=0$ nie daje się ~~przedst~~ rozwiązać wzgl. y, w żadnym otoczeniu $(0,0)$

b) ~~równanie~~ zbiór rozwiązań $x^2-y^2=0$ jest sumą mnogościową dwóch wykresów $y=x$, $y=-x$;

ten zbiór zawiera wykres każdej funkcji postaci

$$\varphi(x) = \lambda_A(x)\,x, \quad \text{gdzie}$$

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$$

c) $y^3 - x^{3k+1} = 0$; rozw.: $y = x^{k+\frac{1}{3}}$ klasy C^k ale nie C^{k+1}

(później wykażemy, że przy założeniach TFU i $F \in C^k$ rozwiązanie φ jest klasy C^k).

2) Odwracalność przekszt. liniowego $\Leftrightarrow$ wyznacznik jest $\neq 0$; zatem $D_y F(x_0, y_0)$ jest odwracalne $\Leftrightarrow$ w dowolnych bazach (układach współrzędnych) $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1 \dots y_m)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$ jakobian

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0.$$

(inne sformułowanie założenia TFU) ; dla TFO chodzi o jakobian $\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial(f_1, \dots f_n)}{\partial(x_1, \dots x_n)}(x_0)$.

W szczególności gdy $m = 1$, to zał. TFU oznacza $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

d) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (rozbicie na Re i Im),

$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ $\qquad f(z) = z^2$ (albo z^k, $k > 1$)

Jeśli $z_0 \neq 0$, to $f'(z_0) \neq 0$, ale globalnie f nie jest odwracalne. Zatem TFO ma charakter lokalny.

3) W TFU i TFO różniczk. i odwracalność odpowiedniego przekształcenia nie wystarczają:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1, \begin{cases} x_2 - x_1^2, & \text{gdy } x_1^2 \le x_2 \\ \dfrac{x_2^2 - x_1^2 x_2}{x_1^2} & \text{gdy } 0 \le x_2 \le x_1^2 \end{cases}\right)$$

ta funkcja jest nieparzysta wzgl. x_2

tzn. $f(x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2)$

Wtedy ~~Łatwo~~ sprawdzić, że

1° f jest różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$

2° $f'(0) = I$

3° f nie jest odwracalna, bo

$$f(x_1, x_1^2) = f(x_1, -x_1^2) = 0.$$

4) Obliczanie pochodnej "rozwikłania" $\varphi(x)$ lub f^{-1}.

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \qquad \text{(z definicji } \varphi\text{)}$$

Ponieważ wiadomo (przy zał. TFU) że $\varphi \in C^1$, więc, różniczkując,

$$D_x F(x, \varphi(x)) + D_y F(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

w szczególności, dla $x = x_0$ $\varphi(x_0) = y_0$ i

$$D_x F(x_0, y_0) + D_y F(x_0, y_0)\, \varphi'(x_0) = 0$$

$$\varphi'(x_0) = -(D_y F)^{-1} \circ D_x F \Big|_{(x_0, y_0)}$$

złożenie przekszt. liniowych

Np.: niech $y=y(x)$ będzie określona przez równanie

$$y - \varepsilon \sin y = x \qquad (0<\varepsilon<1).$$ 5

$x_0=0, \quad y_0=0.$

Zatem

$$F(x,y) \equiv y-\varepsilon\sin y - x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1-\varepsilon\cos y \neq 0 \quad \forall y$$

$\Rightarrow$ zał. TFU spełnione

$\Rightarrow$ $y=y(x)\in C^1$, przynajmniej lokalnie

(łatwo wykazać, że też globalnie)

różniczkując:

$$y' - \varepsilon\cos y \, y' - 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$$

niestety $y=y(x)$ nie znamy. Ale ten wzór wyraża y' przez y (w ogólniejszym przypadku wchodzi tu również x)

w szczególności

$$y'(0) = \frac{1}{1-\varepsilon\cos \underbrace{y(0)}_{y_0=0}} = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Albo: niech $z=z(x,y)$ spełnia

$$\underbrace{z^3 - xz + y}_{F} = 0 \qquad (x_0,y_0)=(3,-2),\ z_0=2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x \Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0}} = 3\cdot 2^2 - 3 \neq 0.$$

Zatem, z TFU, $z \in C^1$, i różniczkując

$$\begin{cases} 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - z - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \end{cases}$$

To jest układ liniowy wzgl. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i przy założeniu TFU jest on zawsze cramerowski, więc jednoznacznie rozwiąz.

W naszym przypadku, w (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} 3\cdot 4 \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 3\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 3\cdot 4 \frac{\partial z}{\partial y} - 3\frac{\partial z}{\partial y} + 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \dots \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \dots \end{aligned}$$

Przy założeniach TFO

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}.$$

5) Stosując wielokrotne rozdmuchania (punktów, krzywych) można sprowadzić układ równań nie spełniających założeń TFU do układu spełniającego te założenia.

Np.

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \qquad \underset{const}{a \neq 0}$$

W $(0,0)$ – zał. nie spełnione: jeśli

$$F = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)$$

to $\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0) = 0$. Podstawmy

$$y = ux \qquad (\text{rozdmuchanie } 0)$$

wtedy

$$F = x^4(1+u^2)^2 - a^2x^2(1-u^2);$$

$F=0 \iff x=0$ lub

$$G \overset{df}{=} a^2(1-u^2) - x^2(1+u^2)^2 = 0$$

dla $x=0$ $\quad u=\pm 1$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{u=\pm 1} = \mp 2a^2 \neq 0$$

Zatem istnieją (w otoczeniu $x=0$) dwie „gałęzie" rozwiązań

$u = u_1(x) \qquad u_1(0)=1$

$u = u_2(x) \qquad u_2(0)=-1$

i wobec tego

$$y = u_1(x)x \quad \text{lub} \quad y = u_2(x)x.$$

Pochodne $u_1'(0)$, $u_2'(0)$ można wyznaczyć jak poprzednio

Analogicznie dla $x=vy$.

6) TFU i TFO są równoważne:

żeby uzyskać TFO z TFU, wystarczy zastosować TFU do równania $F(x,y) \equiv f(x)-y=0$; to równanie jest rozwiązalne względem x: $x=\varphi(y)$ $y \in C^1$.

naodwrót: niech $f(x,y) = (x, F(x,y))$

$(x \in \mathbb{R}^n_x,\ y \in \mathbb{R}^m_y$, a wartości f leżą w $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m)$

Wtedy $f'(x_0,y_0)$ ma postać $\begin{pmatrix} I & \text{coś} \\ 0 & D_yF|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}$

więc $f'|_{(x_0,y_0)}$ jest odwracalne i ~~…~~ niech

$g = f^{-1}$. Zatem, jeśli $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$

$u \in \mathbb{R}^n$
$v \in \mathbb{R}^m$

albo $x = g_1(u,v)$
$y = g_2(u,v)$

to

$$u = g_1(u,v)$$
$$v = F(g_1(u,v),\ g_2(u,v))$$

$$\Longrightarrow \quad g_1(u,v) = u$$
$$v = F(u, g_2(u,v))$$

Stąd: $F(x,y) = 0 \iff y = g_2(x,0)$, więc

$$\varphi(x) = g_2(x,0).$$

<u>Dowód TFO</u>: $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, $A = f'|_{x_0}$.

1° można przyjąć, że $A = id = I$. Bo niech

$$g = A^{-1} f \ : \ U \longrightarrow \mathbb{R}^n_y$$
$$x_0 = 0 \longmapsto 0$$

Wtedy ~~…~~ $g \in C^1$, $g'|_{x_0} = I$. Jeśli g jest

odwracalne, to $f^{-1} = (Ag)^{-1} = g^{-1}A^{-1}$,

Niech ~~…~~ $\varphi(x) = -(f(x) - x)$; zatem $\varphi \in C^1$,

$\varphi'(0) = 0$, więc, dla pewnego $r > 0$

$$\| \varphi' \| < 1/2 \quad \text{w kuli } B(0; 2r).$$

$\Rightarrow$ φ jest lipsch. ze stałą $\leq \frac{1}{2}$ w tej kuli; $\varphi(0) = 0$.

$f(x) = x - \varphi(x)$ i do rozwiązania jest

równanie $f(x)=y$ czyli $x-\varphi(x)=y$

(x trzeba wyrazić przez y). Szukamy rozwiązania

x w postaci $x=y+u$, czyli

$$u = \varphi(y+u).$$

y i u będą (co do normy) $\leq r$. Stąd jednoznaczność u: gdyby były 2 rozwiązania u; u_1, u_2, to

$$|u_1-u_2| = |\varphi(y+u_1)-\varphi(y+u_2)| \underset{\text{Lipschitz.}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2}|y+u_1-y-u_2| = \frac{1}{2}|u_1-u_2|$$

(sprzeczność).

2° istnienie $u=u(y)$: metodą kolejnych przybliżeń: $u_0 \equiv 0$,

$$u_{\nu+1}(y) = \varphi(y+u_\nu(y)).$$

$$|u_{\nu+1}-u_\nu| \leq \frac{1}{2}|u_\nu-u_{\nu-1}| \leq \dots$$

$$\leq \frac{1}{2^\nu}|u_1-u_0| = \frac{1}{2^\nu}|\varphi(y)|$$

$$\leq \frac{1}{2^{\nu+1}}r \quad \text{gdy} \quad |y| \leq r$$

(jak zaznaczono poprzednio)

(wszystko przy założeniu, że $|u_1|, \dots, |u_\nu| \leq r$); ale to łatwo udowodnić przez indukcję, nawet więcej:

$$|u_\nu| \leq \sum_{j \leq \nu} \frac{1}{2^j} r$$

krok indukcyjny: jeśli $|u_\nu| \leq \sum_{j\leq\nu} \frac{1}{2^j} r$, to

$$|u_{\nu+1}| \leq |u_\nu| + |u_{\nu+1} - u_\nu| \leq \sum_{j\leq\nu} \frac{1}{2^j} r + \frac{1}{2^{\nu+1}} r$$
$$= \sum_{j\leq\nu+1} \frac{1}{2^j} r \Big)$$

Stąd wynika ~~jedn~~ warunek Cauchy'ego na zbieżność jednostajną:

$$|u_{\nu+\mu} - u_\nu| \leq \sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{2^{\nu+j}} r \leq \frac{1}{2^\nu} r.$$

Zatem $u_\nu \rightrightarrows u$ w $B(0,r)$, u jest ciągłym rozwiązaniem równania $u = \varphi(y+u)$, i $\forall y$ $u(y)$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania.

3° Wystarczy wykazać, że $f^{-1}(y) = y + u(y) \in C^1$.

Najpierw wykażemy, że $u(y)$ jest Lipschitz. (ze stałą 1) w $B(0,r)$.

To wynika stąd, że wszystkie $u_\nu(y) \in C^1$ (oczywista indukcja) i $|u_\nu'| \leq 1$ (też indukcja:

$$|u'_{\nu+1}| \leq \cancel{|\varphi'(y+u_\nu)(1+u_\nu')|} \leq |\varphi'(y+u_\nu)(I+u_\nu')|$$
$$\leq \frac{1}{2}(1+|u_\nu'|) \leq 1 \quad);$$

stąd wynika, że w kuli wszystkie u_ν są Lipsch. ze stałą 1, więc ~~i~~ ich granica też.

Teraz wystarczy skorzystać z następującego lematu:

Lemat: Niech f będzie C^1 (w zbiorze otwartym zawierającym pewną kulę domkniętą), $f'(x)$ odwracal[ne] $\forall x$, $f^{-1} = h$ niech będzie dobrze określone w pewnej kuli, Lipschitzowskie. Wtedy $h \in C^1$.

D. $$f(x) = f(x_0) + f'|_{x_0} (x - x_0) + R(x)$$

(x, x_0 - dowolne)

dla $|x - x_0| < \delta$ $\quad |R| \leq \varepsilon |x - x_0|$

Podstawmy $x = h(y)$, $x_0 = h(y_0)$; niech

$A = f'|_{x_0}$ = liniowe odwracalne; niech $\tilde{R}(y) = R(h(y))$

Wtedy
$$y = y_0 + A\,(h(y) - h(y_0)) + \tilde{R}(y)$$

więc
$$h(y) = h(y_0) + A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\tilde{R}(y).$$

$|\tilde{R}(y)| \leq \varepsilon |x - x_0|$; ale $|x - x_0| = |h(y) - h(y_0)| \leq$
$\leq \underset{\text{stała L. dla } h}{C} |y - y_0|$

Zatem jeśli $|y - y_0| < \frac{\delta}{C}$, to $|\tilde{R}(y)| \leq C\varepsilon |y - y_0|$,

$|A^{-1}\tilde{R}(y)| \leq |A^{-1}| \cdot C\varepsilon |y - y_0|$; ale $|A^{-1}| = |(f'|_{x_0})^{-1}|$

$\leq C_1$ dla pewnej stałej C_1, bo f'^{-1} istnieje $\forall$ i jest ciągła. A więc h jest różniczk. $\forall y_0$,

oraz $h'(y_0) = (f'|_{x_0})^{-1} \iff h' = \underbrace{f'^{-1}}_{\text{ciągła}} \circ h$, więc $h \in C^1$.

$x_0 = h(y_0)$

Analiza $\overline{\text{II}}^*$, 11. $\overline{\text{X}}$ '11
12-14, s. 4050

<u>Uzupełnienia o funkcjach ciągłych</u>

X = metryczna ; jeśli Y - też metryczne, to $f: X \to Y$ jest ciągła jednost. $\iff$

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta \; \forall x, y$$

$$\rho(x,y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

<u>Tw.</u> Każda funkcja ciągła na przestr. zwartej X jest jednost. ciągła.

⚠ pojęcie ciągłości jednost. nie przenosi się na przestr. topologiczne.

Spójność ; obraz (przy przekszt. ciągłym) przestrzeni spójnej jest spójny ("Darboux")

(⚠ $A \subset \mathbb{R}$ jest spójny $\iff$ jest przedziałem)

Granica funkcji w punkcie, zbiór wszystkich granic ciągów zbieżnych $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n)$ = zb. punktów skupienia.

<u>Przykład</u> : $f(x,y) = \frac{y}{x}$; zb. p. skupienia w $0=(0,0)$ $= \overline{\mathbb{R}}$.

Podobnie : wsp. biegunowe na płaszczyźnie (albo sferyczne)

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ - zamiast $\frac{y}{x}$.

<u>Uwagi</u>: 1) jak rozumieć symbol $\lim_{(x,y) \to (\infty, 0)} f(x,y)$:

def. ciągowa : $\forall\, x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ $\quad f(x_n, y_n) \to g$

$\iff$ ε-δ :

$$\forall \varepsilon \ \exists C \quad \forall x, y :$$

$$x > C \ \& \ y > C \implies |f(x,y) - g| < \varepsilon$$

Podobnie z granicami niewłaściwymi.

Analogicznie $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty, c)} f(x,y)$, itd.

2) najczęściej używane uzwarcenia:

a) $\mathbb{R}^n \subset S^n$ – przez dodanie punktu ∞

$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{ciągła}]{f} Y$ rozszerza się do ciągłej $S^n \to Y$

$\iff \forall\ x_\nu \in \mathbb{R}^n : \ |x_\nu| \to \infty \implies$

$f(x_\nu)$ ma granicę w Y

b) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n \overset{\text{ozn}}{=} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \overset{\text{ozn}}{=} \mathbb{P}^n$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} Y$ rozszerza się do ciągłej $\mathbb{P}^n \to Y$

$\iff \forall\ x_\nu \in \mathbb{R}^n : \ |x_\nu| \to \infty$

$\frac{x_\nu}{|x_\nu|} \to a$

$f(x_\nu)$ ma granicę w Y.

3) granice iterowane

$$X_1 \times X_2 \xrightarrow{f} Y$$

$\lim\limits_{x_1 \to a_1} \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$;

ciągłość względem każdej ze zmiennych.

(3)

łatwo wykazać, że jeśli $\underset{x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
jest ciągła względem x $\forall y$, i monotoniczna względ. y $(\forall x)$, ~~to~~ jest ciągła.

Operatory liniowe ciągłe

X, Y – unormowane (więc metryczne)

łatwe: $X \xrightarrow{A} Y$ liniowy jest ciągły $\iff$

ograniczony, tzn

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$$

$$\overset{df}{=} \|A\|$$

Obliczenie normy operatora w przypadku przestrz. euklid.:

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$, z normami euklidesowymi:

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* A x, x \rangle .$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{S = A^* A} \mathbb{R}^n \text{ jest symetr:}$$

$$S^* = A^* A = S$$

więc w pewnej bazie ortonormalnej e_i S jest diagonalne: $S e_j = \sum \lambda_j e_j$

$\lambda_j \geq 0$ bo S jest dodat. ≥ 0; $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ porządek

Zatem, jeśli napisać

$$x = \sum x_j e_j ,$$

to

$$|Ax|^2 = \sum_j \lambda_j x_j^2 \leq \lambda_1 \sum x_j^2 \leq \lambda_1$$

równość osiągnięta dla $x = e_1$

więc $\|A\| = \sqrt{\text{największa wartość własna } S}$.

Prostsze oszacowanie: niech w jakichś bazach ortonormalnych

$$Ax = \sum \Big(\sum a_{ij}\, x_j\Big) e_i ,$$

$$\alpha = \max |a_{ij}| ;$$

wtedy

$$|Ax| \leq m\, n\, \alpha\, |x| ,$$

więc

$$\|A\| \leq m\, n\, \alpha .$$

W szczeg. każde liniowe $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$ jest ciągłe (skądinąd oczywiste)

⚠ łatwo ud., że $\|A\|$ jest normą i jeśli $L(X,Y)$ jest przestr. operatorów ciągłych, to jest to przestr. Banacha $\iff$ Y jest przestr. Banacha.

<u>Pojęcie pochodnej w punkcie</u>

$$X \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{f} Y \qquad X, Y \text{ – unormowane}$$

$$x_0 \in U$$

f jest różniczkowalne w x_0 i $f'(x_0) = A$ jeśli

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

lin ciągły

$$\Downarrow$$

"reszta"

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + R(h)$$

gdzie $\frac{R(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

czyli

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall h \quad |h|<\delta \implies |R(h)| < \varepsilon.$$

Jest to naturalne uogólnienie def. pochodnej funkcji 1 zmiennej w formie $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$.

⚠ W przestrzeniach Frécheta (np. gdzie topologia jest określona nie przez jedną normę, np. $X = C^\infty(\mathbb{R})$, $\|f\|_k = \sup_{\substack{x\in[-k,k]\\ 0\le i\le k}} |f^{(i)}(x)|$, ta definicja nie przenosi się i rach. różniczkowy przedstawia wiele trudności.

Szczególne przypadki:

1° $X=\mathbb{R}$, $\underset{\text{otocz. } x_0}{U} \xrightarrow{f} Y$. Wtedy ma sens

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = y_0$$

(bo $h\in\mathbb{R}$)

i ~~wszystko~~ poprzednia def. może być wyrażona jako

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hy_0 + R(h)$$

czyli $Ah = hy_0$. (Do tej def. wystarczy tylko topologia w Y, niekoniecznie norma)

2° pochodna kierunkowa. Niech $v \in X$;
określmy

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} Y$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

Wtedy $\varphi'(0) \overset{\text{ozn}}{=} \partial_v f(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$.

Widać, że jeśli f jest różniczk. w x_0, to

$$\partial_v f(x_0) = Av;$$

w szczeg.: $v \longmapsto \partial_v f(x_0)$ jest dobrze określ. $\forall v$
i jest operatorem liniowym ciągłym.

<u>Def</u>: f jest słabo różniczk. w $x_0 \iff \partial_v f(x_0)$
jest określ. $\forall v$, i jest operat. lin. ciągłym.
(Ta def. ma sens dla przestrz. liniowo topologicznych).

3° Przypadek X, Y - skończ. wymiarowych. e_i = baza w $X = \mathbb{R}^n$, E_j = baza w $Y = \mathbb{R}^m$ (niekoniecznie ortonorm.)

$$f(x) = \underbrace{\sum f_j(x) E_j}$$

współrz. f w bazie E_j
= funkcje o wartościach skalarnych

$$\forall v \quad \partial_v f(x_0) = \sum \partial_v f_j(x_0)\, E_j.$$

Jeśli f jest słabo różniczk. w x_0, to

$$\partial_v f(x_0) = \sum v_i \underbrace{\partial_{e_i} f(x_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

wsp. x_0 w bazie e_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathring{x}_1, \dots \mathring{x}_i + h, \dots \mathring{x}_n) - f(x_0)}{h}$$

= pochodna f rozpatr. jako funkcja zmiennej x_i, w punkcie x_0.

Zatem $A = f'(x_0)$ wyraża się wzorem:

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liniowe

$$Ae_i = \partial_{e_i} f(x_0) = \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) E_j$$

$\Longleftrightarrow$

$$Av = \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) v_i E_j$$

$v = \sum v_i e_i$

czyli A jest przekszt. lin. z macierzą $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)$ (macierz Jacobiego).

Najprostsze własności różniczkowania

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(o ile f, g - różniczk. w x_0)

$$(cf)'(x_0) = c\, f'(x_0) \qquad c = \text{const}$$

$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0)$$

f, φ - różniczk. w x_0, φ - ma wartości skalarne

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)'(x_0) = \frac{\varphi(x_0) f'(x_0) - \varphi'(x_0) f(x_0)}{\varphi^2(x_0)} \qquad (\varphi(x_0) \neq 0)$$

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \circ g'(x_0)$$

$y_0 = g(x_0)$ (o ile f, g różniczk. w y_0 i x_0, odpow.)

⚠ 1° słaba różniczk. nie implikuje ~~różniczko~~ ciągłości, nawet w $\mathbb{R}^2$

2°

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

i

$\partial_v f(0)$ istnieje $\forall v$, ale

$v \longmapsto \partial_v f(0)$ nie jest liniowe

3°

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} \\ 0 \end{cases}$$

jest w 0 różniczk. w słabym sensie, ale nie jest różniczk.

4° Niech $X \supset U \xrightarrow{f} Y$. f jest quasi-
otocz. x_0

różniczk. w x_0 jeśli $\exists\ X \xrightarrow{A} Y$
lin. ciągły

$\forall\ \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} U$
ciągła, różniczk. w 0,
$\varphi(0)=0$

$f\circ\varphi$
jest różniczk. w 0

i

$$(f\circ\varphi)'(0) = A\,\varphi'(0)$$

Jeśli X jest skończ. wymiarowa, to każda funkcja quasi różniczk. jest różniczk.

14. X. 2001

Dowód wzoru Leibniza : $(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0)$.

[czyli $(\varphi f)'\big|_{x_0}(h) = \underbrace{\varphi'\big|_{x_0}(h)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f(x_0)}_{\in Y} + \underbrace{\varphi(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f'\big|_{x_0}(h)}_{\in Y}$

$$\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + \varphi'\big|_{x_0} h + R(h) \qquad |R(h)| \le \varepsilon |h|$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'\big|_{x_0} h + S(h) \qquad |S(h)| \le \varepsilon |h|$$

(dla $|h| < \delta$)

$\Rightarrow$

$$\varphi(x_0+h) f(x_0+h) - \varphi(x_0) f(x_0) =$$

$$= \underbrace{\varphi(x_0) f'\big|_{x_0}(h) + \varphi'\big|_{x_0}(h) f(x_0)} +$$

$$+ \underbrace{\varphi(x_0) S(h)} + R(h) f(x_0) + \varphi'\big|_{x_0}(h) \cdot S(h)$$

$$+ f'\big|_{x_0}(h) R(h) + R(h) S(h)$$

część liniowa przyrostu

$$|\quad| \le |\varphi(x_0)| \cdot \varepsilon |h| ,$$

$$|R(h) f(x_0)| \le \varepsilon |h| \, |f(x_0)| , \text{ itd.}$$

Dowód reguły różniczk. złożenia:

Niech $g(x_0) = y_0$; wtedy

$$g(x_0+h) = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + g'\big|_{x_0} h + R(h)$$

$|R(h)| \le \varepsilon$

$|h| \le \delta$

$$f(y_0+k) = f(y_0) + f'\big|_{y_0} k + S(k)$$

$|S(k)| \le \varepsilon |k|$

$|k| \le \delta$

②

$$\Rightarrow \quad f\circ g\,(x_0+h) = f\big(y_0 + \underbrace{g'|_{x_0} h + R(h)}_{k}\big)$$

$$|k| \le |g'|_{x_0}|\,|h| + \varepsilon |h|$$

norma operatora

więc $|k| < \delta$ o ile

$$|h| \le \frac{\delta}{|g'|_{x_0}| + \varepsilon} \overset{df}{=} \delta_1 .$$

Niech $|h| < \min(\delta, \delta_1)$; wtedy $|k| < \delta$ i

$$f\circ g\,(x_0+h) = \underbrace{f(y_0)}_{\substack{\parallel \\ f\circ g(x_0)}} + f'|_{y_0} k =$$

$$= f\circ g\,(x_0) + \underbrace{f'|_{y_0}\, g'|_{x_0} h}_{f'(y_0)\circ g'(x_0)\, h} + \underbrace{f'|_{y_0} R(h)}_{\text{co do normy jest}}$$

$$\le |f'|_{y_0}|\,|R(h)|$$

$$\le |f'|_{y_0}|\,\varepsilon$$

Przykłady

1) pochodna przekszt. liniowego $A : X \to Y$

$$A'|_{x_0} = A, \qquad \forall x_0$$

2) pochodna przekszt. odwrotnego (jeśli istnieje – będzie później dokładniej o tym – tw o funkcji odwrotnej)

$$f \circ g = id$$

$$\Rightarrow \quad f'|_{y_0} \circ g'|_{x_0} = I \qquad y_0 = g(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f'|_{y_0} = (g'|_{x_0})^{-1}$$

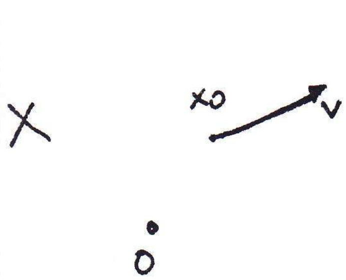
3) jeśli A = liniowe, to

$$(A \circ f)'|_{x_0} = A \circ f'|_{x_0}.$$

4) w terminach pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)|_{x_0} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(y_0)\, \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x_0)$$

dlaczego to jest mylące: bo $A'|_{x_0}$ lepiej myśleć, że jest określone na wektorach zaczepionych w x_0 i przyjmuje wartości w przestrzeni wektorów zaczepionych w $y_0 = A(x_0)$



– takie wektory oznaczmy przez $T_{x_0}X$;
przez przesunięcie równoległe
$T_{x_0}X$ można utożsamić z X.

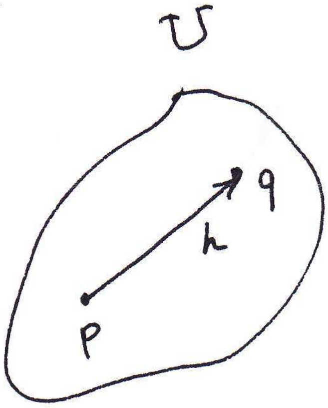
czyli: A jest określone na <u>punktach</u> X (=wektory zaczepione w 0), a $A'|_{x_0}$ – na wektorach z $T_{x_0}X$.

Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji o wartościach skalarnych

$X \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Załóżmy, że odcinek $\overline{pq} \subset U$ (domknięty),

$$h = q-p,$$

i we wszystkich punktach tego odcinka istnieje skończona $\partial_h f$. Wtedy dla pewnego $\xi \in \overline{pq}$



$$f(q)-f(p) = \partial_h f(\xi).$$

W szczególności, jeśli f jest słabo różniczk. we wszystkich punktach $\overline{pq}$, to

$$f(q)-f(p) = f'_\xi \cdot h \underset{\text{ozn.}}{=} f'(\xi)(q-p)$$

D. niech $\varphi(t) = f(p+th)$ $\quad t \in [0,1]$. Wtedy

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w $[0,1]$

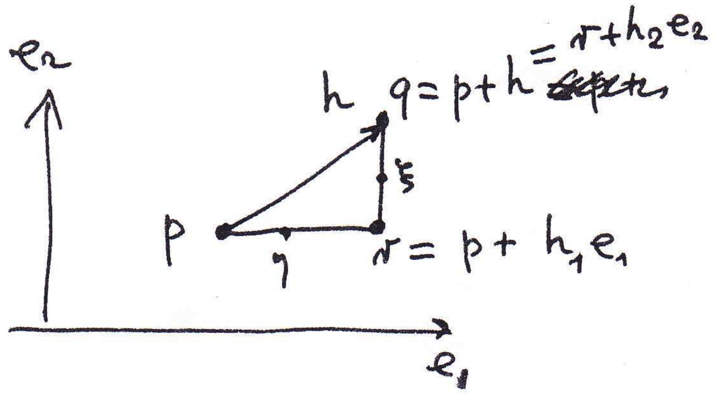
$$\underset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\parallel \\ f(q)}}{\varphi(1)} - \underset{\substack{\parallel \\ f(p)}}{\varphi(0)} = \underbrace{\varphi'(\xi)}_{\substack{\parallel\,\text{def} \\ \partial_h f(\xi).}}$$

Wniosek (konstruktywny warunek dostateczny na różniczkowalność w przestrzeniach skończ. wym.)

Jeśli (w jakiejś bazie $e_i \in \mathbb{R}^n$) istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{\text{ozn.}}{=} \partial_{e_i} f$ w otwartym U i są ciągłe, to f jest w każdym punkcie U różniczkowalna.

Dowód, dla $X = \mathbb{R}^2$ (dowód dla $\mathbb{R}^n$ - identyczny).

Niech $p \in U$; wykażemy różniczkowalność f w p.



$h = h_1 e_1 + h_2 e_2$

Stosujemy tw. o wartości średniej do obu odcinków pr i rq:

$$f(q) = f(p+h) = f(r) + \partial_{e_2} f(\xi)\, h_2$$

dla pewnego $\xi \in [rq]$

$$= f(p) + \partial_{e_1} f(\eta)\, h_1 + \partial_{e_2} f(\xi)\, h_2$$

dla pewnego $\eta \in [pr]$

$$= f(p) + \underbrace{\partial_{e_1} f(p)\, h_1 + \partial_{e_2} f(p)\, h_2} +$$

$$+ \underbrace{\left[\partial_{e_1} f(\eta) - \partial_{e_1} f(p)\right] h_1 + \left[\partial_{e_2} f(\xi) - \partial_{e_2} f(p)\right] h}_{\text{kandydat na resztę.}}$$

$h \mapsto \partial_{e_1} f(p) h_1 + \partial_{e_2} f(p) h_2$
jest liniowe
więc jest to
kandydat na pochodną

Szacujemy resztę, np.
pierwszy składnik:

z ciągłości $\partial_{e_1} f$:

$$|\partial_{e_1} f(\eta) - \partial_{e_1} f(p)| < \varepsilon \quad \text{o ile tylko}$$

$$|r - p| < \delta$$

⑥

$|h_1| \leq C|h|$ dla pewnej stałej C zależnej tylko od bazy e_i ($\triangle$ w bazie ortonormalnej oczywiście $|h_1| \leq |h|$)

Analogicznie drugi składnik.

<u>Uogólnienie wniosku na ~~przy~~ funkcje o wartościach wektorowych, ale w przestrz. skończonego wymiaru.</u>

$$\mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

e_i = baza w $\mathbb{R}^n$ E_j = baza w $\mathbb{R}^m$

$$f(x) = \sum f_j(x)\, E_j$$

to są współrzędne f w bazie E_j = funkcje o wartościach skalarnych; $f_j = \pi_j \circ f$, gdzie π_j = rzut na j-tą oś: $\pi_j(\sum_k \lambda_k E_k) = \lambda_j E_j$

Wtedy, <u>oczywiście</u>:

f jest różniczk. w x_0 $\iff$ wszystkie f_j są różniczk. w x_0

i

$$f'(h) = \sum f_j'(h)\, E_j.$$

Zatem:

jeśli w pewnych bazach e_i, E_j j. wyżej, wszystkie $\partial_{e_i} f_j$ istnieją i są <u>ciągłe</u> w U, to f jest różniczk. we wszystkich punktach U

Pola wektorowe

$\mathbb{R}^n \underset{\text{otw}}{\supset} U$; ~~...~~ pole wektorowe = funkcja,

która każdemu $U \ni x \longmapsto v(x) \in T_x\mathbb{R}$

Jeśli e_i = baza w $\mathbb{R}^n$, to $v(x) = \sum v_i(x) e_i$

funkcje o wartościach skalarnych

$v \in C^1 \overset{df}{\iff}$ wszystkie $v_i \in C^1$.

Jeśli $x_0 \in U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $v(x_0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$,

to $\partial_{v(x_0)} f \in T_{y_0}\mathbb{R}^m$, $y_0 = f(x_0)$; czyli

$f'|_{x_0} : T_{x_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{y_0}\mathbb{R}^m$ jest przekszt. liniowym

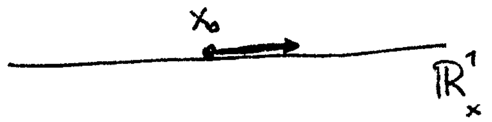
(w bazach e_i, E_j jej macierz jest macierzą Jacobiego $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)$).

Ale ta operacja nie przenosi się na pola wektorowe: jeśli $f(x_0) = f(x_1) = y_0$, to nie ma powodu, żeby

$$f'|_{x_0}(v(x_0)) = f'|_{x_1}(v(x_1)).$$

Ta trudność znika, jeśli f jest różnowartościowa. Ale nawet wtedy, gdy $v \in C^1$, to $f'v$ może nie być C^1.

Przykład: $n=m=1$, $f(x)=x^3$, $v(x)=1$ $\forall x$



$$f'(x)\,v(x) = 3x^2 \;;\quad \text{więc jeśli } y = x^3,$$

to dla $w(y) = f'(x)v(x)$

$$w(y) = 3y^{2/3} \notin C^1.$$

Ta operacja (indukowanie) jest dobrze określona, gdy f jest dyfeomorfizmem:

$U \xrightarrow[\text{dyfeom. klasy } C^1]{f} W = f(U)$, $\quad v$ = pole wekt. na U

Określamy

$$(f'v)(y) = f'|_x\, v(x)$$

gdzie $x = f^{-1}(y)$

[jeśli tylko założyć, że $f \in C^1$, to $f'v$ nie musi być C^1; ale jeśli $f \in C^{m+1}$, $v \in C^m$, to $f'v \in C^1$ – będzie później].

1-formy różniczkowe: w punkcie x_0: elementy $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ = funkcjonały na $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Różniczka funkcji φ (słabo różniczk. w x_0) określa

$$d\varphi\,(v) = \partial_v \varphi\,(x_0).$$

Jeśli e_i = baza $\mathbb{R}^n$, x_i = współrzędne, to

$$dx_i(v) = \partial_v x_i = v_i = \text{współrzędne } v$$
w bazie e_i

Zatem dx_i = baza sprzężona do e_i (zaczepionych w x_0).
Oczywiście $d\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$, bo $d\varphi(v) = \partial_v \varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underbrace{v_i}_{= dx_i(v)}$

Jeśli $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ słabo różniczk. w $x_0 \in U$,

to $T^*_{y_0}\mathbb{R}^m \xrightarrow{f^*} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ jest to przekszt. sprzężone

do $f'|_{x_0}$ (jak zwykle $y_0 = f(x_0)$).

$$\underset{T_{x_0}\mathbb{R}^n}{f^*(d\varphi)\,(v)} = d\varphi\,(f'_{x_0} v) = d(\varphi\circ f)(v)$$

czyli

$$f^* d\varphi = d(\varphi\circ f)$$ (wszystko w odpowiednich punktach)

W szczeg.

$$f^* dy_j = d(\underbrace{y_j \circ f}) = df_j$$

f_j = współrzędne f w bazie E_j.

Oczywiście, z liniowości

$$f^*(c_1 d\varphi_1 + c_2 d\varphi_2) = c_1\, d(\varphi_1 f) + c_2\, d(\varphi_2 f)$$

<u>Przykład</u>: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$(r, \varphi) \longrightarrow (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Obliczyć

$$f^* dx, \quad f^* dy.$$

Rozw.: $f^* dx = d(x\circ f) = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

[Przyp: $d(\varphi\psi) = \psi d\varphi + \varphi d\psi$, bo

$$d(\varphi\psi)(v) = \partial_v(\varphi\psi) = \varphi\partial_v\psi + \psi\partial_v\varphi$$
$$= (\varphi d\psi + \psi d\varphi)(v)\text{]}.$$

1-forma na U: funkcja, która każdemu x przyporządkowuje $\omega(x) = \omega_x \in T_x^*\mathbb{R}^n$. We współrzędnych: dx_i = baza $T_x^*\mathbb{R}^n$ $\forall x$, więc każda ω piszę się jednoznacznie jako

$$\sum \omega_i(x)\, dx_i \quad , \quad \omega_i : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\omega \in C^0$ lub C^1 $\iff$ wszystkie ω_i ~~są~~ $\in C^0$ lub C^1.

⚠ nie jest prawdą, że każda ω jest różniczką funkcji. Bo $d\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i$; więc jeśli $\omega = d\varphi$, to $\omega_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $\forall i$; taka φ nie zawsze istnieje (będzie później).

Niech $U \xrightarrow{f \in C^1} \mathbb{R}^m$, ω = 1-forma na $W \subset \mathbb{R}^m$. Wtedy określamy $f^*\omega$ = 1-forma na $f^{-1}(W)$:

$$(f^*\omega)(x) \stackrel{df}{=} f^*_x(\omega_y)$$
$$y = f(x)$$

Na współrzędnych:

$$\omega = \sum \omega_j(y)\, dy_j$$

$$(f^*\omega)(x) = \sum \omega_j(f(x)) \, f^*|_x dy_j$$

$$= \sum \omega_j(f(x)) \, df_j(x) ,$$

czyli

$$\boxed{f^*\omega = \sum \omega_j \circ f \; df_j}$$

(w odróżnieniu od pól wektorowych tu nie występuje konieczność brania f^{-1}, i ta operacja jest dobrze określona dla wszystkich $f \in C^1$)

Później będzie, że jeśli $\omega \in C^m$, $f \in C^{m+1}$, to $f^*\omega \in C^m$.

<u>Podrozmaitości (klasy C^1) d wymiarowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$</u>: takie podzbiory M, że:

$$\forall x_0 \in M \quad \exists \text{ otoczenie } x_0 \in U \underset{otw}{\subseteq} M$$

$U \cap M$ jest wykresem funkcji klasy C^1 (przy pewnym rozbiciu zmiennych w $\mathbb{R}^n$)

czyli: istnieje taka permutacja

~~$i_1, \dots, i_d, j_1, \dots$~~

$$(i_1, \dots, i_d, i_{d+1}, \dots, i_d) \qquad \varphi_\mu \in C^1$$

że $U \cap M$: $\quad \forall_\mu \; x_{i_\mu} = \varphi_\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$

Tu układ współrzędnych pochodzi od dowolnej bazy.

Przyjmujemy notację: $x' = (x_{i_1}, \dots x_{i_d})$, $x'' = (x_{i_{d+1}}, \dots x_{i_n})$ (6)

czyli
$$U \cap M : x'' = \varphi(x').$$

Np. sfery, walce; stożek – nie, globalne wykresy

Podrozmaitości określone przez układy równań:

$$\text{niech} \quad M: F_1 = 0, \dots, F_c = 0$$
(gdzie $F_i \in C^1$ w otoczeniu M); załóżmy, że w każdym $x_0 \in M$ ~~$\nabla F_1(x_0)$~~ – $\nabla F_1(x_0), \dots \nabla F_c(x_0)$ są lin. niezal., czyli $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\dots c\\ j=1,\dots n}} = c$.

Wtedy M jest podrozmaitością wymiaru $d = n - c$ (c nazywa się kowymiarem M: $c = \operatorname{codim} M$).

Bo wybierzmy, w x_0, minor rzędu c, $\neq 0$:
$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_c)}{\partial(x_{i_1}, \dots x_{i_c})}(x_0) \neq 0.$$
Wtedy, na mocy TFU, równania
$$F_1(x', x'') = 0, \dots \quad F_c(x', x'') = 0$$
można rozwikłać względem x'', gdzie
$$x'' = (x_{i_1}, \dots x_{i_c})$$
$$x' \text{ – pozostałe}$$

czyli $F_i(x', x'') = 0 \iff x'' = \varphi(x')$ punktu x_0

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$(x', x'') \in M$ $\qquad$ M jest wykresem w otoczeniu

Podrozmaitości określone jako obraz przekształcenia

Niech

$$\underset{u_1,\dots,u_d}{\mathbb{R}^d_u} \overset{\text{otw}}{\supset} V \xrightarrow[]{F \,\in C^1} \mathbb{R}^n_x$$

F różnowartościowe

$F'|_u$ injekcja $\forall u \in V$

Wtedy $M = F(V)$ jest podrozmaitością wymiaru

Bo niech $x_0 = F(u_0) \in M$. Z macierzy $\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(u_0)\right)$ wybierzmy maksymalny minor niezerujący:

$$\frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_d})}{\partial(u_1, \dots u_d)}(u_0) \neq 0.$$

Na mocy TFO przekszt. $(F_{i_1}, \dots F_{i_d})$ jest dyfeomorfizmem w otoczeniu u_0. Zatem istnieje odwrotne, klasy C^1:

$$F_{i_1}(u) = x_{i_1}, \dots \quad F_{i_d}(u) = x_{i_d}$$

$$\Updownarrow$$

$$u = \Phi(x_{i_1}, \dots x_{i_d}).$$

Niech $x_{i_{d+1}}, \dots x_{i_n}$ = pozostałe zmienne.

Obraz przy F otoczenia punktu u_0 da się przedstawić jako

$$x_{i_l} = F_{i_l} \circ \Phi(x_{i_1}, \dots x_{i_d}).$$

$l > d$

Wyznaczenie płaszczyzny stycznej. Z tego, że lokalnie podrozmaitość jest wykresem wynika od razu, że

1° każda płaszcz. styczna jest d-wymiarowa

2° każdy wektor $v \in T_{x_0}M$ jest styczny do pewnej krzywej γ, klasy C^1, leżącej w M.

Niech $M: F_1 = 0, \dots, F_c = 0$, i spełnione jest założenie: $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = c$. Jeśli $\gamma(t) \in M$ $\forall t$, to $F_i(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow F_i'(\dot{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow$ $\nabla F_i \perp \dot{\gamma}$. Zatem wszystkie ∇F_i są prostopadłe do płaszcz. stycznej, i $T_{x_0}M = \mathrm{span}(\nabla F_1(x_0), \dots, \nabla F_c(x_0))$

$\nabla F_i|_M$ tworzą c pól, liniowo niezależnych w każdym punkcie, rozpinających przestrzeń normalną $T_{x_0}^{\perp}M$.

Jeśli $M = F(V)$, $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right) = d$, to oczywiście pola wektorowe

$$v_1\Big|_{F(u)} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial u_1}(u)\, e_i, \; \dots, \; v_d\Big|_{F(u)} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial u_d}(u)\, e_i$$

są liniowo niezależne na M i rozpinają w każdym punkcie płaszczyznę styczną.

Uwagi o 1-formach

1) funkcje (o wartościach w $\mathbb{R}$) = 0-formy

Jeśli $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow[\text{0-forma}]{\varphi} \mathbb{R}$, to

$$f^*\varphi \stackrel{df}{=} \varphi\circ f .$$

Wtedy

$$f^* d\varphi = d(\varphi\circ f) = d f^*\varphi$$

czyli d jest przemienna z f^* (funktorialność d)

2) dla funkcji

$$d(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\, d\varphi_1 + c_2\, d\varphi_2 \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const},$$

$$d(\varphi\psi) = \varphi\, d\psi + \psi\, d\varphi$$

3) obliczyć różniczkę złożenia

$$d(\varphi(f_1, \dots, f_k)).$$

Można obliczyć to jak poprzednio: jeśli $f=(f_1,\dots,f_k)$ to

$$d(\varphi\circ f) = f^* d\varphi = f^*\left(\sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} dy_j\right)$$

$$= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\circ f \; df_j .$$

Albo: ~~t~~

$$d\left(\varphi(f_1, \dots, f_k)\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi(f_1, \dots, f_k)\right) dx_i$$

$$= \sum_{j,i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\circ f \; \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i =$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\circ f \; \underbrace{\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i}_{df_j} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\circ f \; df_j .$$

4) Niech $(x,y) \xmapsto{f} (\overset{u}{x+y}, \overset{v}{x^2+y^2}, \overset{w}{x^3y^3})$,

$\omega = u\,dv + v\,dw + w\,du$; obliczyć $f^*\omega$.

Rozwiązanie:

$$f^*(\omega) = f^*(u\,dv) + f^*(v\,dw) + f^*(w\,du) =$$

$$= (u\circ f)\, d(x^2+y^2) + (v\circ f)\, d(x^3y^3) +$$

$$+ w\circ f \; d(\cancel{x^3y^3}\; x+y) =$$

$$= (x+y)(2x\,dx + 2y\,dy) + (x^2+y^2)(3x^2y^3\,dx$$

$$+ 3x^3y^2\,dy) + x^3y^3(dx+dy) =$$

$$= \left(2x(x+y) + 3x^2y^3(x^2+y^2) + x^3y^3\right)dx +$$

$$+ \left(2y(x+y) + 3x^3y^2(x^2+y^2) + x^3y^3\right)dy .$$

<u>Przykład zanurzenia</u> $\mathbb{RP}^n$ w przestrzeń euklidesową.

$$\mathbb{RP}^n \ni (x_0 : \dots : x_n) \xrightarrow[\text{na obraz}]{\text{homeomorfizm}} (u_{ij})_{i,j=0,\dots n}$$

(współrzędne w $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$

$$u_{ij} = \frac{x_i \cdot x_j}{x_0^2 + \dots + x_n^2}$$

Łatwo sprawdzić, że obraz jest opisany równaniami

$$\begin{cases} u_{ij}\, u_{kl} = u_{ik}\, u_{jl} & \text{dla wszystkich } i,j,k,l \\ u_{00} + u_{11} + \dots + u_{nn} = 1 \end{cases}$$

Do tego układu jednak TFU się nie stosuje (można wykazać, że nie ma układu pól wektorowych, normalnych do obrazu, wszędzie liniowo niezależnych).

<u>Grassmanniany</u> $G_d(\mathbb{R}^n)$ = przestrzeń wszystkich d-wymiarowych podprzestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$, z naturalną topologią. Rozpatrzmy $\mathbb{R}^{n^2}$ jako wszystkie $n \times n$ macierze. Zanurzenie

$$G_d(\mathbb{R}^n) \ni H \longmapsto P_H = \text{rzut ortogonalny na } H$$
$$= \text{macierz } n \times n$$

Rzuty ortogonalne są macierzami scharakteryzowanymi przez równania $A^2 = A$, $A^* = A$ (na każdej składowej zbioru rozwiązań $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{const}$).

<u>Ekstrema związane</u>: Niech $M^d \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (lub określona w otoczeniu M).

Jeśli $f|_M$ osiąga w $x_0 \in M$ ekstremum lokalne i jest ~~[illegible]~~ różniczkowalna w x_0, to

$$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0} M.$$

(oczywiste, bo dla dowolnej krzywej $(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\gamma} M$, $\gamma(0) = x_0$, $f \circ \gamma$ ma ekstremum lokalne w $t=0$, więc $0 = (f\circ\gamma)'(0) = f'|_{x_0} \dot{\gamma}|_0$; ale każdy wektor styczny do M w x_0 jest styczny do pewnej krzywej klasy C^1 leżącej w M).

W szczególności, jeśli $M: F_i = 0$, i do tego układu stosuje się TFU, to warunkiem koniecznym na ekstremum jest, by

$$\nabla f(x_0) = \sum \lambda_i \nabla F_i(x_0)$$

dla pewnych stałych λ_i (bo $\nabla F_i(x_0)$ rozpinają przestrzeń normalną do M w x_0).

<u>Przykłady</u> 1) $M: |x| = 1 \iff \sum x_i^2 = 1$,

$f(x) = \langle Sx, x \rangle$ = forma kwadratowa.

Jeśli w $x_0 \in M$ f osiąga ekstremum lokalne, to

$$\underbrace{\nabla f(x_0)}_{= S x_0} = \lambda x_0 \qquad \left(\nabla(\sum x_i^2) = 2x \right)$$

czyli x_0 jest wektorem własnym S.

2) $\forall x_i > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Z jednorodności L i P wystarczy wykazać, że jeśli $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = 1$, to $x_1 + \cdots + x_n \ge n$;

czyli że $\inf\limits_{x_1 \cdots x_n = 1} (x_1 + \cdots + x_n) \ge n$.

Ekstrema lokalne: $\nabla(x_1 + \cdots + x_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\nabla(x_1 \cdots x_n - 1) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \cdots x_n \\ x_1 x_3 \cdots x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

g na $M: x_1 \cdots x_n - 1 = 0$

czyli uzyskujemy warunek konieczny:

$\frac{1}{x_i} = \lambda \implies$ wszystkie x_i muszą być równe

a wtedy wszystkie $x_i = 1$

więc $x_1 + \cdots + x_n = n$.

Zauważmy, że na M poza kulą o promieniu R przynajmniej jedno x_i musi być $\ge \frac{R}{\sqrt{n}}$. Jeśli więc $R = n\sqrt{n}$, to na M poza tą kulą $\Rightarrow x_1 + \cdots + x_n \ge n$.

Zatem $\inf (x_1 + \cdots + x_n) \ge n$.

Uzupełnienia na temat pochodnej 1 rzędu

1) Pochodna przekszt. odwrotnego:

jeśli $X \supset U \xrightarrow{f} Y$, $U \ni x_0$, $f(x_0) = y_0$,

$g = f^{-1}$, f, g są różniczk. w x_0, y_0

odpowiednio, to

$$g \circ f = id \qquad i$$

$$g'|_{y_0} \cdot f'|_{x_0} = I$$

$\Rightarrow$ $f'|_{x_0}$ jest izomorfizmem liniowym i

$$g'|_{y_0} = (f'|_{x_0})^{-1}.$$

Dla $X = Y = \mathbb{R}^n$: warunkiem koniecznym na to, by f (różniczk. w x_0) miało różniczkowalne f^{-1} jest, by $f'|_{x_0}$ było odwracalne $\Rightarrow$ $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right) \neq 0$ (w dowolnych bazach):

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

baza e_i baza: E_j (niekoniecznie ta sama)

wtedy $f = \sum f_j E_j$.

<u>Def</u> $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)$ = jakobian f w x_0

$$\overset{\text{ozn.}}{=} J_f(x_0) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(x_0)$$

Jakobian ma przejrzystą interpretację geometryczną (będzie później).

2) Przestrzeń styczna do wykresu przekształcenia.

$$\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y, \quad x_0 \in U, \quad y_0 = f(x_0)$$

$$(x_0, y_0) \in G_f = \{(x,y) : y = f(x)\} = \text{wykres } f.$$

Niech, ogólnie, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a =$ punkt skupienia A

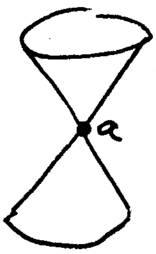
Sieczna do A w a: każda prosta przechodząca przez a i jakiś inny punkt $q \in A$.

Stożek styczny do A w a:

$C_a(A) = \{ w : \exists$ ciąg siecznych do A aq_ν, $A \setminus \{a\} \ni q_\nu \longrightarrow a$ i wektorów $w_\nu \in aq_\nu$, $w_\nu \longrightarrow w \}$.

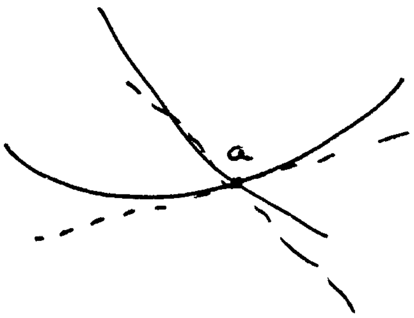
(przyjemnie jest uważać wektory $C_a A$ za zaczepione w a; czyli $C_a A \subset T_a \mathbb{R}^N$).

łatwo sprawdzić, że $C_a A$ jest stożkiem (tzn. jeśli $w \in C_a A$, to $\lambda w \in C_a A$). Nie zawsze jest przestrzenią liniową:

a) 

$A: z^2 = x^2 + y^2$

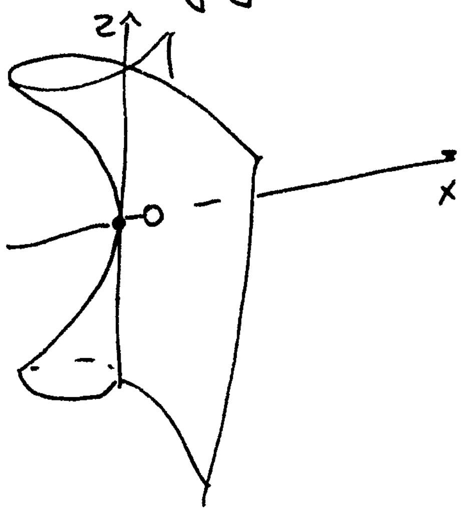
– wtedy $C_a A = A$

b) 

przecinające się krzywe C^1 w $\mathbb{R}^2$ (tj wykresy funkcji klasy C^1)

$C_a A$ = suma mnogościowa stycznych w a do obu tych krzywych

c) obliczyć $C_0 A$, gdy $A: y^2 = x^3 + x^2 z^2$



(odp. $\{y=0\}$)

Teraz $a = (x_0, y_0) \in G_f = A$.

Obserwacja: $T_a G_f$ jest przestrzenią liniową, której rzut na $\mathbb{R}^n_x$ jest izomorfizmem liniowym $\Leftrightarrow$ f jest w x_0 różniczkowalna i wtedy

$$T_a G_f = \{(\xi,\eta) : \eta = f'|_{x_0} \xi\}.$$

D. Wszystkie granice wektorów na siecznych są postaci

$$\lambda_\nu \left(h_\nu, f(x_0 + h_\nu) - f(x_0) \right)$$

$$h_\nu \longrightarrow 0, \quad \lambda_\nu \in \mathbb{R}.$$

Jeśli f jest w x_0 różniczkowalna i $f'|_{x_0} = A$, to

$$\lambda_\nu \left(h_\nu, f(x_0 + h_\nu) - f(x_0)\right) =$$

$$= \left(\lambda_\nu h_\nu, A(\lambda_\nu h_\nu) + \lambda_\nu \cdot R(h_\nu)\right)$$

$$\frac{R(h_\nu)}{|h_\nu|} \longrightarrow 0$$

Ten ciąg ma być zbieżny; więc

$$\lambda_\nu h_\nu \longrightarrow \xi$$

i wtedy

$$A(\lambda_\nu h_\nu) + \underline{\lambda_\nu R(h_\nu)}$$

$$A(\lambda_\nu h_\nu) \longrightarrow A\xi$$

w szcz.

$$|\lambda_\nu| \le \frac{\text{const}}{|h_\nu|}$$

$$|\lambda_\nu R(h_\nu)| = |\lambda_\nu|\,|R(h_\nu)| \le |\lambda_\nu||h_\nu| \cdot \frac{R(h_\nu)}{|h_\nu|}$$

$$\frac{R(h_\nu)}{|h_\nu|} \longrightarrow 0$$

(5)

Naodwrót: każda podprzestrzeń liniowa, której rzut na $\mathbb{R}^n_x$ jest izomorfizmem, pisze się jako

$$\{(\xi, \eta) : \eta = A\xi\} \text{ - dla pewnego liniowego } \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

Zatem $\forall \xi \; \exists \lambda_\nu, h_\nu \quad h_\nu \to 0, \quad \lambda_\nu h_\nu \to \xi$,

wtedy

$$\cancel{\lambda_\nu(f(x_0)} \; \lambda_\nu \left(f(x_0+h_\nu) - f(x_0)\right) \longrightarrow A\xi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_\nu \left(f(x_0+h_\nu) - f(x_0) - Ah_\nu \right) \longrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{|\lambda_\nu|}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|\lambda_\nu h_\nu|}_{\downarrow \; |\xi|} \frac{|f(x_0+h_\nu) - f(x_0) - Ah_\nu|}{|h_\nu|} \to$$

Dla $\xi \neq 0$ wychodzi teza.

3) Gradient funkcji. Niech $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ będzie słabo różniczk. w x_0. Wtedy $f'(x_0) \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Def $\nabla f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) =$ taki (jedyny) wektor (zaczepiony w x_0), że $\forall v$

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = f'|_{x_0}(v) = \partial_v f(x_0).$$

⚠ pochodna funkcji (= różniczka) nie zależy od iloczynu skalarnego (ani normy); ale gradient zależy.

Przykład e_i = baza $\mathbb{R}^n$, x_i = stowarzyszone współrzędne:

tzn $x = \sum x_i e_i$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \stackrel{df}{=} \partial_{e_i} f = f'(e_i)$$

(dokł.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0} = f'\Big|_{x_0}(e_i)$)

Jeśli (e_i) jest ortonormalna, to piszę

$$\nabla f(x_0) = \sum z_i e_i$$

uzyskamy, $\forall v = \sum v_i e_i$

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \sum z_i v_i = \cancel{\sum \partial f}$$

$$= \partial_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i$$

czyli

$$\nabla f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, e_i .$$

Teraz niech e_i będzie dowolna, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ji}$

Wtedy, znowu piszę $\nabla f(x_0) = \sum z_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \sum z_i v_j \underset{\substack{\parallel \\ g_{ji}}}{g_{ij}} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i$$

$$\cancel{\sum g_{ij} z_i} \quad \sum_j \Big(\sum_i g_{ji} z_i - \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big) v_j = 0 .$$

Ta równość ma być spełniona $\forall v$, więc

$$\sum g_{ji} z_i = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) .$$

Niech (g^{ij}) będzie macierzą odwrotną do (g_{ij}):

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} ;$$

wtedy

$$z_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

czyli

$$\nabla f(x_0) = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right) e_i .$$

4) Pojęcie różniczki funkcji.

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{słabo różniczk. w } x_0 .$$

Wtedy $f'(x_0) \stackrel{\text{df}}{=} df(x_0) \in (\mathbb{R}^n)^*$ (w odróżnieniu od $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$).

$$df(x_0)(v) = f'(x_0)\ (v) = \partial_v f(x_0).$$

Niech e_i będzie bazą $\mathbb{R}^n$ i x_i = stowarzyszony współrzędnymi. x_i można traktować jak funkcję na $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n \ni x \xmapsto{x_i} x_i \in \mathbb{R}. \quad \text{liniowa}$$

$dx_i\ (v) = v_i = e_i^*(v)$, więc

$$dx_i = e_i^* = \text{baza sprzężona do } e_i .$$

Stąd

$$df(x_0)(v) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\ v_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\ dx_i(v)$$

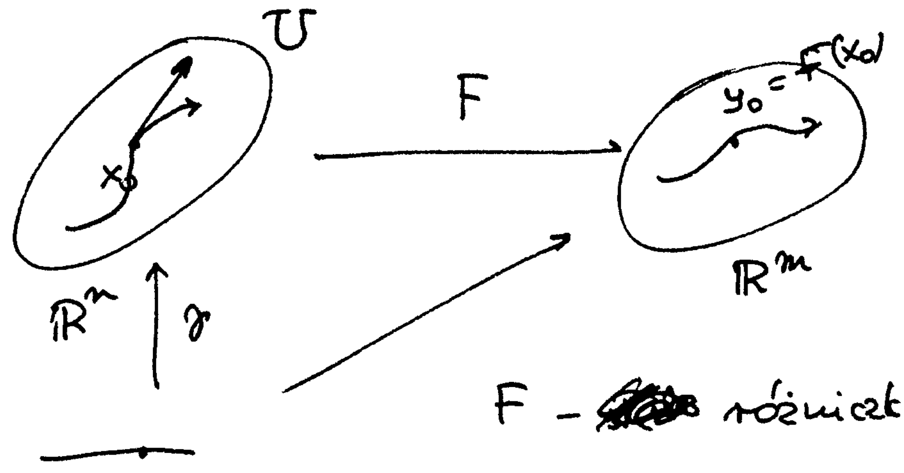
więc

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i .$$

Elementy $(\mathbb{R}^n)^*$ (dokładniej, $(T_{x_0}\mathbb{R}^n)^* \stackrel{\text{ozn.}}{=} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$) nazywają się 1-formami w x_0. Zatem

$$df(x_0) \in T^*_{x_0}\mathbb{R}^n .$$

5) Interpretacja pochodnej przekształcenia w terminach krzywych



F – ~~[illegible]~~ różniczk. w x_0

$\gamma : (a,b) \longrightarrow U$ (krzywa sparametryzowana)

$\gamma(0) = x_0$

γ = różniczk. w 0

$\dot{\gamma}(0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$

= „wektor prędkości γ"

Wtedy (różniczk. złożenia)

$$(F \circ \gamma)'(0) = F'\big|_{x_0} \cdot \dot{\gamma}(0) .$$

Jeśli $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$, to można wziąć dowolną (różniczk. w 0) $\gamma(t)$, ~~[illegible]~~ $\dot{\gamma}(0) = v$ (np. $\gamma(t) = x_0 + tv$)

i wtedy

$$F'\big|_{x_0} v = (F \circ \gamma)^{\cdot}(0) .$$

6) Działanie pochodnej przekształcenia na ~~[illegible]~~ 1-formach.

$$\mathbb{R}^n \supset \underset{\substack{\Psi \\ x_0}}{U} \xrightarrow{\ F\ } \underset{F(x_0) = y_0}{\mathbb{R}^m} ,$$

F – różniczk. w x_0.

Różniczka (pochodna) F:

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n \xrightarrow{F'|_{x_0}} T_{y_0}\mathbb{R}^m$$

i jest określone przekształcenie sprzężone

$$T^*_{y_0}\mathbb{R}^m \xrightarrow{(F')^* \overset{ozn}{=} F^*} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n .$$

<u>Tw</u> $F^*(df) = \cancel{d(f\circ F)}$
$= d(f\circ F)$ (dla $V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y_0 \in V$, różniczk. w y_0);

D. dla dowolnego $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$:

$$F^*(df)(v) \underset{\substack{\text{def. przekszt.}\\ \text{sprzężonego}}}{=} df\left(F'|_{x_0} v\right) =$$

$$= f'|_{y_0}\left(F'|_{x_0}(v)\right) =$$

$$\underset{\substack{\text{różniczkowanie}\\ \text{złożenia}}}{=} (f\circ F)'|_{x_0}(v) = d(f\circ F)|_{x_0}($$

<u>Przykład</u>: Czy podobny wzór zachodzi dla gradientów?

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m & & \\ \Psi & & \cup & & \\ x_0 & & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & & \Psi & & \\ & & y_0 = F(x_0) & & \end{array}$$

– jak poprzednio

F, f – różniczkowalne w x_0, y_0 odpowiednio

Mamy więc funkcję f (określ. w otocz. y_0) i $f\circ F$ w otoczeniu x_0. Czy

$$F'|_{x_0} \nabla(f\circ F)(x_0) \overset{?}{=} \nabla f(y_0) .$$

NIE:

w bazach ortonormalnych e_i, E_j:

$$F(x) = \sum F_j(x)\, E_j$$

$$\nabla f\Big|_{y_0} = \sum \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0)\, E_j$$

$$\nabla (f\circ F)\Big|_{x_0} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\Big|_{y_0} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\Big|_{x_0} e_i$$

$$F'\Big|_{x_0} \nabla (f\circ F)\Big|_{x_0} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} F' e_i$$

$$= \sum \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} E_k$$

⚠ To jest znany fakt z algebry liniowej: niech

$$V \xrightarrow{A \text{ – liniowe}} W \qquad (V, W \text{ – z iloczynami skalarnymi})$$

$$W^* \xrightarrow{A^*} V^* \qquad \text{sprzężone}$$

Niech $\omega \in W^*$, $\lambda = A^*\omega \in V^*$.

$\exists !\ v, w$

$$\omega(\eta) = \langle w, \eta\rangle \qquad \forall \eta \in W$$

$$\lambda(\xi) = \langle v, \xi\rangle \qquad \forall \xi \in V$$

Ale wtedy $w \neq Av$ (chyba, że A jest izometrią)

Dokładniej, niech $V \xrightarrow{\Phi_V} V^*$ będzie izomorf. danym przez iloczyn skalarny:

$$\Phi_V(v) = \lambda, \quad \lambda(\xi) = \langle v, \xi\rangle.$$

Wtedy diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "A^*"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny $\iff$ A jest izometrią : $A^*A = I$

7) Interpretacja geometryczna gradientu.

a) jego kierunek (jeśli $\nabla f(x_0) \neq 0$) jest „kierunkiem najszybszego wzrostu" f w sensie następującym: niech $a = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ i b będzie dowolnym wektorem jednostkowym; wtedy

$$\partial_b f(x_0) = \langle b, \nabla f(x_0) \rangle \leq$$

$$\leq |\nabla f(x_0)|$$

równość spełniona tylko dla $b=a$

$|\nabla f(x_0)| = \partial_a f(x_0)$ = „szybkość wznoszenia się", jeśli x porusza się po prostej $x_0 + ta$.

b) warstwica f: $V_c = \{x : f(x) = c\}$.

Niech $\nabla f(x_0) \neq 0$ i $c = f(x_0)$. Wtedy $\nabla f(x_0)$ jest prostopadły do V_c w tym sensie, że dla każdej krzywej $(a,b) \xrightarrow{\gamma} V_c \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = x_0$,

różniczkowalnej w x_0,

$$\langle \nabla f(x_0), \dot{\gamma}(0) \rangle = 0 .$$

Bo $\langle \nabla f(x_0), \dot{\gamma}(0) \rangle = (\underbrace{f \circ \gamma}_{const = c})^{\cdot}\big|_0 = 0.$

⚠ W tej wersji własność powyższa jest b. słaba, bo może się zdarzyć, że jedynymi krzywymi γ spełniającymi powyższe założenia są krzywe stałe : $\gamma(t) = x_0$.

8) Warunek konieczny na ekstremum lokalne: jeśli $\underset{\mathbb{R}^n \supset \text{otw}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ przyjmuje ekstr lok. w $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\partial_v f(x_0)$ istnieje, to $\partial_v f(x_0) = 0$. W szczeg. jeśli istnieją w x_0 wszystkie pochodne cząstkowe w x_0, to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$; jeśli f jest słabo różniczkowalna w x_0, to $f'(x_0) = 0$.

⚠ w odróżnieniu od $n=1$, w wyższych wymiarach istnieją funkcje, określone np. na całym $\mathbb{R}^n$, z wieloma maximami i ani jednym minimum (np. $\sin x - y^2$).

9) Niektóre wnioski z tw. o przyrostach skończonych.

a) jeśli $\underbrace{f'|_{x_0} = 0}_{\text{słaba pochodna}}$ $\forall x_0$, $\underset{\text{spójny otwarty}}{U} \xrightarrow{f} Y$

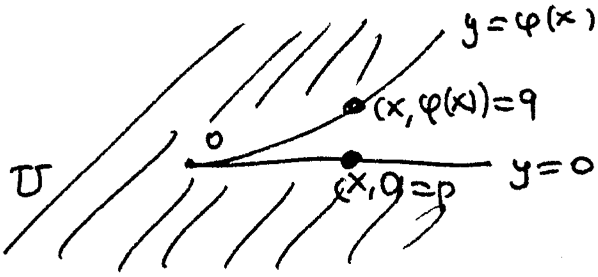
to $f = const$

b) jeśli U jest wypukły i $\|f'|_{x_0}\| \le K$ $\forall x_0$, to (13)

$$|f(x)-f(x')| \le K|x-x'|$$

⚠ Bez założenia wypukłości – niekoniecznie:

$y=\varphi(x) \overset{np.}{=} x^N$, $N>2$



$$f(x)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \text{ lub } x\le 0 \\ x^2 & y\ge\varphi(x) \ \& \ x>0 \end{cases}$$

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 2$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 0$, ale

$$|f(q)-f(p)| = x^2$$
$$|q-p| = \varphi(x)$$

Jeśli U jest spójny i otwarty, to można określić metrykę "wewnętrzną" d_U:

długość odcinka pq $= \|q-p\|$ (zakł., że mamy zadaną normę)

$\Rightarrow$ długość łamanej = sumie długości jej segmentów

$d_U(p,q) = \inf$ długości łamanych łączących p i q

Wtedy, jeśli $|f'| \le K$ wszędzie w U, to

$$|f(q)-f(p)| \le K\, d_U(p,q).$$

c) Tw. Niech $X \supset U \xrightarrow[f_\nu]{\text{otw, spójny}} Y$ ~~będą~~ (X, Y - rzeczywiste skończ. wymiarowe)

f_ν różniczk. w U; $\forall x_0 \in U \; \exists r > 0$

f_ν' - zbieżne jednostajnie w $K(x_0, r)$.

Niech $g = \lim f_\nu' : U \longrightarrow L(X,Y)$.

~~Wtedy~~ Niech $f_\nu(x_0)$ będzie zbieżny, dla pewnego $x_0 \in U$.

Wtedy f_ν jest zb. jednostajnie ~~wok~~ w pewnej kuli wokół każdego punktu (o dodatnim promieniu) i jeśli $f = \lim f_\nu$, to $f' = g$.

D. Weźmy dowolne x_0, r - jak wyżej. Wtedy $\forall x \in K(x_0, r)$

$$\cancel{f_\nu(x) - f_\mu(x_0)}$$

$$\left| \left(f_\nu(x) - f_\mu(x)\right) - \left(f_\nu(x_0) - f_\mu(x_0)\right) \right| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \sup_{z \in K(x_0,r)} \left\| \left(f_\nu'\big|_z - f_\mu'\big|_z\right\| \right.$$

$$< \varepsilon r \quad \text{dla } \mu, \nu \gg 0.$$

Zatem jeśli $f_\mu(x)$ jest zbieżny dla jakiegoś $x \in K(x_0, r)$, to jest zbieżny jednostajnie w $K(x_0, r)$. Stąd, ze spójności U, $f_\mu(x)$ jest zbieżny $\forall x$, jednostajnie w $K(x_0, r)$.

15

Pozostaje wykazać, że ~~f_ν~~ $f' = g$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$.

$$\exists \nu_0 \quad \| f'_\nu(z) - f'_\mu(z) \| < \varepsilon \quad \& \quad \| g(x_0) - f'_\nu(x_0) \| \leq \varepsilon.$$
$$\forall z \in K(x_0, r) \quad , \mu, \nu > \nu_0 .$$

Jeśli w poprzedniej nierówności $\nu \to \infty$, to

$$\left| \left(f(x) - f(x_0) \right) - \left(f_\mu(x) - f_\mu(x_0) \right) \right| < \varepsilon |x - x_0|$$

Z definicji różniczkowalności:

$$\forall \nu \ \exists \delta \qquad | f_\nu(x) - f_\nu(x_0) - f'_\nu(x_0)(x - x_0) | \leq$$
$$\leq \varepsilon |x - x_0|$$
$$\text{dla } |x - x_0| < \delta$$

Ustalamy teraz $\nu > \nu_0$.
Stąd

$$| f(x) - f(x_0) \} - g'(x_0)(x - x_0) | \leq \dots$$
(nierówność trójkąta).

Analiza $\mathbb{II}^*$, 28 X '11

Całka (z funkcji ciągłej 1 zmiennej o wartościach wektorowych);

X - ~~przestrzeń~~ Banacha

$I = [a,b]$

$I \xrightarrow{f} X$ ciągła $\Rightarrow$ jednostajnie ciągła

Funkcja pierwotna : $I \xrightarrow{F} X$

$F' = f$

TW Każda f ciągła ma funkcję pierwotną określoną z dokładnością do stałej addytywnej (stała $\in X$).

D. Dla X skończ. wymiarowej można wziąć dowolną bazę $e_i \in X$, $f = \sum f_i e_i$ $(f_i : I \to \mathbb{R})$ i $F = \sum \int f_i \, e_i$.

Dla X dowolnej można tego dowieść aproksymując f funkcjami ciągłymi kawałkami liniowymi:

$$f_\nu \rightrightarrows f$$

f_ν jest postaci : ~~dla pewnego podziału~~

weźmy podział $\mathcal{P}_\nu = (t_0 = a < t_1 < \dots = b)$ na 2^ν równych części

i

$$f_\nu(t) = (1-\lambda) f(t_i) + \lambda f(t_{i+1})$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$t = (1-\lambda)t_i + \lambda t_{i+1}$$

(czyli: $\lambda = \dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$, ②

$$f_\nu(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} f(t_i) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} f(t_{i+1})$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$)

Każda funkcja liniowa ma f. pierwotną:

jeśli $f(t) = A + Bt$ $(A, B \in X)$,

to $F(t) = \underset{\in X}{\mathrm{const}} + At + \frac{B}{2}t^2$,

więc wszystkie f_ν mają f. pierwotne F_ν (skleić poszczeg. funkcje z zachowaniem ciągłości). Przez dobór stałej można uzyskać, że $\forall \nu$ $F_\nu(a) = 0$. Zatem $F_\nu(a)$ jest zbieżny & F'_ν jest zb. jednostajnie

$\Rightarrow$ $F_\nu \rightrightarrows F$ & $F' = \lim F'_\nu = \lim f_\nu = f$.

O.K.

Z ciągłości jednostajnej f wynika, że

$$\int_a^b f \overset{df}{=} F(b) - F(a)$$

jest granicą sum Riemanna

$$S_\nu = \sum f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

podział P_ν: $t_0 = a < t_1 < \dots < b$

$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$

i stąd wynika oszacowanie

$$\left| \int_a^b f \right| \le \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \, (b-a).$$

Dalsze własności (oczywiste)

- liniowość: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

  $\int_a^b \underbrace{\lambda}_{\text{const}} f = \lambda \int_a^b f$

- całk. przez podstawienie: jeśli $h:[a',b'] \to [a,b]$, $h \in C^1$

  to $$\int_a^b f = \int_{a'}^{b'} f\circ h \cdot h'$$

- całk. przez części: $[a,b] \xrightarrow{f} X$, $[a,b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, obie C^1

  $$\int_a^b g f' = gf\Big|_a^b - \int_a^b g' f.$$

[dowód: $\int_a^b f = Fh(b') - Fh(a') =$

$= \int_{a'}^{b'} (F\circ h)' = \int_{a'}^{b'} F'\circ h \cdot h' = \int_{a'}^{b'} f\circ h \; h'$]

podobnie całk. przez części

Ciągłość i różniczkowanie całki z parametrem

$$A\times I \xrightarrow[\text{ciągła}]{f} X$$

$A \subset M$ (otw, metryczna)

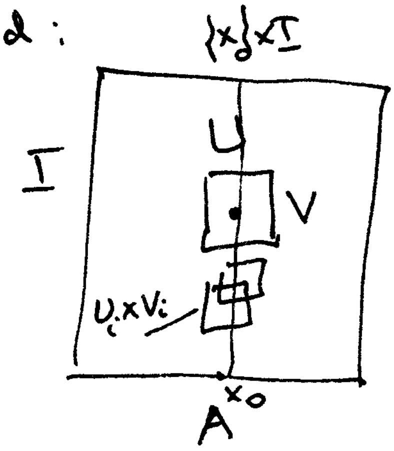
$I = [a,b]$

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt \quad (x \in A)$$

$F: A \to X$

Stw F jest ciągła na A.

Dowód:



$x_0 \in A$ dowolne; ε dowolne

Jeśli $t \in I$, to $\exists$ otoczenie ~~(t, x_0)~~ (x_0, t) postaci

$$\underbrace{U}_{\text{otw w } A} \times \underbrace{V}_{\text{otw. w } I}$$

że ~~$f(t)$~~

$$\| f(x, t') - f(x_0, t) \| < \varepsilon$$

dla $(x, t') \in U \times V$

Z pokrycia $\{x_0\} \times I$ zbiorami postaci

$$\underbrace{(U \times V)}_{\text{jak wyżej}} \cap (\{x_0\} \times I)$$

wybieramy pokrycie skończone $U_i \times V_i$. $U_0 \overset{df}{=} \bigcap U_i$ jest otoczeniem x_0 i łatwo widać, że $\forall t \in I$ $\forall x \in U_0$

$$\| f(x,t) - f(x_0,t) \| < \varepsilon.$$

Zatem $\| F(x) - F(x_0) \| \cancel{\le} \cancel{\int_a^b} = \left\| \int_a^b \big(f(x,t) - f(x_0,t)\big)\,dt \right\|$

$\le \varepsilon (b-a).$

<u>Stw</u> Załóżmy, że $\forall t$

$$D_x f(t,x)$$

pochodna wzgl. x, czyli pochodna odwzorowania $A \ni x \mapsto f(t,x)$ istnieje i jest ciągła. Wtedy

$$F'(x) = \int_a^b D_x f(t,x)\, dt$$

(reguła Leibniza)

Dowód: Jak poprzednio $\forall \varepsilon$, $x_0 \in A$ $\exists$ otoczenie $U_0 \ni x_0$ $\forall x \in U_0$, $t \in I$

$$| D_x f(t,x) - D_x f(t,x_0) | < \varepsilon.$$

Z tw. o wartości średniej (o przyrostach skończonych) $\exists$ otoczenie $U_1 \ni x_0$ $\forall t \in I$, $\forall x = x_0 + h \in U_1$

$$\| f(t, x_0+h) - f(t,x_0) - D_x f(t,x_0)h \| \leq \varepsilon |h|.$$

Zatem

$$\Big| F(x_0+h) - F(x_0) - \underbrace{\int_a^b D_x f(t,x_0) h\, dt}_{= \left(\int_a^b D_x f(t,x_0)\, dt\right) h} \Big| \leq \varepsilon |h| (b-a)$$

(wystarczy np. napisać sumy Riemanna).

OK.

Uwagi o rachunku różniczk. w przestrzeniach nieskończ. wymiaru.

⑥

1) przestrzenie Banacha:

— wszędzie trzeba zakładać, że pochodna jest operatorem liniowym ciągłym ($\Rightarrow$ ograniczonym: $|Ax| \leq \|A\| |x|$

$\inf\{C : \underset{\forall x}{|Ax| \leq C|x|}\}$)

— do tw. o ~~...~~ przyroście skończonym trzeba skorzystać z tw. Hahna-Banacha

(trzeba wiedzieć, że $\forall z \neq 0 \ \exists u \in X^*$ funkcjonał liniowy ciągły

$\|u\| \leq 1$, $u(z) = |z|$).

— „ciągłość pochodnych cząstkowych $\Longrightarrow$ różniczkowalność"

Ogólnie: jeśli f jest słabo różniczkowalne i f' jest ciągła, to f jest różniczkowalne.

2) przestrzenie Frécheta (z przeliczalną liczbą półnorm, dla uproszczenia):

$\| \ \|_i$: półnormy

zbiory (kule) $\{x : \|x\|_i < r\}$ przyjmujemy za pod-bazę otoczeń 0.

Jeśli $X \xrightarrow{A} Y$ liniowy (X, Y - jak wyżej), to A jest ciągły $\iff$

$$\forall i \quad \exists C_i , j \quad \forall x$$

$$\|Ax\|_i \le C_i \|x\|_j$$

Najprzyjemniej jest uporządkować półnormy:

$$\|\ \|_1 \le \|\ \|_2 \le \dots \ ;$$

wtedy A jest ciągły $\iff$ $\forall i \ \exists C_i ,\ j = j(i) \ \forall x$

$$\|Ax\|_i \le C_i \|x\|_{i+j}$$ "shift"

Pochodną łatwo określić. Niech np.

$$X = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$$

$$\|\varphi\|_i = \sup_{\substack{|t| \le i \\ 0 \le k \le i}} |\varphi^{(k)}(t)| ,$$

$$f : X \longrightarrow X , \quad f(\varphi) = \varphi'^2 .$$

Wtedy pochodna kierunkowa

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi + th) - f(\varphi)}{t} = 2\varphi' h'$$

więc

$$f'_\varphi(h) = 2\varphi' h'$$

Można określić co to są przekształcenia C^1.

Ale nie uzyska się TFU.

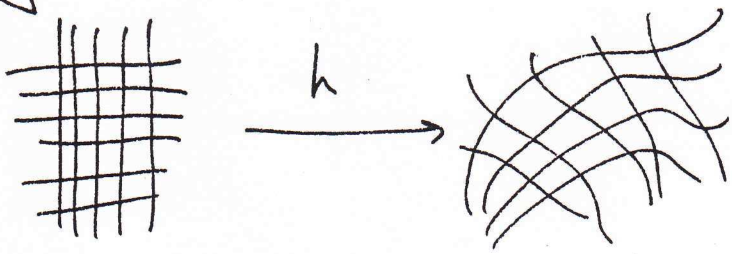
Analiza II*, 8 XI '11

Dyfeomorfizmy: $\mathbb{R}^n \underset{otw}{\supset} U \xrightarrow{h} \underset{otw}{V} \subset \mathbb{R}^n$

homeom., $h \in C^1$, $h^{-1} \in C^1$ $\overset{TFO}{\iff}$

homeom, $h \in C^1$, $J_h \neq 0$

⚠ homeom. można traktować jak "współrzędne krzywoliniowe":



czyli współrzędne $h^{-1}(x)$ traktujemy jak „współrzędne krzywoliniowe" x.

Najciekawsze własności przekształceń to takie, które są niezmiennicze względem dyfeomorfizmów.

Tw ("o rzędzie"): Załóżmy, że

$$\underset{x_1,\dots,x_n}{x_0 \in \overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cup}{U}}} \xrightarrow{f} \underset{y_1,\dots,y_m}{\mathbb{R}^m} \ni y_0 = f(x_0),\ f \in C^1,$$

w otoczeniu x_0 f' ma stały rząd r. Wtedy, w otoczeniach x_0 i y_0 istnieją takie dyfeomorfizmy h_1, h_2, że

$$h_2 \circ f \circ h_1$$

jest postaci $(u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_x \supset U \arrow[r, "f"] & V \subset \mathbb{R}^m_y \arrow[d, "h_2"] \\
\mathbb{R}^n_u \supset U_1 \arrow[u, "h_1"] \arrow[r, "h_2 \circ f \circ h_1"'] & V_1 \subset \mathbb{R}^m_v
\end{tikzcd}
$$

⚠ Najważniejszy jest przypadek maksymalnej wartości r, czyli $r = \min(n,m)$. Wtedy wystarczy założyć że $\operatorname{rk} f'(x_0) = r$, i postać $h_2 \circ f \circ h_1$ jest

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{gdy } n \leq m$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{gdy } n \geq m.$$

D. Po zmianie numeracji zmiennych można założyć, że $\dfrac{\partial(f_1, \dots f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}(x_0) \neq 0$. Niech $x' = (x_1, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots x_n)$, $y' = (y_1, \dots y_r)$, $\tilde{y} = (y_{r+1}, \dots y_m)$, $g(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$. Z TFU układ równań

$$g(x', x'') = y'$$

jest rozwiązalny względem x':

$$x' = \varphi(y', x'')$$

Niech $(u', u'') \xrightarrow{H} (\varphi(u', u''), u'')$ – dyfeom.
Wtedy

$$g \circ H(u', u'') = g(\varphi(u', u''), u'') = u'.$$

Niech $\bar{f} = f \circ H$; zatem

$$\bar{f}' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & \end{array} \\ r & \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline ? & \end{array}\right] \end{array}$$

tu są $\dfrac{\partial \bar{f}_\mu}{\partial u_\nu}$

Ponieważ $\forall u$

$$\operatorname{rk} \bar{f}' = r \quad , \text{ więc}$$

$$\frac{\partial \bar{f}_\mu}{\partial u_\nu} \equiv 0$$

czyli $\bar{f}_\mu$ nie zależą od u''. Zatem

$$\bar{f}_\mu(u) = \psi_\mu(u') = \psi_\mu(\bar{f}_1(u), \dots \bar{f}_r(u)) .$$

⚠ wracając teraz (via H^{-1}) do zmiennych x uzyskujemy, że f_μ $(\mu > r)$ są funkcjami od $f_1, \dots, f_r$:

$$f_\mu(x) = \psi_\mu(f_1(x), \dots, f_r(x)) .$$

Niech $h_1 = H$.

Teraz dyfeomorfizm w przestrzeni $\mathbb{R}^m_y$:

$$(y', \tilde{y}) \xmapsto{h_2} (y', \tilde{y} - \psi_\mu(y'))$$

Wtedy

$$h_2 \circ \bar{f}(u) = (u', 0) .$$

Druga pochodna

$$\mathbb{R}^n \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

Załóżmy, że f jest różniczkowalne $\forall x \in U$; wtedy pochodna f określa przekształcenie

$$U \xrightarrow{f'} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

f jest dwukrotnie różniczk. w x_0 jeśli f' jest różniczk. w x_0 i $f''(x_0) = (f')'(x_0)$; zatem

$$f''(x_0) : \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{liniowe}]{} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

czyli

$$f''(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) =$$

$$= L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

przestrzeń przekszt. dwuliniowych $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$.

Analogicznie słaba różniczkowalność.

Podobnie jeśli $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ zastąpić przestrzeniami Banacha, bo jeśli X, Y są takie, to $L(X, Y)$ ma naturalną normę. Zatem pojęcie ~~operatory~~ liniowe ciągłe. drugiej pochodnej przenosi się na przestrzenie Banacha.

Weźmy dowolny $h \in \mathbb{R}^n$ i niech

$$\varphi_h(x) = \partial_h f(x) = f'|_x(h).$$

Jeśli f jest dwukrotnie różniczk. w x_0, to $\varphi_h(x)$ jest różniczk. w x_0 i

$$\varphi_h'(x_0) = f''\big|_{x_0}(\cdot, h)$$

(tzn. $\forall k \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_h'\big|_{x_0}(k) = f''\big|_{x_0}(k,h) \quad).$$

Bo

$$\| f'\big|_{x_0+u} - f'\big|_{x_0} - f''\big|_{x_0}(u) \| \leq \varepsilon |u|$$

dla $|u|<\delta$

czyli

$$\Big| \underbrace{f'\big|_{x_0+u}(h)}_{\varphi_h(x_0+u)} - \underbrace{f'\big|_{x_0}(h)}_{\varphi_h(x_0)} - \underbrace{f''\big|_{x_0}(u,h)}_{\text{operator liniowy wzgl. } u} \Big| \leq \varepsilon |u| |h| \quad \text{dla } |u|<\delta$$

Nawzajem:
jeśli $\forall h \quad \varphi_h(x) = \partial_h f(x)$ jest różniczk. w x_0 (i f jest różniczk. w U), to f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0 i

$$f''\big|_{x_0}(u,h) = \varphi_h'\big|_{x_0}(u).$$

Dowód: Niech $A_h = \varphi_h'|_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Wtedy A zależy liniowo od h. Bo niech $h = h_1 + h_2$.

Ponieważ

$$\varphi_h = \varphi_{h_1} + \varphi_{h_2}$$

więc

$$\underbrace{\varphi_h'|_{x_0}}_{= A_h} = \underbrace{\varphi_{h_1}'|_{x_0}}_{= A_{h_1}} + \underbrace{\varphi_{h_2}'|_{x_0}}_{= A_{h_2}}$$

Analogicznie z mnożeniem przez stałą. Mamy więc odwzorowanie dwuliniowe

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (h, u) \longmapsto A_h(u) \in \mathbb{R}^m .$$

Weźmy bazę e_i w $\mathbb{R}^n$ (np. ortonormalną, jeśli norma w $\mathbb{R}^n$ pochodzi od iloczynu skalarnego).

Wtedy, $\forall i$

$$| \varphi_{e_i}(x_0 + u) - \varphi_{e_i}(x_0) - A_{e_i}(u) | \leq \varepsilon |u| \quad \text{dla } |u| < \delta$$

Z liniowości lewej strony poniżej, dla pewnej stałej C (zależnej tylko od bazy), $\forall h$

$$| \varphi_h(x_0 + u) - \varphi_h(x_0) - A_h(u) | \leq C\varepsilon |u| \, |h|$$

Stąd, dla $A(u) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A(u)(h) = A_h(u)$,

$$\left| \big(f'(x_0 + u) - f'(x_0) - A(u) \big)(h) \right| =$$

$$= | \varphi_h(x_0 + u) - \varphi_h(x_0) - A_h(u) | \leq C \varepsilon |u| |h| \quad \text{dla } |u| < \delta ,$$

a więc $\|f'(x_0+u) - f'(x_0) - A(u)\| \le C\varepsilon |u|$

dla $|u|<\delta$.

(4)

⚠ W dowodzie wykorzystany był tylko fakt różniczkowalności wszystkich φ_{e_i} w x_0. A więc:

> f jest różniczk. dwukrotnie w x_0 $\iff$ jest różniczk. w otoczeniu x_0 i wszystkie pochodne cząstkowe (w ~~jakiejś bazie~~) są różniczkowalne w x_0.

Oznaczenia:

$$f'' = d^2 f = D^2 f$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\partial_i f = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \partial_i \partial_j f = D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Przekształcenia klasy C^2: takie przekształcenia różniczkowalne, że (w pewnej bazie) wszystkie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ są ciągłe $\iff$ $\forall h$ $\varphi_h(x)$ jest C^1

$\iff$ f jest dwukrotnie różniczk. i $U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest ciągłe.

(równoważność wynika z powyższych faktów i twierdzenia, że ciągłość pochodnych cząstkowych implikuje różniczkowalność funkcji).

Przykłady

1) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$; wyliczyć $f''(x_0)$ w terminach pochodnych cząstkowych (w dowolnej bazie).

Rozwiązanie : $$\varphi_h(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, h_i$$

$$\Rightarrow \varphi_h'\Big|_x (k) = \sum \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}\Big|_{x_0} k_j = $$
$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_{x_0} h_i k_j .$$

2) $f(x) = Ax$ liniowe ; obliczyć f''.

Rozwiązanie :

$$\varphi_h(x) = Ah \quad \text{- niezależne od } x$$

więc $\varphi_h'(x) = 0$

$$\Rightarrow f'' \equiv 0.$$

W terminach współrzędnych :

$$f_r(x) = \sum a_{ri} x_i$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} = a_{ri} , \quad \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_j \partial x_i} = 0 .$$

Jeśli, w bazie E_r w $\mathbb{R}^m$, f ma współrzędne f_r :

$$f(x) = \sum f_r E_r$$

to $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} E_r , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \partial x_j} E_r$$ i

$$f''_{x_0}(h,k) = \sum_{i,j,r} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i k_j E_r .$$

3) $f(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$ = forma kwadratowa o wartościach skalarnych

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \sum a_{pj} x_j + \sum a_{ip} x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_p} = a_{pq} + a_{qp}$$

$$f''\big|_{x_0} (k,h) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_p} k_q h_p$$

dowolne

$$= \sum (a_{pq} + a_{qp}) k_q h_p$$

Bez współrzędnych:

$f(x) = \langle Ax, x \rangle$, $\mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{liniowe}]{A} \mathbb{R}^n$

$\varphi_h(x)$ = cz. liniowa przyrostu

$$f(x+h) - f(x) = \langle A(x+h), x+h \rangle - \langle Ax, x \rangle$$

więc

$$\varphi_h(x) = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle =$$

$$= \langle Ax, h \rangle + \langle A^* x, h \rangle =$$

$$= \langle (A + A^*) x, h \rangle,$$

$$\varphi_h'\big|_x (k) = \langle (A + A^*) k, h \rangle =$$

$$= f''\big|_x (k,h).$$

<u>Tw o symetrii f''</u>: Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalne w x_0, to $f''|_{x_0}(k,h) = f''|_{x_0}(h,k)$.

D. Wystarczy wykazać, że (w dowolnej bazie)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0),$$

a to wystarczy wykazać dla każdej składowej f_r przekszt. f (w dowolnej bazie E_j przestrzeni $\mathbb{R}^m$). Weźmy i, j, i niech $\mathbb{R}^2 = \text{span}(e_i, e_j)$. Wystarczy więc wykazać, że jeśli $\varphi = f_r|_{\mathbb{R}^2}$, to

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Zatem od początku można założyć, że $n = 2$, $i=1$, $j=2$, i f przyjmuje wartości skalarne; oczywiście za x_0 można przyjąć 0.

⚠ Do tego przypadku, przy pomocy podobnego rozumowania, można zredukować przypadek funkcji określonych na przestrzeniach Banacha, o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Współrzędne w $\mathbb{R}^2$ oznaczmy przez x, y.

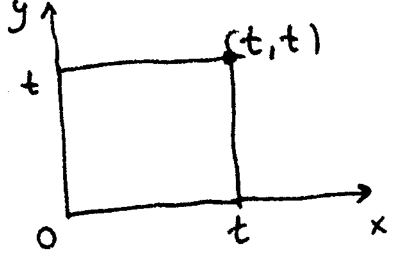
Można jeszcze założyć, że $f(0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ (funkcję f można zastąpić przez

$$f(x,y) - f(0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0),$$

co nie zmienia ani różniczkowalności, ani drugiej pochodnej).

Niech $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ $\quad (i,j=1,2)$.

Niech



$$g(t) = f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + \underbrace{f(0,0)}_{=0}.$$

Wykażemy, że

$$\frac{g(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} a_{2,1}.$$

Stąd, z symetrii zagadnienia względem zamiany osi współrzędnych wynika, że również

$$\frac{g(t)}{t^2} \longrightarrow a_{1,2}$$

czyli $a_{1,2} = a_{2,1}$.

Zastąpmy teraz funkcję f przez

$$\tilde f = f(x,y) - \frac{1}{2} a_{1,1} x^2 - a_{2,1} xy;$$

ta funkcja ma pochodne $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial x^2}\Big|_0 = 0$, $\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial x_2 \partial x_1}\Big|_0 = 0$.

Funkcje g (dla f) i $\tilde g$ (dla $\tilde f$) są związane oczywistą zależnością:

$$\tilde g = g -$$ (taka ~~f~~ funkcja dla wielomianu kwadratowego, oczywista do policzenia)

więc wystarczy wykazać, że

$$\frac{\tilde g(t)}{t^2} \longrightarrow 0,$$

czyli od razu można założyć, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\Big|_0 = 0$

Z różniczkowalności $\frac{\partial f}{\partial x}$ w 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)}^{=0} + y\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)}^{=0}$$

+ reszta

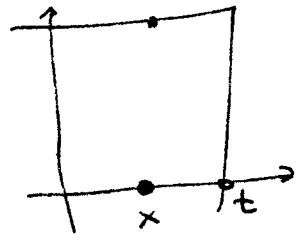
czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\psi(x,y), \qquad \psi \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

(tzn. $\psi(0)=0$ i ψ jest ciągła w 0).

Niech, dla ustalonego t

$$h(x) = f(x,t) - f(x,0) \qquad , 0 \le x \le t$$



Wtedy

$$g(t) = h(t) - h(0).$$

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) =$$

$$= \sqrt{x^2+t^2}\,\psi(x,t) - x\,\psi(x,0)$$

$$\Rightarrow \quad |h'(x)| \le \sqrt{2t^2}\,\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon t(1+\sqrt{2})$$

(o ile t jest na tyle małe, że w całym kwadracie $|\psi|<\varepsilon$). Zatem $|h(t)-h(0)| \le \varepsilon t^2(1+\sqrt{2})$

i

$$\frac{|g(t)|}{t^2} \le \varepsilon(1+\sqrt{2}).$$

Przykład łatwo sprawdzić, że jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

to wszystkie ~~$\frac{\partial^2 f}{\partial x}$~~ cztery pochodne cząstkowe 2 rzędu istnieją w $\mathbb{R}^2$, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$; f jest ponadto różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

Uzupełnienie poprzedniego wykładu.

Jeśli $M^d \subset \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością, to parametryzacja $\mathbb{R}^d \supset U \xrightarrow{F \in C^1} M^d$ obszar $F(U)$ nazywa się też mapą na $F(U)$.

Jeśli $F_1 : U_1 \to M$, $F_2 : U_2 \to M$ są mapami, to $F_2^{-1} \circ F_1 \in C^1$ i jest dyfeomorfizmem (tam, gdzie określone) (skorzystać z TFO).

Przekształcenie

$$M^{d_1} \xrightarrow{f} N^{d_2}$$

jest C^1 jeśli dla dowolnych map $U_1 \xrightarrow{F} M$, $U_2 \xrightarrow{G} N$ $G^{-1} \circ f \circ F \in C^1$.

Pole wektorowe na M: funkcja $M \ni x \longmapsto v(x) \in T_x M$.

Jeśli F jest parametryzacją kawałka M, to określa ona pola $V_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(F^{-1}(x))$. ~~Pole wektorowe $v \in C^1$ jeśli dla dowolnej parametryzacji $v(x) = \sum \varphi_\alpha(F^{-1}(x)) V_\alpha(x)$, gdzie $\varphi_\alpha \in C^1$. Podobnie można określić 1-formy różniczkowe na M, klasy C^1.~~ Różniczka f w x jest przekszt. liniowym $T_x M \to T_{f(x)} N$

$f : M \to N$

Druga pochodna złożenia : $\varphi = f \circ g$

(f, g - różniczk. dwukrotnie w $y_0 = g(x_0)$, x_0 - odpowiednio)

$\underline{\text{I}}$. Na współrzędnych:

$$\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k_z$$
$$x_0 \longrightarrow y_0$$

$$\varphi_\ell(x) = f_\ell(g(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i}(x) = \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p}(g(x)) \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_\ell}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial y_q \partial y_p}(y_0) \frac{\partial g_q}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(x_0)$$

$$+ \sum_p \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p}(y_0) \frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Niech $v, w \in T_{x_0}\mathbb{R}^n_x$, $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$

Wtedy

$$\varphi''_\ell(w,v) = \sum \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial y_q \partial y_p} \overbrace{\frac{\partial g_q}{\partial x_j} w_j}^{\text{współrzędne } g'(w)} \overbrace{\frac{\partial g_p}{\partial x_i} v_i}^{\text{wsp. } g'(v)} +$$

współrzędne $\varphi''|_{x_0}(w,v)$

$$+ \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p} \overbrace{\frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j \partial x_i} w_j v_i}^{\text{wsp. } g''(w,v)}$$

więc

$$\varphi''_l(w,v) = f''_l\big(g'(w), g'(v)\big) + f'_l\big(g''(w,v)\big);$$

ostatecznie

$$\varphi''(w,v) = f''\big(g'(w), g'(v)\big) + f'\big(g''(w,v)\big)$$

albo

$$\underset{w\ x_0}{\varphi''} = \underset{w\ y_0}{f''}\big(\underset{w\ x_0}{g', g'}\big) + \underset{w\ y_0}{f'}\ \underset{w\ x_0}{g''}.$$

II. niezmienniczo:

$$\varphi' = f'\circ g \cdot g'$$

składanie przekształceń liniowych

$$\varphi''\big|_{x_0} = f''\big|_{y_0}\big(g'\big|_{x_0} \cdot g'\big|_{x_0}\big) + f'\big|_{y_0}\, g''\big|_{x_0}.$$

Jeszcze bardziej skomplikowany jest wzór na drugą pochodną złożenia

$$h = \psi f \varphi$$

to są często dyfeomorfizmy.

$$\mathbb{R}^n_u \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n_x \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m_v$$

dla uproszczenia te same wymiary

tu też

$\varphi: \quad x = x(u) \qquad$ (dokł.: $x_i = x_i(u)$, itd.)

$\psi: \quad v = v(y)$

$f: \quad y = y(x)$

Wtedy pisze się, w skrócie:

$$\frac{\partial h}{\partial u_i} = \frac{\partial v}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial u_i}$$

(wszystko w odpowiednich punktach)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_i} = \sum \frac{\partial^2 v}{\partial y_q \partial y_p} \frac{\partial f_q}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial u_j} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial u_i}$$

$$+ \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s \partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial u_j} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} +$$

$$+ \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_j \partial u_i} .$$

Wniosek: Druga pochodna złożenia jest funkcją pierwszych i drugich pochodnych składanych funkcji, wielomianową, ale nieliniową.

Hesjan funkcji. Szczególny przypadek poprzedniego rachunku:

niech $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Jak f'' zmienia się przy dyfeomorfiźmie:

niech ~~φ~~ $g = f \circ \varphi$

φ dyfeom. dwukrotnie różniczk. w x_0, $x_0 \xrightarrow{\varphi} x_0$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_0} = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}\Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\Big|_{x_0} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\Big|_{x_0}$$

$$+ \sum \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{x_0} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_0}.$$

Jeśli więc $\underline{f'(x_0) = 0}$, to (wszystko w x_0)

$$g'' = f''(\varphi', \varphi')$$

— w poprzedniej terminologii

(czyli
$$g''(w, v) = f''(\varphi'(w), \varphi'(v))).$$

<u>Def</u> Hessian f w punkcie krytycznym x_0 (punkt krytyczny : taki, w którym $f'(x_0) = 0$) jest to forma kwadratowa

$$v \longmapsto f''|_{x_0}(v, v)$$

(właściwie to samo co $f''|_{x_0}$, bo $f''|_{x_0}$, jako forma dwuliniowa symetryczna, jest jednoznacznie wyznaczona przez hessian).

Jeśli $V \xrightarrow{Q} \mathbb{R}$ jest formą kwadratową na przestrz. wektorowej V, to każdy $A \in GL(V) = Aut(V)$ ~~działa na~~

określa Q_A = forma kwadratowa:

$$Q_A(v) = Q(Av)$$

Jeśli teraz Q^f = hessian f (w punkcie krytycznym x_0), to dla dowolnego dyfeom. φ, $\varphi(x_0)=x_0$

$$Q^{f\circ\varphi} = Q^f_{\varphi'|_{x_0}} .$$

$f\circ\varphi$ = obraz f przy działaniu dyfeomorfizmu φ;

Zatem hessian obrazu f przy działaniu dyfeom φ = obraz hessianu przy działaniu przekształcenia liniowego $\varphi'|_{x_0}$. Stąd uzyskuje się niezmienniki rel. równoważności funkcji:

$$f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 \iff \exists \varphi \quad f_2 = f_1\varphi$$

dyfeomorfizm zachowujący x_0.

Ograniczmy się do funkcji, dla których x_0 jest krytyczny. $\operatorname{rk} Q^f$ = niezmiennik, a jeśli $\operatorname{rk} Q^f = n$, to sygnatura Q^f = niezmiennik.

Uogólnienie na wyższe wymiary

$$x_0 \in \mathbb{R}^n_x \quad , \quad y_0 \in \mathbb{R}^m_y$$

Rozpatrujemy przekształcenie

$$x_0 \in U_f = U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y , \qquad f(x_0) = y_0 .$$

$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists$ dyfeomorfizmy klasy C^2

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x_0 \longrightarrow x_0$$
$$\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$y_0 \longrightarrow y_0$$

(określone w otoczeniach x_0, y_0 odpow.)

że $f_2 = \psi f_1 \varphi$.

$\mathrm{rk}\, f'(x_0)$ jest niezmiennikiem tej relacji (jedynym zależnym od pochodnych 1 rzędu).

To wynika stąd, że

$$(\psi f_1 \varphi)'\big|_{x_0} = \psi'\big|_{y_0} \, f_1'\big|_{x_0} \, \varphi'\big|_{x_0}.$$

$f_1'\big|_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y)$, $\varphi'\big|_{x_0} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n_x)$, $\psi'\big|_{y_0} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m_y)$. Automorfizmy $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n_x)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m_y)$ działają na $L(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y)$ przez składanie, więc wszystkie 1 pochodne przekształceń równoważnych f_1 powstają z $f_1'\big|_{x_0}$ przez składanie z automorfizmami.

Druga pochodna nie ma takich własności. Ale można ją zmodyfikować.

Niech $K = K_f = \ker f'\big|_{x_0}$, $C = C_f = \mathrm{coker}\, f'\big|_{x_0} = \mathbb{R}^m_y / \mathrm{im}\, f'\big|_{x_0}$.

Wtedy jest kanoniczny rzut $\mathbb{R}^m_y \longrightarrow C$

i określone jest

$$K \hookrightarrow \mathbb{R}^n_x \xrightarrow{f''|_{x_0}} \mathbb{R}^m_y \longrightarrow C .$$

~~forma~~ przekszt. kwadratowa

<u>Def.</u> Niezmiennicza druga pochodna jest to przekszt. kwadratowe $K \xrightarrow{Q_f} C$ określone wyżej.

To jest uogólnienie hessianu.

<u>TW</u> Jeśli $f_2 \sim f_1$ via φ, ψ jak wyżej, to

$$Q_{f_2}(v) = \psi' \, Q_{f_1}(\varphi'(v)) .$$

w punktach x_0, y_0 odpowiednio

⚠ $\varphi' : K_{f_2} \longrightarrow K_{f_1}$,

$\operatorname{im} f_2' = \psi' \operatorname{im} f_1'$ (wszystko w odpowiednich punktach)

więc ψ' określa izomorfizm

$$C_{f_1} \longrightarrow C_{f_2} ;$$

ten izomorfizm występuje w sformułowaniu tw.

⚠ Weźmy takie bazy e_α, e_μ w $\mathbb{R}^n_x$

i E_β, E_μ w $\mathbb{R}^m_x$, że

e_α rozpinają K_f

E_μ " $\operatorname{im} f'$

(liczba e_μ jest taka jak liczba E_μ).

Wtedy, po zastosowaniu liniowego autom. w $\mathbb{R}^m_y$ można założyć, że

$$f' : e_\mu \longrightarrow E_\mu ;$$

czyli (zakładając, że $x_0 = 0$, $y_0 = 0$) część liniowa f wygląda tak:

$$((x_\alpha), (x_\mu)) \longmapsto (0, (x_\mu)).$$

Napiszmy f:

$$y_\beta = f_\beta((x_\alpha), (x_\mu))$$
$$y_\mu = f_\mu((x_\alpha), (x_\mu)).$$

Wtedy

$$Q_f = Q_f((x_\alpha))$$

jest produkt. kwadratowy od zmiennych x_α

i jego β-współrzędna jest zadana przez macierz

$$\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} \Big|_0 \right).$$

<u>Dowód tw.</u> Jeśli $f_2 = \psi f_1 \varphi$, to

$$f_2'' = \psi''(\underbrace{f_1'\varphi', f_1'\varphi'}_{=0 \text{ na } K_{f_2}}) + \psi' f_1''(\varphi', \varphi') +$$

$+ \underbrace{\psi' f_1' \varphi''}_{\in \operatorname{im} f_2'}$, więc po przejściu do

$$K_{f_2} \xrightarrow{Q_{f_2}} C_2$$

uzyskamy „wzór transformacyjny"

$$Q_{f_2} = \psi' f_1''(\varphi', \varphi') = \psi' Q_{f_1} \circ \varphi'$$

działanie automorfizmu jak opisane przy przekształceniu kwadratowym.

Przykład Niech $\dim V = 2$, $\dim W = 2$

Wtedy przestrzeń form kwadratowych na V (o wartościach skalarnych) jest 3-wymiarowa; nazwijmy ją $\mathcal{K}(V)$.

Rozpatrzmy przekszt. kwadratowe $V \xrightarrow{q} W$.

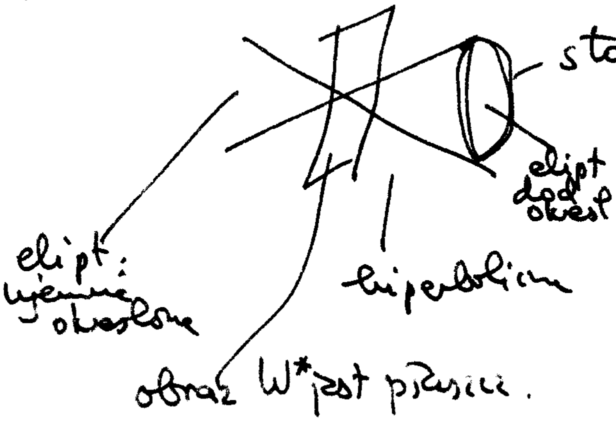
Jeśli $\omega \in W^*$, to $\omega \circ q$ jest formą kwadratową.

Zatem mamy przekształcenie liniowe

$$\begin{aligned} W^* &\longrightarrow \mathcal{K}(V). \\ \omega &\longmapsto \omega \circ q \end{aligned}$$

Są następujące możliwości na obraz W^*:

1)



jeśli forma jest $= \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$ to parabol: $\beta^2 = \alpha\gamma$

zawierającą O i tylko formy hiperboliczne

2) obraz W^* przecina stożek form parabolicznych wzdłuż dwóch prostych

3) obraz W^* jest płaszczyzną styczną do stożka

4) obraz W^* jest prostą w części hiperbolicznej.

5) " " elipt.

6) " " " tworzącą stożka

7) ~~"~~ " " jest punktem.

Teraz za V bierzemy K_f, za W – ~~...~~ C_f, $q = Q_f$. Wtedy ułożenie obrazu C_f^* w $\mathfrak{X}(K_f)$ jest niezmiennikiem dyfeomorfizmów.

<u>Przykład</u>: $f_\pm : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4 \\ x_3 x_4 \end{pmatrix}$

~~...~~ rzędy ich ~~...~~ macierzy ~~...~~ Jacobiego w O $\Delta_\xi = 2$;

ale ułożenie ~~...~~ $C^*_{f_+}$ odpowiada 2), ułożenie $C^*_{f_-}$ odpowiada 1) wg powyższej listy. Więc ten niezmiennik rozróżnia te przekształcenia.

TFO & TFU dla funkcji klasy C^2.

Jeśli $f \in C^2$, $J_f(x_0) \neq 0$, to $f^{-1} \in C^2$ (TFO);

jeśli $F \in C^2$, $F = F(x,y)$, $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)(x_0,y_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0) = 0$, to rozwiązanie $\varphi(x)$ równania $F(x,y) = 0$ jest klasy C^2 (w otoczeniu x_0) (TFU).

D. Wystarczy dla TFO, bo TFU można uzyskać jako wniosek TFO. Niech $g = f^{-1} \in C^1$. Wtedy $g' = (f^{-1})' \circ g$; ponieważ $(f^{-1})'$ jest C^1 i $g \in C^1$, więc $g' \in C^1$, czyli $g \in C^2$.

⚠ 1) Niech $\mathbb{R}^n \supset U \ni x \longmapsto \underset{\text{odwracalna}}{A(x)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

(czyli $\forall x$ $A(x)$ można traktować jak macierz).

Obliczyć $(A^{-1})'$.

Rozw.:
$$A(x)\,A^{-1}(x) = I$$
$$\Rightarrow \quad A'\,A^{-1} + A\,(A^{-1})' = 0$$
$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}.$$

Trzeba to rozumieć tak:
$$\partial_v(A^{-1}) = -A^{-1}\,\overbrace{\partial_v A}^{=A'(v)}\,A^{-1}, \quad \text{czyli:}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "{A,\ \partial_v A = A'(v)}"] & \mathbb{R}^m \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd} \quad , \text{ więc:}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "A^{-1}"'] \arrow[rrr, bend right, "-\partial_v(A^{-1})"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\partial_v A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "A^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} .$$

2) Niech f spełnia zał. TFO; obliczyć g'', gdzie $g = f^{-1}$.

Rozw.:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_x \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n_y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$$f = f(x)$$
$$g = g(y)$$

$$g_i(f(x)) = x_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial g_i}{\partial y_p}\Big|_{f(x)} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}\Big|_x = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_q \partial y_p} \frac{\partial f_q}{\partial x_k} \frac{\partial f_p}{\partial x_j} + \underbrace{\sum \frac{\partial g_i}{\partial y_p} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}}_{\substack{\text{działanie } g' \\ \text{na wektorze} \\ f''(e_j,\, e_k)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g''\big|_{y_0} = g'\big|_{y_0} f''\big|_{x_0}\left(g'\big|_{y_0},\ g'\big|_{y_0}\right),$$

czyli:

$$\begin{tikzcd} T_{x_0}\mathbb{R}^n_x \arrow[r, "f' = f'|_{x_0}"] & T_{y_0}\mathbb{R}^n_y \arrow[l, bend left, "g'|_{y_0} = g'"] \end{tikzcd}$$

Niech $v, w \in T_{y_0}\mathbb{R}^n_y$; weźmy takie $\xi, \eta \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$, że

$$v = f'\xi, \quad w = f'\eta \quad (\text{czyli } \xi = g'v, \ \eta = g'w);$$

wtedy

$$g''(v,w) = g' \underbrace{f''(\xi,\eta)}_{\in\, T_{y_0}\mathbb{R}^n_y} = f'^{-1} f''(\xi,\eta).$$

3) Niech $F(x,y) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R})$ spełnia: $F \in C^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$; obliczyć drugą pochodną funkcji $y = \varphi(x)$ określonej przez równanie $F(x, \varphi(x)) = 0$, w punkcie x_0.

Rozw.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - }{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

Ostatecznie

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{x_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x_i}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \qquad (4)$$

(wszystkie pochodne obliczone w (x_0, y_0)).

4) TFO i TFU, z powyższym uzupełnieniem, przenoszą się, z oczywistych względów, na przestrzenie Banacha.

Indukowanie pól wektorowych i 1-form przez przekszt. klasy C^2.

a) Niech $\underset{\text{otw}}{\mathbb{R}^n_x \supset U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n_y$ będzie dyfeom. klasy C^2, $v(x) = \sum v_i(x) e_i$ - polem wektorowym klasy C^1 na U (tzn. $v_i \in C^1$; e_i = baza (dowolna) $\mathbb{R}^n$).

Wtedy

$$(f'(v))(y) \overset{df}{=} f'\big|_{f^{-1}(y)}\left(v\big|_{f^{-1}(y)}\right)$$

jest klasy C^1 na $f(U)$.

Bo $f^{-1} \in C^2$ i

$$f'\big|_x (e_i) = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) E_j$$

(gdzie E_j = baza $\mathbb{R}^n_y$, $f = \sum f_j E_j$), więc

$$f'(v) = \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\circ f^{-1}}_{C^1} \cdot \underbrace{v_i \circ f^{-1}}_{C^1} E_j .$$

b) Niech $\mathbb{R}^n_x \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y$, $f \in C^2$, ω = 1-forma klasy C^1 na $V \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^m_y$. Wtedy $f^*\omega$ jest klasy C^1 (na ~~U~~ $\cap f^{-1} V$).

Bo weźmy bazy $e_i \in \mathbb{R}^n_x$, $E_j \in \mathbb{R}^m_y$ i stowarzyszone z nimi współrzędne x_i, y_j odpowiednio. Wtedy

f : $y_j = f_i(x)$,

$$\omega|_y = \sum_j \omega_j(y)\, dy_j ,$$

$$f^*\omega|_x = \sum \omega_j(f(x))\, df_j =$$

$$= \sum_j \omega_j \circ f\, df_j = \sum_{j,i} \underbrace{\omega_j \circ f}_{\in C^1} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}_{\in C^1} dx_i .$$

<u>Podrozmaitości klasy C^2</u>: lokalnie <u>wykresy</u> przekształceń klasy C^2. Jeśli

$$\begin{array}{ccc} & & M^d \overset{C^2}{\ } \subset \mathbb{R}^n \\ U & \xrightarrow{F} & \uparrow G \\ & & V \end{array}$$

dwie parametryzacje, to $G^{-1}F$ jest dyfeom. klasy C^2.

Stąd <u>wynika</u>, że można mówić o polach wektorowych i 1-formach klasy C^1 na M^d; powyższa uwaga o polach i formach indukowanych pozostaje w mocy.

Wzór Taylora rzędu 2. $x_0 \in U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ ⑥

f – dwukrotnie różniczk. w x_0.
(i jednokrotnie w otoczeniu x_0).

Niech

$$T^2_{x_0} f(h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(h) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(h,h) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j}_{\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) h_i^2 + 2\sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}$$

we współrzędnych

Własności reszty

$$R(h) \overset{df}{=} f(x_0+h) - T^2_{x_0} f(h)$$

1) <u>Peano</u>:

$$\frac{R(h)}{|h|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(tylko przy założeniu dwukrotnej różniczk. w x_0)

<u>Dowód</u>:

$R''(0) = 0$ i R jest różniczk. w otoczeniu 0 ~~[illegible]~~

$$\Rightarrow |R'(h)| \leq \varepsilon |h| \quad \text{dla } |h| < \delta$$

Ze wzoru na szacowanie przyrostu

$$|R(h)| = |R(h) - R(0)| \le \varepsilon |h|^2, \quad |h|<\delta.$$

<u>Wniosek</u>: Jeśli forma kwadratowa $h \mapsto f''|_{x_0}(h,h)$ (dla f o wartościach skalarnych) jest określona dodatnio (ujemnie) i $f'(x_0)=0$, to f ma lok. min (max) w x_0. Jeśli jest nieokreśl., to nie ma ekstremum.

<u>Dowód</u>: $|f''|_{x_0}(h,h)| > c|h|^2$ dla pewnej $c>0$, o ile ta forma jest określona (dodatnio lub ujemnie). $|R(h)| < \varepsilon |h|^2$. Dla form nieokreślonych (tzn. zmieniających znak) – analogicznie.

2) <u>Lagrange</u>: f ma wartości skalarne, dwukrotnie różniczkowalna w U, odcinek $[x_0 x]$ łączący x_0 i x jest zawarty w U. Wtedy $\exists \xi \in [x_0,x]$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''|_{\xi}(x-x_0, x-x_0)$$

⚠ wygodnie jest ostatni składnik zapisać w postaci

$$\frac{1}{2!} f''|_{x_0}(x-x_0, x-x_0) + \frac{1}{2!}\left(f''|_{\xi}(x-x_0, x-x_0) - f''|_{x_0}(x-x_0, x-x_0)\right).$$

Dowód: niech $\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$; wtedy

$$\varphi'(t) = f'\big|_{x_0+t(x-x_0)}(x-x_0)$$ (8)

$$\varphi''(t) = f''\big|_{x_0+t(x-x_0)}(x-x_0, x-x_0)$$

i wystarczy zastosować wzór Taylora do φ''.

Wniosek: Niech, dla funkcji dwuliniowej B,

$$\|B\| = \sup_{|v|, |w| \leq 1} |B(v,w)|;$$

wtedy, przy poprzednich założeniach,

$$|R(x-x_0)| \leq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[x_0 x]} \|f''(\xi) - f''(x_0)\| \, |x-x_0|^2.$$

Dla funkcji o wartościach wektorowych (w przestrz. Banacha X – pozostaje tylko oszacowanie reszty:

$$|R(h)| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi} \|f''(\xi) - f''(x_0)\| \, |x-x_0|^2.$$

Dowód: bierzemy taki funkcjonał liniowy ciągły u na X, że

$$|u| = 1, \quad |u(R(h))| = |R(h)|$$

i korzystamy z przypadku skalarnego dla funkcji skalarnej $u\circ f$; definicja normy $\|f''(\xi) - f''(x_0)\|$ – jak we wniosku wyżej; $|B(v,w)|$ oznacza teraz normę w X.

3) Wzór całkowy na resztę. Załóżmy, że $f \in C^2$; ze wzoru całkowego na φ uzyskamy wzór

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'|_{x_0}(h) + \left(\int_0^1 (1-t) f''|_{x_0+th} \, dt\right)(h,h).$$

$$h = x - x_0$$

[Jak wprowadzić całkę z funkcji ciągłej o wartościach wektorowych, w przestrzeniach Banacha X: jeśli X jest sk. wymiarowa, to bierzemy bazę e_i; wtedy $f(t) = \sum f_i(t) e_i$ i $\int_0^1 f = \sum \int_0^1 f_i \, e_i$.

Jeśli X jest dowolna, to def. funkcję kawałkami liniową ciągłą:

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$$

dla pewnego podziału $\mathcal{P}: 0 = t_0 < \cdots < t_N = 1$ i punktów $x_0, \dots, x_N \in X$:

$$\varphi(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_i + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1}$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Całkę z φ określamy oczywistym jawnym wzorem.

Jeśli teraz $[0,1] \xrightarrow{f} X$ jest ciągła, to $\exists$ $\varphi_\nu : [0,1] \to X$ ciągłych, kawałkami liniowych, zbieżnych jednost. do f; $\int_0^1 f \overset{df}{=} \lim \int_0^1 \varphi_\nu$.

To nie zależy od wyboru ciągu φ_ν. Łatwo dowodzi się wzorów na całkowanie przez części i podstawienie. W dowodzie wzoru całkowego na resztę wykorzystuje się tylko całk. przez części, więc ten dowód przechodzi na dowolne przestrzenie Banacha X].

Pochodne wyższych rzędów

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

jeśli $X \xrightarrow{f} Y$

to $f^{(k)}\big|_{x_0}$ jest przekszt. k-liniowym ciągłym

$$X \times \dots \times X \longrightarrow Y.$$

Jeśli $h_1, \dots, h_{k-1} \in X$, to

$$f^{(k)}(h_1, \dots, h_{k-1}, h_k) = \left(f^{(k-1)}(h_1, \dots, h_{k-1})\right)'(h_k)$$

różniczkowanie funkcji

$$X \ni x \longmapsto f^{(k-1)}\big|_x (h_1, \dots, h_{k-1}) \in Y$$

przy ustalonych $h_1, \dots, h_{k-1}$

Jeśli X jest skończ. wymiarowa, to f jest k razy różniczk. w x_0 $\iff$ $\forall h_1, \dots, h_{k-1}$ funkcja $x \longmapsto f^{(k-1)}\big|_x (h_1, \dots, h_{k-1})$ jest różniczk. w x_0 i zachodzi wtedy powyższy wzór

Jeśli f jest k-krotnie różniczk. w x_0, to $f^{(k)}\big|_{x_0}$ jest symetryczna:

$$f^{(k)}\big|_{x_0}(h_1,\dots,h_k) = f^{(k)}\big|_{x_0}(h_{i_1},\dots,h_{i_k}).$$

<u>Dowód</u>: indukcja <u>względem</u> k.

$$f^{(k-1)}_{x_0}(h_1,\dots,h_{k-1}) = f^{(k-1)}\big|_{x_0}(h_1,\underset{\text{bez } i}{\dots}, h_i)$$

Niech $g = f^{(k-2)}(h_1,\underset{\text{bez } i}{\dots},h_{k-2})$; wtedy

$$g''\big|_{x_0}(h_i,h_k) = g''\big|_{x_0}(h_k,h_i)$$

Stąd

$$f^{(k)}\big|_{x_0}(h_1,\dots,h_k) = f^{(k)}\big|_{x_0}(h_1,\underset{\text{bez } i}{\dots}, h_k,h_i).$$

Wystarczy skorzystać teraz z symetrii $f^{(k-1)}\big|_{x_0}$.

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}.$$

Wygodna notacja:

niech $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$;

wtedy

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$|\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$,

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$. W tej notacji „tasiemiec”

Taylora wygląda tak:

$$T^{m}_{x_0} f\,(h) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f\Big|_{x_0} h^{\alpha}.$$

Funkcje klasy C^m, wzór Taylora rzędu m, podrozmaitości klasy C^m – dokładnie jak dla $m=2$; TFO & TFU – też.

Funkcje klasy C^∞ – klasy C^m, $\forall m$.

Przykład: Niech $\mathbb{R}^{n+1}$ ma współrzędne $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C^\infty$ i $M: y = \varphi(x)$. Jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ zeruje się na M, to $\exists\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$f(x,y) = (y - \varphi(x))\, g(x,y).$$

Bo $f(x,y) = f(x,y) - f(x, \varphi(x)) =$

$$= \int_{\varphi(x)}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\, dt = \qquad t = \varphi(x) + u\,(y - \varphi(x))$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\ \varphi(x) + u\,(y - \varphi(x))\big)\, du}_{g(x,y) \in C^\infty}\ (y - \varphi(x))$$

na mocy twierdzeń o różniczkowaniu całki względem parametru.

Przykład 2 $f \in C^\infty$ na $\mathbb{R}^n$ (lub kuli wokół, np.); wtedy

$$f(x) - f(0) = \sum x_i\, g_i(x) \qquad g_i \in C^\infty.$$

Bo $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \sum x_i \underbrace{\int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt}_{g_i(x) \in C^\infty}$

Piszę $g_i(x) = \underbrace{g_i(0)}_{c_i} + \sum_j x_j\, h_{ij}(x)$, $h_{ij} \in C^\infty$,

uzyskamy $f(x) = f(0) + \sum c_i x_i + \sum h_{ij}(x) x_i x_j$; z konieczności $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. To postępowanie można kontynuować.

Uzupełnienia o funkcjach klasy C^∞. I jeśli $f \in C^\infty$ w otoczeniu 0, to $\exists\, g_i \in C^\infty$

$$f(x) = f(0) + \sum x_i\, g_i(x)$$

powtarzając: $\exists h_{ij} \in C^\infty$ $\quad g_i(x) = \overbrace{g_i(0)}^{c_i} + \sum x_j\, h_{ij}(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(0) + \cancel{\sum \ldots} \sum c_i x_i + $$

$$+ \sum h_{ij}(x)\, x_i x_j .$$

Z konieczności $\quad c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ (po zróżniczkowaniu).

Itd. Ostatecznie, $\forall m$:

$$f(x) = T_0^m f(x) + \sum_{|\alpha| = m+1} h_\alpha(x)\, x^\alpha ,$$

$$h_\alpha \in C^\infty .$$

(gładkość reszty we wzorze Taylora).

II. Jeśli $\quad M: \; \underset{y \in \mathbb{R},\; x \in \mathbb{R}^n}{y = \varphi(x)} \quad \varphi \in C^\infty, \quad f(x,y) = 0$

na M, to $\exists\, g \in C^\infty$

$$f(x,y) = (y - \varphi(x))\, g(x,y) .$$

Stąd wynika:

1° niech $f \in C^\infty$ (w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$),

$$f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) \neq 0 ;$$

z TFU, w otoczeniu 0:

$$f = 0 \iff x_n = \varphi(x') \qquad x' = (x_1, \ldots x_{n-1}),$$

$\varphi \in C^\infty$, i

$$f = (x_n - \varphi(x'))\, g(x), \quad g \in C^\infty,$$

$g(0) \neq 0$, za obustronnego zróżniczkowania względem x_n i podstawienia $x = 0$.

2° niech $h \in C^\infty$, $\{h=0\} \supset \{f=0\}$; wtedy (w otoczeniu 0)

$$h = f h_1 \quad \text{dla pewnej } h_1 \in C^\infty$$

(bo $h = (x_n - \varphi(x'))\, h_2$, $x_n - \varphi(x') = \frac{1}{g} f$).

3° $h \in C^\infty$; wtedy $\exists\, h_3(x), \psi(x')$ $h = (x_n - \varphi(x'))\, h_3(x) + \psi(x')$

Def Kiełek funkcji w $x_0 \in X$ = przestrzeń topol.

rozpatrujemy funkcje określone na otoczeniach x_0:

$$x_0 \in U_f \xrightarrow{\ f\ } Y \uparrow \text{ustalone}.$$

$f \sim g \iff f = g$ na pewnym otoczeniu x_0.

Klasy abstrakcji = kiełki.

$\mathcal{O}_n$ = kiełki w 0 funkcji analitycznych na $\mathbb{R}^n$,

czyli $\mathcal{O}_n$ = szeregi potęgowe zbieżne o środku w 0

(o dodatnim promieniu zbieżności, czyli zbieżne w pewnej kuli zależnej od szeregu)

(dzielenie z resztą: $h_3 \in C^\infty$ iloraz, $\psi(x')$ = reszta)

$\mathcal{E}_n$ = kiełki w 0 funkcji klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n$.

Kiełki f,g funkcji (o wartościach skalarnych) są równoważne

jeśli $\exists h$ odwracalne (tzn $h(x_0)\neq 0$) że $g=fh$

Wielomian wyróżniony (stopnia p) względem x_n: funkcja (kiełek) postaci

$$x_n^p + \sum_{0\le i<p} a_i(x')\, x_n^i, \quad a_i \in \mathcal{O}_{n-1} \text{ lub } \mathcal{E}_{n-1}.$$

Tw. przygotowawcze (Weierstrassa dla $\mathcal{O}_n$, Malgrange'a dla $\mathcal{E}_n$); niech na chwilę $A_n=\mathcal{O}_n$ lub $\mathcal{E}_n$):

Niech $f \in A_n$, $f(0)=0$, $\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0)=0$ ($i<p$), $\frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0)\neq 0$. Wtedy $\exists$ wielomian wyróżniony

$$W(x) = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')\, x_n^i, \quad a_i \in A_{n-1},$$

że

$$f = WQ, \quad Q \in A_n, \quad Q(0)\neq 0$$

(w klasie funkcji analitycznych W jest wyznaczony jednoznacznie), oraz każda $g \in A_n$ daje się podzielić z resztą przez f (albo W, równoważnie):

$$g = hf + \sum_{i<p} b_i(x')\, x_n^i, \quad b_i \in A_{n-1}.$$

Udowodnimy pozornie mocniejszą wersję tego tw. dla funkcji analitycznych.

⚠ TFU i TFO są słuszne dla f. analitycznych.

$\mathbb{R}$-algebry lokalne: Pierścienie A z 1, wyposażone w zanurzenie $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{homomorfizm pierścieni}]{\varepsilon} A$, z jedynym ideałem maksymalnym $m_A = m$ (składającym się ze wszystkich elementów nieodwracalnych.

W dalszym ciągu zawsze zakładamy, że

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[rrr, bend right, "\text{izomorfizm}"'] & A \arrow[r] & A/m & = \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

oraz że m_A jest skończenie generowany nad A.

Główny przykład: $A = \mathcal{O}_n$ lub $\mathcal{E}_n$; m = ideał wszystkich funkcji zerujących się w 0; jest on generowany przez $x_1, \ldots, x_n$. Dalsze przykłady: pierścienie ilorazowe $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ = ideał w A. Obrazem ε są funkcje stałe

Lemat Nakayamy: M = skończ. generowany moduł nad algebrą lokalną A, $M' \subset M$ podmoduł. Jeśli

$$M = M' + m_A M,$$

to $M' = M$.

Dowód: Przechodząc do $N = M/M'$ otrzymamy

$$N = m_A N,$$

wykażemy, że $N = 0$. Bo niech n_i = generatory N; wtedy

$$n_i = \sum a_{ij} n_j \quad \text{dla pewnych } a_{ij} \in m_A$$

więc

$$\sum (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = 0 \quad \forall i$$

Niech $\Delta = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 1 +$ coś z m_A,

więc $\Delta \notin m_A \Rightarrow \Delta$ jest odwracalny; ponieważ

$\Delta x_j = 0 \quad \forall j$ (wzory Cramera), więc $x_j = 0 \quad \forall j$.

<u>Lemat</u>: Niech $\mathfrak{a} \subset A$ będzie ideałem. Wtedy:

$$\mathfrak{a} \supset m_A^k \text{ dla pewnej } k \in \mathbb{N} \iff$$

$$\dim_{\mathbb{R}} A/\mathfrak{a} < \infty.$$

D. $\Longrightarrow$

$\forall l \quad m_A^l / m_A^{l+1}$ jest sk. wymiarowa

nad $A/m_A = \mathbb{R}$

Rozpatrzmy

$$A \supset m_A \supset m_A^2 \supset \cdots \supset m_A^k ;$$

wtedy

$$A/m_A, \quad m_A/m_A^2, \ \ldots$$

są sk. wymiarowe nad $\mathbb{R}$, więc

A/m_A^k jest sk. wymiarowa, więc również

$A/\mathfrak{a}$, jako obraz $A/m_A^k \longrightarrow A/\mathfrak{a}$.

$\Longleftarrow$ $C = A/\mathfrak{a}$ jest algebrą lokalną;

$$C \supset \mathfrak{m}_C \supset \mathfrak{m}_C^2 \supset \cdots$$

jest to ciąg zstępujący przestrz. wektorowych $/\mathbb{R}$ skończ. wymiarowych (bo C jest sk. wymiarowe nad $\mathbb{R}$), więc $\exists\, l$

$$\mathfrak{m}_C^l = \mathfrak{m}_C^{l+1}$$

i z lematu Nakayamy $\mathfrak{m}_C^l = 0$ czyli $\mathfrak{m}^l \subset \mathfrak{a}$.

Niech teraz $(\mathbb{R}^n_x, 0) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^m_y, 0)$, czyli

$$\varphi: \quad y_i = \varphi_i(x), \qquad \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi_i \in \mathfrak{m}_x \ \forall i$$

$$\varphi_i \in \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_x .$$

Wtedy określamy homomorfizm algebr

$$\mathcal{O}_y \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_x$$

$$f \longmapsto f \circ \varphi .$$

$\mathcal{O}_x$ można rozpatrywać jak moduł nad $\mathcal{O}_y$

$$\psi(y) \odot g(x) \overset{df}{=} \varphi^*(\psi)\, g$$

na chwilę $\qquad = \psi(\varphi(x))\, g(x)$

(tak jest dla homomorfizmów pierścieni: jeśli $R_1 \xrightarrow{u} R_2$, to R_2 jest modułem nad R_1 z mnożeniem: $r_1 \odot r_2 = u(r_1) r_2$).

<u>Def</u> φ^* jest skończony ($\overset{df}{\Leftrightarrow}$ φ jest sk.) jeśli $\mathcal{O}_x$ jest skończ. generowany nad $\mathcal{O}_y$;

tzn. istnieją takie $e_1(x), \dots, e_l(x) \in \mathcal{O}_x$,
że każda funkcja (kiełek) $g(x) \in \mathcal{O}_x$ daje
się przedstawić w postaci

$$\sum \psi_i(\varphi(x))\, e_i(x) \quad , \quad \psi_i \in \mathcal{O}_y .$$

φ^* jest quasi-skończony $\iff$

$\mathcal{O}_x / m_y \mathcal{O}_x$ jest skończ. wym. $/\mathbb{R}$

$m_{\mathcal{O}_y}$ = wszystkie funkcje analit. zmiennych y zerujące się w 0

$\overset{\text{lemat}}{\iff}$ $m_y \mathcal{O}_x \supset m_x^k$ dla pewnego k

czyli każda $g(x) \in \mathcal{O}_x$, której wszystkie pochodne w 0 znikają, daje się przedstawić jako

$$g(x) = \sum g_i(x)\, \varphi_i(x)$$

więc $m_y \mathcal{O}_x$ jest generowany przez wszystkie $\varphi_i(x)$.
Zatem: φ^* jest q.sk.
$\iff \exists_{sk.}\, e_i \in \mathcal{O}_x$
każda f $f \equiv \sum c_i e_i$ mod $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$
c_i stałe

⚠ każda $g \in \mathcal{O}_x$ (lub $h \in \mathcal{O}_y$) dopuszcza kompleksyfikację (czyli określa - poprzez szereg potęgowy - kiełek funkcji na $\mathbb{C}^n$ (lub $\mathbb{C}^m$)).
Wtedy ten warunek jest równoważny:
w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ jedynym wspólnym zerem wszystkich $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ jest 0
(wniosek z tw. Hilberta o zerach)

⚠ Jeśli φ^* jest skończone, to jest quasi-skończ.

Bo weźmy dowolne $g \in \mathcal{O}_x$; wtedy

$$g(x) = \sum \psi_i(\varphi(x))\, e_i(x) =$$

$$= \sum \Big(\psi_i(0) + \sum_j \varphi_j(x)\, h_{ij}(x)\Big)\, e_i(x)$$

z rozwinięcia ψ_i :

$$\psi_i(y) = \psi_i(0) + \sum_j y_j\, \chi_{ij}(y)$$

więc

$$\psi_i(\varphi(x)) = \psi_i(0) + \sum \varphi_j(x)\, \underbrace{\chi_{ij}(\varphi(x))}_{h_{ij}(x)}$$

$$= \sum c_i\, e_i(x) \mod \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$$

dla $c_i = \psi_i(0) \in \mathbb{R}$.

<u>Tw. przygotowawcze</u>: Jeśli φ^* jest quasi-skończ., to jest skończone: jeśli $[e_i] \in \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_y$ są generatorami $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_y$, to e_i generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$

Dowód: $\mathfrak{m}_x^k \subset \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ jak poprzednio (dla pewnego k), czyli $\forall$ wielowskaźnika α, $|\alpha| = k$

$$x^\alpha = \sum_i \lambda_{\alpha i}(x)\, \varphi_i(x) \qquad \lambda_{\alpha i} \in \mathcal{O}_x$$

Wykażemy, że wszystkie x^β, $|\beta| < k$, generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$.

Weźmy dowolną $f(x) \in \mathcal{O}_x$ i wtedy rozwinięcie f na szereg potęgowy można zapisać jako

$$f(x) = \tau(f)(x) + \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \sigma_\alpha(x) =$$

wszystkie wyrazy stopnia $<k$, czyli kombinacja liniowa (ze stałymi współczynnikami) x^β, $|\beta|<k$

$$= \tau(f)(x) + \sum \underbrace{\rho_i(f)} \varphi_i(x)$$

$\rho_i(f) \in \mathcal{O}_x$

(τ, ρ_i = "operatory" na funkcjach, co nie jest istotne)

Teraz stosujemy to rozwinięcie do $\rho_i(f)$:

$$\rho_i(f) = \tau(\rho_i(f)) + \sum \rho_j(\rho_i(f)) \varphi_j(x)$$

komb. liniowa ze stałymi wsp. x^β, $|\beta|<k$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{\tau(f)(x) + \sum \tau(\rho_i(f)) \varphi_i(x)}_{} + \dots$$

komb. lin. x^β $(|\beta|<k)$ ze współczynnikami będącymi funkcjami od $\varphi(x)$, na tym etapie liniowymi.

Itd. Uzyskujemy rozwinięcie formalne:

$$f(x) = \sum_{|\beta|<k} \underbrace{S_\beta}_{\text{szeregi formalne}} (\varphi(x))\, x^\beta$$

Pozostaje dowieść zbieżności.

Dla $a(x) \in \mathcal{O}_x$ i $R>0$ niech

$$a(x) = \sum a_\alpha x^\alpha \quad \text{– rozwinięcie}$$

i

$$|a|_R = \sum |a_\alpha|\, R^{|\alpha|} \qquad (\text{może być } = \infty)$$

Ten symbol spełnia warunki normy i

$|ab|_R \le |a|_R\, |b|_R$ (chociaż może być $=\infty$).

Oczywiście, $\forall R$

$$|\tau(f)|_R \le |f|_R$$

i

$$|\sigma_\alpha(f)|_R \le \frac{1}{R^{|k|}}\, |f|_R$$

(jeśli „sensownie" wybrać $\sigma_\alpha(f)$, tzn. wszystkie jednomiany wszystkich składników $\sigma_\alpha(f)\, x^\alpha$ są jednomianami rozwinięcia w szereg f i nie ma powtórzeń).

Weźmy R_0 na tyle małe, że $\forall \alpha, i$

$$|\lambda_{\alpha i}|_{R_0} < \infty.$$

Wtedy
$$|\rho_i(f)|_R \leq \frac{C}{R^k}|f|_R \quad \text{dla } R<R_0$$
dla stałej C niezależnej od R.

Stąd wynika, że l-te iteracje operatorów τ i ρ_i dają oszacowania
$$\leq \frac{C^l}{R^{kl}}|f|_R$$
a więc szeregi są zbieżne.

<u>Przykład</u> $P(x) = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')x_n^i$, $a_i \in \mathcal{O}_{x'}$.

Rozpatrzmy $(x', x_n) \xrightarrow{\varphi} (x', P(x))$. Wtedy $1, x_n, \dots, x_n^{p-1}$ generują $\mathcal{O}_x / m_y \mathcal{O}_x$

Analiza $\overline{\text{II}}^*$, 6. XII. '11.

Uzupełnienia o tw. przygotowawczym w wersji Weierstrassa

$$P(x) = x_n^p + \sum_{0 \le i < p} a_i(x')\, x_n^i, \quad a_i(0) = 0, \quad a_i \in \mathcal{O}_{x'}$$

1) Rozkład
$$f(x) = Q(x)P(x) + \underbrace{R(x)}_{\sum_{i<p} b_i(x)\, x_n^i}, \quad f \in \mathcal{O}_x,$$

jest jednoznaczny (w klasie f. analitycznych, tj. $Q, R \in \mathcal{O}$)

jeśli $f = \tilde{Q}P + \tilde{R}$, $\tilde{R}$ - jak wyżej, to
$$\tilde{Q} = Q, \quad \tilde{R} = R.$$

Bo jeśli $F = \tilde{Q} - Q$, $S = \tilde{R} - R$ = wielomian stopnia $< p$ względem x_n

to
$$FP + S = 0.$$

Dla x' bliskich 0 P ma p pierwiastków x_n (liczonych z krotnościami). Bo tak jest dla $x' = 0$, i wystarczy skorzystać z następującego faktu:

pierwiastki (zespolone) wielomianu unormowanego
$$t^p + \sum_{i<p} a_i t^i$$
są funkcjami hölderowskimi z wykładnikiem $1/p$ w dziedzinie, gdzie $|a_i|$ są ograniczone: $|a_i| \le C_i$.

[to trzeba rozumieć tak: niech

$$F_a(t) = t^p + \sum_{\substack{\uparrow \\ \text{zmienne}}} a_i t^i .$$

niech $t_1, \dots, t_p$ = wszystkie pierwiastki F_a wypisane razem z krotnościami w dowolnej kolejności. Podobnie niech

$$F_b(t) = t^p + \sum b_i t^i, \quad t'_1, \dots, t'_p \text{ – jego}$$

pierwiastki. Niech $\underbrace{|a|}_{\max |a_i|}, \underbrace{|b|}_{\max |b_i|} \le C$

wtedy $\forall t'_i \ \exists t_j \quad |t'_i - t_j| \le \underbrace{M}_{\text{const}} |a-b|^{1/p}$

D. $F_a(t) = \prod (t - t_i), \quad F_b(t) = \prod (t - t'_i).$

$$|F_a(t'_i)| = \Big|\prod_j (t'_i - t_j)\Big|$$

$$|F_a(t'_i) - F_b(t'_i)| \le \dots \le p\,|a-b| \sum_{j<p} |t'_i|^j$$

oczywiste ograniczenie $|t'_i|$: niech $T = t'_i$, wtedy

$$T^p = -\sum_{j<p} b_j T^j$$

Jeśli $\tau = \max(1, |T|)$, to

$|\text{prawa strona}| \leq pC\tau^{p-1}$, więc

$$|T|^p \leq \tau^p \leq pC\tau^{p-1} \Rightarrow \tau \leq pC$$

$$\Rightarrow |T| \leq \max(1, pC), \text{ więc}$$

$$|t_i'| \leq \max(p C, 1).$$

Ostatecznie

$$|F_a(t_i')| \leq C_1 |a-b|$$

C_1 zależy tylko od p i C.

więc

$$\prod_j |t_i' - t_j| \leq C_1 |a-b|$$

$$\Rightarrow \exists_j \quad |t_i' - t_j| \leq \sqrt[p]{C_1 |a-b|} \Big] .$$

Teraz F, P, S rozszerzamy do dziedziny zespolonej. Podstawiając za x_n pierwiastki P uzyskamy, że S ma p pierwiastków, ~~wbrew temu, że S jest wielomianem~~ więc $S \equiv 0$.

2) Niech $f \in \mathcal{O}_x$, $f(0, x_n) \sim x_n^p$ (czyli:

$$\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0) = 0 \quad (i < p), \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0) \neq 0.$$

Wtedy

$$f = QP$$

dla pewnego P stopnia p względem x_n, i z konieczności $Q(0) \neq 0$.

Dowód: Niech $a = (a_0, \dots, a_{p-1})$ = zmienne i

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ P(a, x_n)}}{P_a(x_n)} = x_n^p + \sum_{i<p} a_i x_n^i \text{. Wtedy}$$

$$f(x) = q(x, a)\, P(a, x_n) + \sum_{i<p} A_i(x', a)\, x_n^i.$$

Oczywiście

$$A_i(0,0) = 0 \quad \forall i, \quad q(0,0) \neq 0$$

Różniczkujemy powyższą tożsamość względem a_j

i podstawiamy $x' = 0$, $a = 0$:

$$0 = \frac{\partial q}{\partial a_j} P + q x_n^j + \sum_{i<p} \frac{\partial A_i}{\partial a_j} x_n^i$$

Stąd

$$q(0) + \frac{\partial A_j}{\partial a_j}(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_j}{\partial a_j}\Big|_0 \neq 0$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial a_j} = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Zatem $\det\left(\frac{\partial A_j}{\partial a_i}\right)(0,0) \neq 0$ i stosujemy TFU

do układu równań

$$A_i(x', a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a(x').$$

Za szukany P bierzemy $x_n^p + \sum a_i(x') x_n^i$.

<u>Twierdzenie o funkcjach symetrycznych:</u>

$$\sigma_i(x): \quad \sigma_1 = x_1 + \cdots$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$

stąd

$$\prod (T + x_i) = T^p + \sum_{i<p} \sigma_{p-i}(x)\, T^i$$

<u>Tw</u> Jeśli $f \in \mathcal{O}_x$ jest symetryczny, to $\exists g \in \mathcal{O}_x$

$$f = g(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

D. $\varphi(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_p(x))$, $x \in \mathbb{R}^p_x$.

czyli $\varphi: y_1 = \sigma_1(x), \dots, y_p = \sigma_p(x)$.

φ^* jest quasi-skończone:

jeśli za T podstawić $-x_j$ w definicji $\sigma_i(x)$,

to

$$0 = \pm x_j^p + \sum_i \pm \sigma_{p-i}(x) x_j^i$$

więc x^α $(|\alpha| < p)$ generują $\mathcal{O}_x / (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$

Zatem generują również $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$: każde $f(x) \in \mathcal{O}_x$ pisze się jako

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < p} \psi_\alpha(\sigma(x)) x^\alpha .$$

Jeśli $f(x)$ jest symetryczne, to uśredniamy po permutacjach $x_1 \dots x_p$ i korzystamy z tw. o wielomianach symetrycznych.

Analiza II*, 9 XII. '11

Uzupełnienie do dowodu tw. przygotowawczego

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_x / (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) < \infty \implies \mathcal{O}_x \text{ jest skończenie generowany nad } \mathcal{O}_y.$$

(było)

Teraz wykażemy, że jeśli $[e_i]$ $(e_i \in \mathcal{O}_x)$ generują $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, to te same e_i generują $\mathcal{O}_x$ nad $\mathcal{O}_y$.

Bo niech $N \subset \mathcal{O}_x$ będzie zbiorem wszystkich kiełków postaci $\sum \lambda_i(\varphi(x))\, e_i(x)$ $\quad (\lambda_i \in \mathcal{O}_y)$ (czyli $N = \sum \mathcal{O}_y e_i$); jest to podmoduł $\mathcal{O}_x$, a $\mathcal{O}_x$ jest skończ. generowanym modułem nad $\mathcal{O}_y$. Oczywiście

$$\mathcal{O}_x = N + \underbrace{m_y}_{\text{to samo co } (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)} \mathcal{O}_x$$

(wystarczy przejść do ~~postaci~~ modułów ilorazowych, dzieląc obie strony przez ideał $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$). Teraz wystarczy skorzystać z lematu Nakayamy.

⚠ TFO jest oczywistym wnioskiem z tej wersji tw. przygotowawczego:

niech $\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{\varphi \in \mathcal{O}} \mathbb{R}^n_y$, $0 \longrightarrow 0$; jeśli $J_\varphi(0) \neq 0$, to jeśli φ_i^0 są częściami liniowymi φ_i, to $\exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

$$x_i = \sum \lambda_{ij} \varphi_i^0 .$$

(2)

Zatem

$$x_i = \sum \lambda_{ij} \varphi_i \mod m_x^2 ,$$

więc

$$m_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) + m_x^2 .$$

m_x jest skończ. generowany (przez wszystkie x_i) jako $\mathcal{O}_x$-moduł, więc z lematu Nakayamy

$$m_x = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) .$$

Zatem, ~~[illegible]~~ $\mathcal{O}_x / (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest generowana (nad $\mathbb{R}$) przez 1, więc $\forall i$

$$x_i = \psi_i(\varphi(x)) \quad \text{dla pewnych } \psi_i \in \mathcal{O}_y .$$

Zatem $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ jest przekształceniem odwrotnym do φ.

<u>Twierdzenie Sarda</u>: Niech $\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow[]{f \in C^1} \mathbb{R}^m_y$.

Punkt krytyczny: każdy taki $x \in U$, że $\operatorname{rank} f'|_x < m$ (w szczególności każdy punkt $x \in U$ jest krytyczny gdy $m > n$). Pozostałe punkty nazywają się regularne.

Wartość krytyczna: obraz jakiegoś punktu krytycznego. Pozostałe punkty $\mathbb{R}^m_y$: wartości regularne (⚠ wartość regularna nie musi być wartością f).

Np. gdy $m > n$, zbiorem wartości krytycznych f jest $f(U)$.

Przykład: $\mathbb{R} \xrightarrow{P} \mathbb{R}$, $P = x^n + \ldots$
wielomian stopnia n
unormowany ← ogólny przypadek łatwo się sprowadza do tego

Wartość krytyczna y = taki punkt, że wielomian $x \mapsto P(x) - y$ ma pierwiastek wielokrotny rzeczywisty. Gdyby zamienić $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$, to y krytyczne $\Rightarrow$ wyróżnik $\Delta(y)$ tego wielomianu jest $= 0$ (istnieje jawny wzór na wielomian Δ).

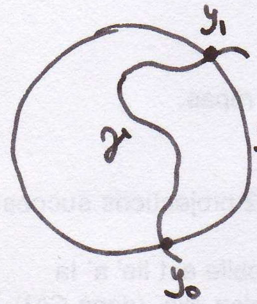
Tw. Sarda Jeśli $f \in C^N$, $N > \max(n-m, 0)$, to zbiór wartości krytycznych jest miary 0. Tak samo dla odwzorowań między rozmaitościami (oczywiście klasy C^N)

Dowód będzie później

⚠ Niech y będzie wartością regularną. Wtedy $f^{-1}(y)$ jest zadany równaniem (właściwie: układem równań) $f(x) = y$, i do tego równania stosuje TFU (z def. wartości regularnej), jeśli zb. rozwiązań jest niepusty. $f^{-1}(y)$ jest więc albo $\emptyset$, albo jest podrozmaitością klasy C^N korymiaru m. domkniętą w U,

Wniosek (tw. Brouwera): $B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ C^∞ retrakcja nie istnieje (tzn. określona na otoczeniu B^n)

D. niech $y_0 \in S^{n-1}$ wartość regularna;
$\gamma \in$ składowa spójna $r^{-1}(y_0)$ zawierająca y_0 = krzywa gładka, przecinająca S^{n-1} w y_0
i nie-styczna w y_0 do S^{n-1}. Parametryzując γ



np. długością łuku łatwo widać, że γ musi przeciąć S^{n-1} w jeszcze jednym punkcie $y_1 \in S^{n-1}$, skąd $r(y_1) = r(y_0)$ (sprzeczność).

Funkcje Morse'a $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ jest Morse'a, jeśli w każdym jej punkcie krytycznym x_0, jej hessian $\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq 0$.

Wniosek: Każdą $f \in C^\infty$ można aproksymować (w topologii C^∞ na zb. zwartych) funkcjami Morse'a (tzn. $\exists \underbrace{f_\nu}_{\text{Morse'a}} \longrightarrow f$, zbieżny niemal jednostajnie wraz ze wszystkimi pochodnymi).

Dowód: Rozpatrzmy $g_\lambda(x) = f(x) - \sum \lambda_i x_i$
parametry.

Niech $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ będzie wartością regularną odwzorowania

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dowolnie bliską 0 (zb. wartości regularnych jest gęsty)

Zatem: jeśli $Df(x) = \lambda$, to $(Df)'|_x : T_x\mathbb{R}^n \to T_{Df(x)}\mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Hessian = wyznacznik $(Df)'|_x$.

Ale $Df(x) = \lambda \iff Dg(x) = 0$; hessian g w x = hessian f w x, co kończy dowód.

5

⚠ Łatwo dowodzi się (imitując sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej), że każda funkcja Morse'a w otoczeniu swojego punktu krytycznego ma w odpowiednich współrzędnych postać

$$f(x) = \text{const} - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 .$$

(λ może być $= 0$ lub n).

Przekształcenia Whitney'a $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (kiełki)

Każde $\mathbb{R}^2_x \xrightarrow{f \in C^\infty} \mathbb{R}^2_y$ (może być podzb. otwarty) można aproksymować (w sensie jak wyżej) takim g, że $\operatorname{rank} g'|_x \geq 1$ $\forall x$

Bo napiszmy $f = (f_1, f_2)$ i niech

$$\Phi : \mathbb{R}^2_x \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right).$$

Obraz ma miarę 0 (Sard); niech $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ leży poza tym obrazem. Wtedy

$$g = (f_1 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2,\ f_2 - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2)$$

spełnia ~~w~~ warunek : $\operatorname{rank} g'|_x \geq 1 \quad \forall x$.

Niech więc $\operatorname{rank} f' \geq 1$ wszędzie. Jeśli ~~rk f'~~ $\operatorname{rank} f'(x_0) = 2$, to w lok. współrzędnych f ma postać

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2.$$

Załóżmy więc, że $\operatorname{rank} f'(x_0) = 1$. Wtedy, po dowolny spermutowaniu ew. współrzędnych, możemy założyć, że $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0$, a więc, w odpowiednich współrzędnych, $f_1 = x_1$. Ostatecznie, zmieniając nieco notację, nasze przekszt. $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ w otoczeniu ~~x_0~~ $x_0 = 0$, jest postaci

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, f(x_1, x_2)).$$

<u>Lemat</u>: f można aproksymować (w sensie jak wyżej) takimi g, że

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \ \& \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} \neq 0 \ \& \ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \neq 0.$$

D. Rozpatrujemy znowu parametry $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ i niech

$$g(x) = f(x) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3.$$

Wtedy

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 - \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_2 - 3\lambda_4 x_2^2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 2\lambda_3 - 6\lambda_4 x_2,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} - 6\lambda_4 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \lambda_2 .$$

Za $6\lambda_4$ i λ_2 weźmy odpowiednio wartość regularną $\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}$ lub $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$. ~~Wtedy każi~~

$$C_1 = \left\{ \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3} = 0 \right\}$$ jest gładką krzywą

i $$C_2 = \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \right\}$$ również.

Teraz za $2\lambda_3$ weźmy wartość regularną

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 6\lambda_4 x_2 \Big|_{C_1 \cup C_2}$$

a za λ_1 – wartość regularną

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_2 - 3\lambda_4 x_2^2 \Big|_{C_1 \cup C_2} .$$

Wtedy $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}$ mogą mieć na $C_1 \cup C_2$ co najwyżej skończoną liczbę wspólnych zer, a ponieważ te zera zależą nietrywialnie od λ_3 i λ_1, więc odpowiednio dobierając λ_3, λ_1 (które mogą być dowolnie blisko 0) można uzyskać brak wspólnych zer.

<u>Postacie kanoniczne:</u>

1) jeśli $\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_0 = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_0 \neq 0$, to w odpowiednim

w $x_0 = 0$

współrzędnych (x_1, f) ma postać (x_1, x_2^2). (8)

D.: Stosujemy tw. przygotowawcze do $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = f(x)$. $O_x / (\varphi_1, \varphi_2)$ jest generowana nad $\mathbb{R}$ przez $1, x_2$, więc

$$x_2^2 = \lambda(x_1, f) + 2\mu(x_1, f)x_2, \quad \lambda, \mu \in O$$

$$\lambda(0) = 0, \quad \mu(0) = 0$$

Niech $x_2' = x_2 - \mu(x_1, f)$, $y_2' = \lambda(y_1, y_2) + \mu^2(y_1, y_2)$

Wtedy, dla $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$, uzyskujemy lok. współrzędne (x_1', x_2'), (y_1', y_2'), i w nich

(x_1, f) pisze się jako $y_1' = x_1'$
$y_2' = x_2'^2$

2) jeśli w 0: $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ i

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \neq 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \neq 0,$$

to w odpowiednich współrzędnych (x_1, f) pisze się jako

$$y_1' = x_1', \quad y_2' = -x_1' x_2' + x_2'^3.$$

D. $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = f(x)$ jak poprzednio. Teraz $O_x / (\varphi_1, \varphi_2)$ jest generowana nad $\mathbb{R}$ przez $1, x_2, x_2^2$, więc $\exists\ \lambda, \mu, \varkappa \in O$

$$x_2^3 = \lambda(x_1, f) + \mu(x_1, f)x_2 + 3\varkappa(x_1, f)x_2^2$$

Zastępując x_2 przez $x_2 - \varkappa(x_1, f)$ uzyskamy nowe wsp. (x_1, x_2) (dla uproszczenia nie zmieniamy notacji), w któ[...]

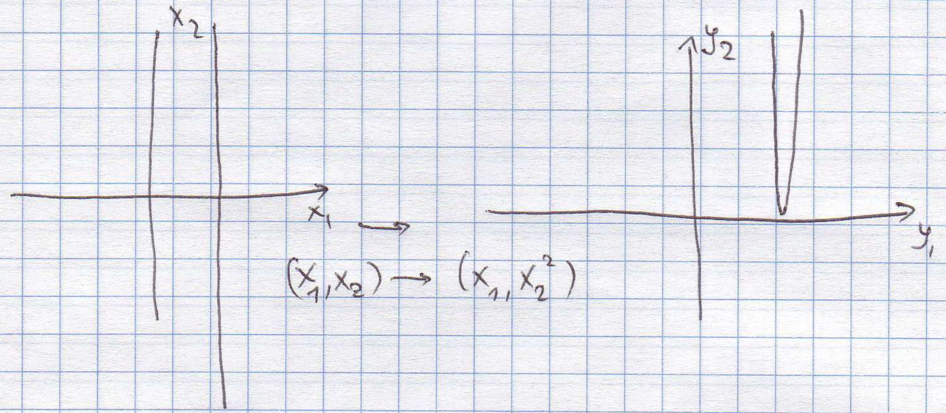
$$\cancel{x_2}\; x_2^3 = \lambda(x_1, f) + \mu(x_1, f)\, x_2 .$$

Niech $x_1' = \mu(x_1, f)$, $x_2' = x_2$,

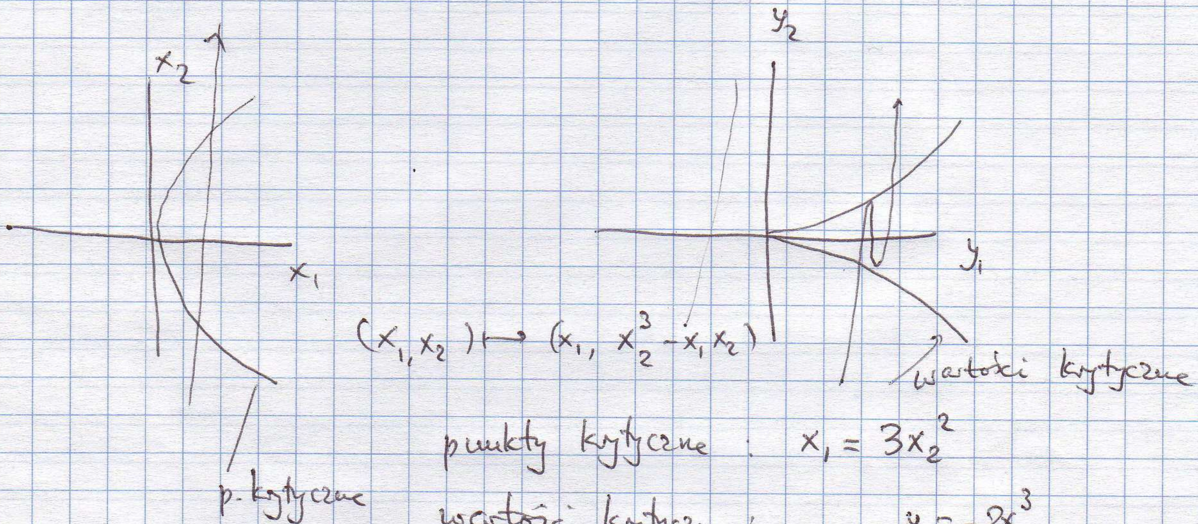
$y_1' = \mu(y_1, y_2)$, $y_2' = \lambda(y_1, y_2)$.

W tych współrzędnych postać przekształcenia jest jak wyżej.

(ćw.: wykazać, że $\cancel{\frac{\partial \mu}{\partial x_1}}$ $\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu(x_1, f))\Big|_0 \neq 0$, żeby wsp. x_1', x_2' były dobrze określone)



$(x_1, x_2) \to (x_1, x_2^2)$



$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3 - x_1 x_2)$

punkty krytyczne: $x_1 = 3x_2^2$

wartości krytyczne: $y_2 = -2x_2^3$, $y_1 = 3x_2^2$ $\Rightarrow$

$$y_2^2 = \frac{4}{27} y_1^3$$

Analiza II*, 13 XII '11.

Jak tw. przygotowawcze w postaci „ogólnej" wynika z wersji o dzieleniu przez wielomian wyróżniony (będzie ważne w dowodzie dla funkcji klasy C^∞).

Zakładamy więc, że jeśli

$$P = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')\, x_n^i$$

to każdą $f(x)$ (C^∞ lub $\mathcal{O}$) można przedstawić w postaci

$$f(x) = q(x)\,P(x) + \sum_{i<p} r_i(x')\, x_n^i$$

(q, r_i - tej samej klasy). [z tej wersji wynika już - korzysta się tylko z różniczkowania i TFU, było poprzednio - że jeśli f spełnia:

$$\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0) = 0 \quad 0 \le i < p, \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0) \neq 0$$

to f jest równoważne wielomianowi wyróżnionemu stopnia p: $f = Q P$ dla pewnego P jak wyżej, $Q(0) \neq 0$].

<u>Tw</u> $A_x = \mathcal{O}_x$ lub $\mathcal{E}_x$; Niech $(\mathbb{R}^n_x, 0) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^m_y, 0)$ - tej samej klasy: $\varphi_i \in A_x$; niech M będzie skończenie generowanym A_x-modułem. Jeśli

$$\dim_{\mathbb{R}} M / m_y M < \infty$$

to M jest skończenie generowanym A_y-modułem.

⚠ 1) jak zwykle ~~O_y z.a.~~ $\mathfrak{m}_y \subset A_y$ jest ideałem maksymalnym (jedynym), i $A_y \xrightarrow{\varphi^*} A_x$, M jest O_y modułem: 2

$$\cancel{f(y)}\ f(y) \odot m = f(\varphi(x))\, m .$$

oznaczenie chwilowe

mnożenie w sensie M

$\Rightarrow \mathfrak{m}_y M = A_y$ - podmoduł M złożony z wszystkich elementów postaci

$$\sum_{sk} f_i(\varphi(x))\, m_i , \qquad f_i \in A_y,\ m_i \in M .$$

2) implikacja przeciwna jest również prawdziwa i jest oczywista.

Dowód: I krok: φ jest włożeniem (czyli immersją, bo tw. jest lokalne). Wtedy

$$A_y \xrightarrow{\varphi^*} A_x$$

jest surjektywne, więc jeśli e_i generują M nad A_x, to tym bardziej nad A_y.

II krok (zasadniczy): φ jest rzutem:

$$\mathbb{R}^n_x \ni x = (x_1, \dots, x_n) \xmapsto{\ \varphi\ } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_y$$

czyli φ: $y_\alpha = x_\alpha$, $\alpha \le n-1$.

Weźmy takie $m_i \in M$, że

1° m_i generują M nad A_x

2° $[m_i]$ generują $M / \mathfrak{m}_y M$ nad $\mathbb{R}$.

Z 1° i 2° wynika, że każdy element $m \in M$ daje się zapisać w postaci

$$m = \sum_{c_j \in \mathbb{R}} c_j \cdot m_j + \underbrace{\text{coś z } \mathfrak{m}_y M}_{\sum_{sk} \psi_k(\varphi(x))\, z_k}$$

$z_k \in M$

$\psi_k(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathfrak{m}_y$ tzn. $\psi_k(0) = 0$

$z_k = \sum f_{ik}(x)\, m_k$, $f_{ik} \in A_x$

czyli to „coś" jest postaci

$$\sum \lambda_i(x)\, m_i$$

gdzie $\lambda_i \in A_x$,

$\lambda_i = 0$ gdy $x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$

tzn λ_i zerują się na osi x_n.

Ostatecznie każde m zapisuje się jako

$$m = \sum_{\in \mathbb{R}} c_j m_j + \sum \lambda_j(x)\, m_j$$

λ_j zerują się na osi x_n.

Stosujemy to do wszystkich elementów postaci $x_n m_i$:

$$x_n m_i = \sum_j \left(c_{ij} + \lambda_{ij}(x)\right) m_j ,$$

więc

$$\sum_j \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} - \lambda_{ij}(x) \right) m_j = 0 .$$

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to istnieje taka macierz B, że

$$BA = AB = \det A \cdot I$$

(oczywiście B jest macierzą transponowaną do macierzy utworzonej z ~~dz~~ dopełnień algebraicznych elementów ~~a~~ macierzy ~~a~~ A). Przyjmijmy za $A = \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} - \lambda_{ij}(x) \right)_{i,j=1,\dots n}$ i stosując B do równości uzyskamy:

$$\det A \cdot m_j = 0 \quad \forall j$$

czyli

$$\det A \cdot M = 0$$

Niech $P = \det A = P(x)$. Jeśli $x' = 0$, to $\lambda_{ij} = 0$, więc

$$P(0, x_n) = \det \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} \right) =$$

wielomian względem x_n, niezerowy, stopnia $p \leq n$.

Zatem P jest równoważne wiel. wyróżnionemu stopnia p:

$$P \sim P_1 = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x') x_n^i$$

i M jest generowany nad A_y przez wszystkie

$$x_n^s m_i, \qquad s = 0, \dots, p-1.$$

[każdy $m \in M$ jest postaci

$$m = \sum \psi_i(x)\, m_i$$

$$\psi_i \in A_x \quad ;$$

niech $\psi_i(x) = q_i(x)\, P_1(x) + r_i(x)$

$$r_i(x) = \sum_{j<p} r_{ij}(x')\, x_n^j \; ;$$

wtedy

$$m = \underbrace{P_1 \sum q_i m_i}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \sum \underbrace{r_{ij}(x')\, x_n^j m_i}_{r_{ij} \odot x_n^j m_i}$$

0 bo $PM = 0$

bo r_{ij} pochodzą z A_y przez złożenie z φ z rzut].

III krok: Jeśli tw. jest prawdziwe dla φ, ψ:

$$\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^\ell_z$$

to jest prawdziwe dla złożenia $\psi \circ \varphi$. Bo niech M będzie sk. gener. nad A_x, i

$$\dim_{\mathbb{R}} (M / \mathfrak{m}_z M) < \infty.$$

$\psi^*(\mathfrak{m}_z) \subset \mathfrak{m}_y$, więc tym bardziej $\dim_{\mathbb{R}}(M/\mathfrak{m}_y M) < \infty$. Zatem M jest sk. generowany nad A_y ; zatem M jest sk. generowany nad A_z.

IV krok : dowolne φ można przedstawić jako złożenie

$$\mathbb{R}^n_x \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}_{(x,y)} \xrightarrow{\text{rzut}} \mathbb{R}^{n-1+m}_{(x_1,\dots x_{n-1},y)} \to \dots \mathbb{R}^m_y$$

zanurzenie na wykres φ

$x \longmapsto (x, \varphi(x))$ $\qquad (x,y) \longmapsto (x_1, \dots x_{n-1}, y)$

co kończy dowód.

Równoważność funkcji i jej tasiemca Taylora.

$$(\mathbb{R}^n_x, 0) \xrightarrow[\text{kiełek } C^\infty]{f} (\mathbb{R}, 0) \quad ; \quad (\mathbb{R}^n_x) \xrightarrow[\text{wielomianowe}]{T_0^m f} \mathbb{R} \, ,$$

Kiedy istnieje taki dyfeom. $(\mathbb{R}^n_x, 0) \circlearrowleft^{h}$, że
$f\circ h^{-1} = T_0{}^m f$ ~~?~~ (dla $m \gg 0$) ?

<u>Tw</u> Jeśli ideał $I = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \supset \mathfrak{m}^k$
dla pewnej k, to takie h i m istnieje (nawet $m = 2k+1$)

⚠ Warunek $I \supset \mathfrak{m}^k$ zależy tylko od $T_0^{k+1} f$.
Bo niech $I_k = I \cap \mathfrak{m}^k \underset{\uparrow \text{zawsze}}{\subset} \mathfrak{m}^k$; wtedy $I \supset \mathfrak{m}^k \Leftrightarrow$
$I_k = \mathfrak{m}^k$, a
tak jest $\underset{\text{Nakayama}}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{m}^k = I_k + \mathfrak{m}^{k+1}$, czyli

$$\mathfrak{m}^{k+1} + I \supset \mathfrak{m}^k$$

Ten warunek zależy tylko od klas $\frac{\partial f}{\partial x_i} \bmod \mathfrak{m}^{k+1}$
czyli od klasy $f \bmod \mathfrak{m}^{k+2}$, czyli od rozwinięcia Taylora f rzędu $k+1$.

<u>Dowód tw</u> Z założenia każde x^α $(|\alpha| = k)$
daje się przedstawić w postaci

$$x^\alpha = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \lambda_i(x)$$

a stąd

$$x^\beta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \lambda_i(x) \qquad |\beta| \geq k$$

dla pewnych $\lambda_i \in \mathfrak{m}^{|\beta|-k}$

Niech $P(x) = T_0^{2k+1} f(x)$; zatem

$$f = P + R_q, \quad R_q \in \mathfrak{m}^{2k+2}.$$

Szukamy takiego $h = x +$ coś z $\mathfrak{m}^2$, że
$P \circ h = f$. $\qquad$ ↗ nawet z $\mathfrak{m}^{k+1}$

Niech $h(x) = x + \lambda(x)$, $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$,

$\lambda_i(x)$ będzie postaci

$$\lambda_i(x) = \sum \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)\,\eta_{j,i}(x)$$

nowe funkcje

(czyli każde λ_i są w I), bo ideał generowany przez wszystkie $\frac{\partial P}{\partial x_j}$ jest ideałem generowanym przez wszystkie $\frac{\partial f}{\partial x_j}$).

$$P(x+\lambda(x)) = P(x) + \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\lambda_i(x) + \sum R_{kl}(x,\lambda(x))\,\lambda_k(x)\,\lambda_l(x)$$

(Taylor rzędu 2)

Ale $R(x) = \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\,\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)\,\psi_{ij}(x)$,

$\psi_{ij}(0) = 0$.

Zatem mamy równanie

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_j}\psi_{ij} = \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_j}\eta_{ij} + \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}\eta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_j}\eta_{jl}R_{kl}(x,\lambda)$$

Wystarczy więc rozwiązać

$$\eta_{ij} + \sum \eta_{ik}\eta_{jl}R_{kl}(x,\lambda) = \psi_{ij},$$

a istnienie rozwiązań wynika z TFU.

Teoria miary

σ-ciało $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru (przestrzeni) X:

1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$
2) $\forall A \in \mathfrak{M} \quad X \setminus A \overset{df}{=} A' \in \mathfrak{M}$
3) $\underset{n\in\mathbb{N}}{A_n} \in \mathfrak{M} \quad \Rightarrow \quad \bigcup A_n \in \mathfrak{M}$.

Stąd wynika, że $A \setminus B \in \mathfrak{M}$ dla $A, B \in \mathfrak{M}$, i $\bigcap A_n \in \mathfrak{M}$ dla $A_n \in \mathfrak{M}$.

Jeśli 3) zastąpić warunkiem: $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$ to otrzymamy ciało zbiorów (= podalgebrę Boole'a 2^X).

Przykłady
1) $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$
2) $\mathfrak{M} = 2^X$
3) Dla $A \in X \quad \mathfrak{M} = \{\emptyset, A, X\setminus A, X\}$
4) Jeśli $\mathfrak{A} \subset 2^X$ jest dowolną rodziną zbiorów, to jest pojęcie σ-ciała (albo ciała) zbiorów generowanego przez $\mathfrak{A}$: jest to najmniejsze (względem relacji $\subset$) σ-ciało (albo ciało) zawierające $\mathfrak{A}$; oczywiście jest to przekrój wszystkich σ-ciał (albo ciał) zawierających $\mathfrak{A}$.

Jeśli za $\mathfrak{A}$ weźmiemy wszystkie zb. otwarte (albo domknięte) przestrzeni topologicznej X, to σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ nazywa się σ-ciałem zbiorów borelowskich; jeśli $\mathfrak{A}$ składa się ze wszystkich podzbiorów zwartych X, to σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ nazywa się σ-ciałem zbiorów baire'owskich (dla $\mathbb{R}^n$ – lub ogólniej lokalnie zwartych ośrodkowych przestrzeni – te klasy pokrywają się).

5) Niech $Q = X$ będzie ~~wielościanem~~ kostką w $\mathbb{R}^n$:

$$Q = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n),$$

$\mathfrak{A}$ = rodzina wszystkich przecięć

$Q \cap$ półprzestrzeń

gdzie

półprzestrzeń $= \{x : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < A\}$

każdy zbiór postaci.

Ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ = wielościany w Q.

6) $X = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{A}$ = wszystkie algebraiczne hiperpowierzchnie

tzn zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{C}^n : P(x) = 0\}$$

P=wielomian

Ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ = ciało zbiorów konstruowalnych;

$X = \mathbb{R}^n$; $\mathfrak{A}$ = wszystkie zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$$

P=wielomian

Ciało gener. przez $\mathfrak{A}$ = ciało zbiorów semialgebraicznych

7) X – dowolna; $\mathfrak{A}$ = rodzina wszystkich jednopunktowych zbiorów; wtedy

σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$: zbiór wszystkich zbiorów albo przeliczalnych, albo o przeliczalnych uzupełnieniach

ciało gener. przez $\mathfrak{A}$: zbiór wszystkich zbiorów albo skończonych, albo o skończonych uzupełnieniach.

8) Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-ciałem (ciałem) podzbiorów X. $\mathcal{J} \subset \mathfrak{M}$ jest przeliczalnie addytywnym σ-ideałem (ideałem) jeśli:

a) $\underset{n \in \mathbb{N}}{A_n \in \mathcal{J}} \Rightarrow \bigsqcup A_n \in \mathcal{J}$

b) $\underset{\mathfrak{M}}{\overset{\cap}{B}} \subset A \in \mathcal{J} \Rightarrow B \in \mathcal{J}$

(dla ciał: zastąpić a) warunkiem: $A, B \in \mathcal{J} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{J}$).

Niech $\underset{A, B \in \mathfrak{M}}{A \sim B} \Leftrightarrow A \dot{-} B \overset{df}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{J}$.

Wtedy zbiór $\mathfrak{M}/\mathcal{J}$ klas abstrakcji jest σ-ciałem (ciałem) — w definicji ciała lub σ-ciała opuścić warunek, że chodzi o podzbiory jakiejś przestrzeni, a działania określić aksjomatycznie.

<u>Miara μ</u> na σ-ciele $\mathfrak{M}$: funkcja

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathbb{R}}_+ \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

z umowami:

$\infty + \infty = \infty$, $a + \infty = \infty$,

$0 \cdot \infty = 0$

$a \cdot \infty = \infty \quad \forall a > 0$

$a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

z własnościami:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(\bigsqcup A_n) = \sum \mu(A_n)$ $\forall A_n \in \mathfrak{M}$

przeliczalna addytywność

A_n = parami rozłączne: $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n, m$.

μ skończona: $\mu(X) < \infty$

unormowana: $\mu(X) = 1$

półskończona: $X = \bigcup X_n$, $X_n \in \mathfrak{M}$, $\mu(X_n) < \infty$

μ zupełna: jeśli $A \subset \underset{\mathfrak{M}}{\underset{\cap}{B}}$, $\mu(B)=0$, to $A \in \mathfrak{M}$.

Przykłady: 1) $\mathfrak{M} = 2^X$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A=\emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset \end{cases}$$

2) $\mathfrak{M} = 2^X$

$$\mu(A) = \begin{cases} \bar{\bar{A}} & \text{gdy } \bar{\bar{A}} < \infty \\ \infty & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$$

3) $\mathfrak{M} = 2^X$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

(jeśli ~~A~~ $A \setminus \{x : f(x)=0\}$ jest nieprzeliczalny, to tę sumę uważamy za $+\infty$)

4) $\mathfrak{M} = 2^X$, $x_0 \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$

5) obcięcie miary do podzbioru $Y \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\} = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset Y\}$$

$$\mu_Y(A) = \mu(A)$$

dla $A \in \mathfrak{M}_Y$.

Addytywna funkcja zbioru μ: zamiast 2) – addytywność: μ - określ. na ciele zbiorów $\mathfrak{N}$

2') $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$A, B \in \mathfrak{N}$.

Często rozpatruje się też f. zbioru, tzw. (addyt. lub przeliczalnie addytywne), które nie są nieujemne, albo przyjmują wartości w jakiejś przestrzeni wektorowej.

Przykłady takich funkcji: $\mathfrak{N}$ = ciało podwielościanów Q (jak w przykładzie 5)

1) $\mathfrak{N} \ni A \longmapsto \chi(A)$ = charakterystyka Eulera A

2) niezmiennik Dehna: f = addytywna $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$n=3$
(tzn $f(x+y) = f(x) + f(y)$),
$f(\pi) = 0$

$$D_A = \sum \underbrace{l_i}_{\text{długości krawędzi } A} \underbrace{f(\alpha_i)}_{\text{kąty dwuścienne przy tych krawędziach.}}$$
$A \in \mathfrak{M}$

3) jeśli $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^+$ jest addytywna, to jest postaci $\mu(A) = \underbrace{c}_{\text{const} \geq 0} \underbrace{|A|}_{\text{objętość } A.}$

Najprostsze własności miary

1) $A \subset B$ $\Rightarrow$ $\mu(A) \leq \mu(B)$
$A, B \in \mathfrak{M}$ (monotoniczność)

bo $B = \underset{\mathfrak{M}}{\underset{\wedge}{(B \setminus A)}} \sqcup \underset{\mathfrak{M}}{\underset{\wedge}{A}}$

$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$

2) $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$ $\Rightarrow$
$A, B \in \mathfrak{M}$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(wynika z poprzedniego dowodu, bo odejmowanie jest wykonalne)

3) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
$A, B \in \mathfrak{M}$,
$\mu(A \cap B) < \infty$
– analogicznie

(te własności są prawdziwe również dla addytywnych funkcji zbioru)

4) $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$ $\quad A_n \in \mathfrak{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5) a) jeśli $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_n \in \mathfrak{M}$, to

(ozn.: $A_n \nearrow$)

$$\mu(\bigcup A_n) = \lim \mu(A_n)$$

b) jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, to $\mu(\bigcap A_n) =$

(ozn.: $A_n \searrow$), $A_n \in \mathfrak{M}$

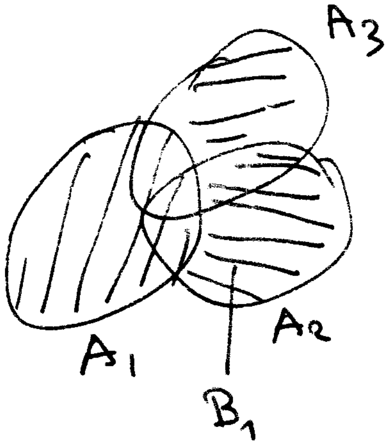
$= \lim \mu(A_n)$

o ile $\mu(A_1) < \infty$ (lub, ogólniej, $\mu(A_k) < \infty$ dla pewnego k).

<u>Dowody</u>: rozłączanie zbiorów: niech $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in \mathbb{N})$; wtedy $\exists\, B_n \in \mathfrak{M}$, parami rozłączne, $B_n \subset A_n$

$\bigsqcup B_n = \bigcup A_n$ i nawet $\forall k$

$$\bigcup_{n \leq k} B_n = \bigcup_{n \leq k} A_n$$



konstrukcja:

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus B_1$

$B_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$

ad 4): $\mu(\bigcup A_n) = \mu(\bigsqcup B_n) = \sum \mu(B_n) \leq \sum \mu(A_n)$

ad 5a): $B_n =$ ~~zbiory~~ rozłączenie A_n; w tym wypadku

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ...

$$\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(B_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n)$$

$$= \lim \mu(A_k).$$

ad 5b) Niech $\mu(A_k)<\infty$; niech

$$\mathfrak{M} \ni A'_j = A_k \setminus A_{k+j} \nearrow$$

Zatem

$$\mu\left(\bigcup A'_j\right) = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\mu(A'_j)}_{\mu(A_k)-\mu(A_{k+j})} =$$

$$= \mu(A_k) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\bigcup A'_j = A_k \setminus \bigcap A_{k+j} = A_k \setminus \bigcap A_n,$$

co kończy dowód.

6) Uzupełnianie miary: μ - określona na $\mathfrak{M}$.

Niech $\tilde{\mathfrak{M}} = \{ A \cup B : A \in \mathfrak{M},\ B \subset C \in \mathfrak{M},\ \mu(C) = 0\}$,

$\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$.

Wtedy $\tilde{\mathfrak{M}}$ jest σ-ciałem zbiorów, $\tilde{\mu}$ jest dobrze określona (tzn. nie zależy od przedstawienia zbioru $C \in \tilde{\mathfrak{M}}$ w postaci $A \cup B$), i $\tilde{\mu}$ jest miarą zupełną.

Dowód jest bezpośredni i łatwy (ćwiczenie).

Analiza $\overline{\underline{II}}^{*}$, 20 XII '11.

Miara zewnętrzna na X:

$$2^X \xrightarrow{\mu_z} \mathbb{R}_+ \quad :$$

monotoniczność:

$$\mu_z(\emptyset) = 0, \qquad \mu_z(A) \leq \mu_z(B) \text{ gdy } A \subset B,$$

$$\mu_z(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n) \text{ (podaddytywność)}$$

$A \subset X$ spełnia warunek Caratheodory'ego jeśli

$$\forall\, W \subset A,\ Z \supset A' \qquad (A' = X \setminus A)$$

$$\mu_z(W \sqcup Z) = \mu_z(W) + \mu_z(Z) . \iff \mu_z(W \sqcup A) \geq \ldots$$

⚠ ten warunek można też sformułować tak:

$$\forall\, V \subset X \qquad \mu_z(V \cap A) + \mu_z(V \setminus A) = \mu_z(V)$$

zamiast W zamiast Z

$$V = W \sqcup Z .$$

Zbiory typu $V \cap A$, $V \setminus A$ nazywamy rozbiciem V zbiorem A. Zatem warunek Caratheodory'ego mówi, że miara zewnętrzna jest addytywna na rozbiciach <u>dowolnego</u> V zbiorem A.

<u>Tw</u> Caratheodory'ego: μ_z = miara zewnętrzna, $\mathfrak{M}$ = zb. wszystkich A spełniających war. Caratheodory'ego. Wtedy $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem, i $\mu_z|_{\mathfrak{M}}$ jest miarą zupełną.

D. 1) $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A' \in \mathfrak{M}$

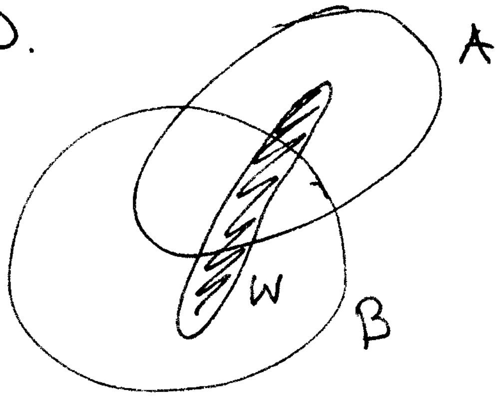
2) $\mu_z(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$

w szczególności $\emptyset \in \mathfrak{M}$

3) $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$ (czyli $\mathfrak{M}$ jest ciałem zb.)

– stąd wynika, że suma dowolnej skończonej liczby zbiorów z $\mathfrak{M}$ jest w $\mathfrak{M}$, oraz że przecięcie i różnica zb. z $\mathfrak{M}$ jest w $\mathfrak{M}$.

D.



$W \subset A \cup B$, $Z \subset (A \cup B)'$

$W_1 = W \cap A$, $W_2 = W \setminus A$ (rozbicie W zbiorem A)

$$\mu_z(W \sqcup Z) \overset{A}{=} \mu_z(W_1 \sqcup (Z \sqcup W_2)) =$$

$$= \mu_z(W_1) + \underbrace{\mu_z(Z \sqcup W_2)}_{\text{|| bo } B \in \mathfrak{M}}$$

bo $A \in \mathfrak{M}$

$$\mu_z(Z) + \mu_z(W_2) =$$

$$= \underbrace{\mu_z(W_1) + \mu_z(W_2)}_{\mu_z(W)} + \mu_z(Z)$$

zatem z tego, że $A \in \mathfrak{M}$.

4) Niech $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{M}$, parami rozłączne, $W_i \subset B_i$ dowolne, $Z \subset (\bigcup B_i)'$; wtedy

$$\mu_Z(Z \cup \bigcup W_i) = \mu(Z) + \sum \mu_Z(W_i).$$

D. Indukcja. $n=1$: wynika stąd, że $B_1 \in \mathfrak{M}$.
Krok indukcyjny: $n+1$ zamiast n.

$$\mu_Z(Z \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i) = \mu_Z(Z \cup \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cup W_{n+1})$$

$$= \mu_Z(\underbrace{Z \cup \bigcup_{i=1}^{n} W_i}_{\text{zewnątrz } B_{n+1}}) + \mu_Z(\underbrace{W_{n+1}}_{\text{w } B_{n+1}})$$

bo $B_{n+1} \in \mathfrak{M}$

$$\underset{\text{indukcja}}{=} \mu_Z(Z) + \sum_1^n \mu_Z(W_i) + \mu_Z(W_{n+1}).$$

5) (przeliczalna addytywność $\mathfrak{M}$): $A_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

D. dzięki urozłącznieniu można założyć, że A_n są parami rozłączne. Niech $A = \bigcup A_n$, $W \subset A$, $Z \subset A'$, $W_i = W \cap A_i$. Z 4), dla dowolnego n

$$\mu_Z(Z \cup W) \geq \mu_Z(Z \cup \bigcup_{i \leq n} W_i) =$$

$$= \mu_Z(Z) + \sum_{i \leq n} \mu_Z(W_i).$$

Po przejściu do granicy przy $n \to \infty$

$$\mu_Z(Z \cup W) \geq \mu_Z(Z) + \sum \mu_Z(W_i) \geq$$

$$\underset{\text{podaddyt. } \mu_Z}{\geq} \mu_Z(Z) + \mu_Z(\bigcup W_i) =$$

$$= \mu_Z(Z) + \mu_Z(W).$$

6) $\mu_Z | \mathfrak{M}$ jest miarą.

D. addytywność wynika z warunku Carathéodory'ego:

jeśli $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B = \emptyset$ to

$$\mu_z(A \cup B) = \mu_z(A) + \mu_z(B)$$

przyjąć

$$W = A, \quad Z = B$$

Przeliczalna addytywność wynika stąd, że :

jeśli • μ jest określona na σ-ciele $\mathfrak{M}$,

• jest addytywna, $\mu(\emptyset) = 0$,

• jest przeliczalnie podaddytywna,

to jest miarą.

Bo niech $A_n \in \mathfrak{M}$ będą parami rozłączne ; wtedy,

$\forall n$

$$\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{i \le n} A_i) \le \mu(\bigcup A_n)$$

po przejściu granicznym :

$$\sum \mu(A_n) \le \mu(\bigcup A_n),$$

a nierówność przeciwna jest podaddytywnością przeliczalną.

7) Zupełność $\mu_z|_{\mathfrak{M}}$: ☺☺.

Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$

Układ współrzędnych - ustalony.

Przedział : każdy zbiór postaci

$$P = \{x : a_i \le x_i \le b_i \quad \forall i\} \qquad a_i, b_i \text{ - skończ.}$$

Objętość P : $\quad \mathrm{vol}\, P = \prod (b_i - a_i)$.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a :

$$|A|_z = \inf_{\bigcup P_i \supset A} \sum \mathrm{vol}\, P_i .$$

Sprawdzamy aksjomaty: (5)

$|\emptyset|_2 = 0$ oczywiście, monotoniczność też.

przelicz. podaddytywność: $|\bigcup A_i|_2 \overset{?}{\leq} \sum |A_i|_2$:

oczywiste, jeśli chociaż jedna $|A_i|_2 = \infty$

Zatem niech $|A_i|_2 < \infty$ $\forall i$. Niech $\varepsilon > 0$ dowolne.

$$A_i \subset \bigcup_j P_{ij}, \quad \sum_j \operatorname{vol} P_{ij} \leq |A_i|_2 + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

przedziały

wtedy

$$\bigcup_i A_i \overset{df}{=} A \subset \bigcup_{i,j} P_{ij},$$

$$\sum_{i,j} \operatorname{vol} P_{ij} \leq \sum_i \left(|A_i|_2 + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) =$$

$$= \sum |A_i|_2 + \varepsilon$$

więc

$$|A|_2 \leq \sum |A_i|_2 + \varepsilon \underset{\text{dowolność } \varepsilon}{\Longrightarrow}$$

$$|A|_2 \leq \sum |A_i|_2.$$

Tw $\forall P$ $\operatorname{vol} P = |P|_2$.

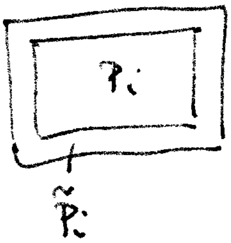
D. $|P|_2 \leq \operatorname{vol} P$ – za pokrycie P weźmy pokrycie jednoelementowe $\{P\}$.

Niech ε = dowolne,

$$P \subset \bigcup_1^\infty P_i, \quad \sum \operatorname{vol} P_i \leq |P|_2 + \varepsilon.$$

Każdy P_i powiększmy do otwartego Q_i, o tej własności, że jeśli $\tilde{P}_i$ = domknięcie Q_i, to

$$\mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \mathrm{vol}\,P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$



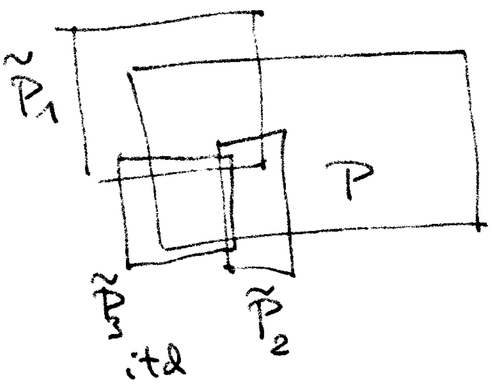
Zatem $\sum \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le |P|_2 + 2\varepsilon$

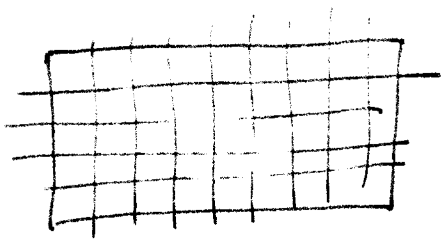
Ale P zwarty $\subset \bigcup Q_i$, więc można wybrać pokrycie skończone:

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{P}_i.$$

Dla takich pokryć skończonych jest prawie oczywiste, że

$$\mathrm{vol}\,P \le \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i$$





P można pokroić hiperpłaszczyznami równoległymi do hiperpłaszczyzn współrzędnych, i każde $\tilde{P}_i$ jest sumą niektórych z uzyskanych przedziałów

do sprawdz.: $\mathrm{vol}\,P = \sum \mathrm{vol}$(wszystkich "kratek")

$\forall i \quad \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \sum \mathrm{vol}$(kratek zawartych w $\tilde{P}_i$).

Zatem $\mathrm{vol}\,P \le \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le |P|_2 + 2\varepsilon.$

Mierzalność przedziałów

Def. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (lub przestrzeni metrycznej) są w odległości $\geq \delta > 0$ jeśli

$$|a-b| \geq \delta \qquad \forall a \in A,\ b \in B.$$

Stw. Jeśli A, B są (dla dowolnego $\delta > 0$) w odległości $\geq \delta$, to miara zewnętrzna jest na nich addytywna:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

D. Wystarczy nierówność $\geq$. Niech $\varepsilon > 0$ i weźmy takie pokrycie $A \cup B \subset \bigcup P_i$ przedziałami, że

$$\sum \mathrm{vol}\, P_i \leq |A \cup B| + \varepsilon.$$

Krojąc każde P_i można założyć, że $\forall_i$

$$\mathrm{diam}\, P_i < \delta/2 .$$

Wyrzucając niepotrzebne P_i można dalej założyć, że $\forall_i$ $\quad P_i \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

Zauważmy, że jeśli $P_i \cap A \neq \emptyset$, to $P_i \cap B = \emptyset$, i na odwrót. Zatem

$$\sum_i \mathrm{vol}\, P_i = \sum_{i:\ P_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{vol}\, P_i + \sum_{i:\ P_i \cap B \neq \emptyset} \mathrm{vol}\, P_i .$$

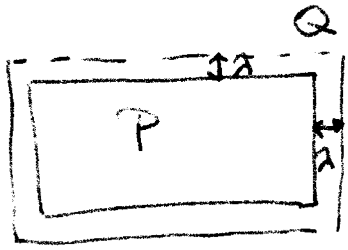
Ale $\bigcup_{i:\, P_i \cap A \neq \emptyset} P_i \supset A$, więc $|A| \le \sum_{i:\, P_i \cap A \neq \emptyset} \mathrm{vol}\, P_i$; analogicznie z B. Zatem

$$|A \cup B| \ge \sum \mathrm{vol}\, P_i - \varepsilon = \sum_{i:\, P_i \cap A \neq \emptyset} \cdots + \sum_{i:\, P_i \cap B \neq \emptyset} \cdots - \varepsilon$$

$$\ge |A| + |B| - \varepsilon.$$

<u>Stw.</u> Każdy przedział P jest mierzalny.

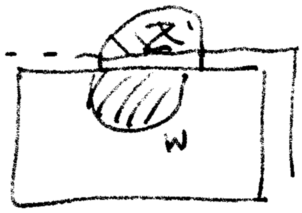
D. ε - dowolne.



Powiększmy P do Q: ponieważ $Q \setminus P$ = suma 2^n przedziałów, ~~ktoych~~ które mają jeden bok długości λ,

więc $|Q - P| < \varepsilon$, dla λ dostat. małego, ale > 0

Niech $W \subset P$, $Z \subset P'$ - dowolne; wtedy



niech $\tilde{Z} = Z \setminus Q$;

$$Z = \tilde{Z} \cup \underbrace{[Z \cap (Q \setminus P)]}$$

ten zbiór ma miarę zewn. $\le |Q \setminus P| < \varepsilon$.

$\Rightarrow |Z| \le |\tilde{Z}| + \varepsilon$

Zatem

$$|W| + |Z| \le |W| + |\tilde{Z}| + \varepsilon$$

$$= |W \cup \tilde{Z}| + \varepsilon \le |W \cup Z| + \varepsilon.$$

bo W i $\tilde{Z}$ są w odległ. $\ge \lambda > 0$

⚠ Ten argument jest słuszny dla każdego zbioru A (zamiast P) o własności następującej:

$$\forall \varepsilon \ \exists\ U = \text{otoczenie } \partial A \qquad |U| < \varepsilon.$$

$$\partial A \overset{df}{=} \bar{A} \setminus \mathring{A}, \qquad \mathring{A} = \operatorname{int} A.$$

$\Rightarrow$ każdy zbiór otwarty jest mierzalny (bo każdy otwarty jest sumą przeliczalnej liczby przedziałów), a więc każdy zb. borelowski jest mierzalny.

Charakteryzacja zb. mierzalnych

Nast. warunki są równoważne:

1) A jest mierzalny

2) $\forall \varepsilon \ \exists \underset{\text{otwarty}}{U} \supset A \qquad |U \setminus A| < \varepsilon$

3) $\exists \underset{G_\delta}{G} \supset A \qquad |G \setminus A| = 0 \iff A = G \setminus (\text{zb. miary } 0)$

2') $\forall \varepsilon \ \exists \underset{\text{domk.}}{F} \subset A \qquad |A \setminus F| < \varepsilon$

3') $\exists \underset{F_\sigma}{S} \subset A \qquad A = S \cup \text{zb. miary } 0.$

D. 1) $\Rightarrow$ 2):

a) A ograniczony $\Rightarrow |A| < \infty$.

Pokrywamy A przedziałami:

$$A \subset \bigcup P_i , \qquad \sum |P_i| < |A| + \varepsilon .$$

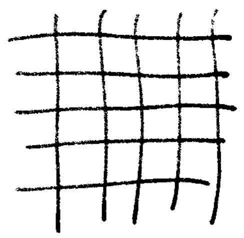
Niech $P_i \subset \underset{\text{otwarty}}{Q_i}$, $\quad |Q_i| < |P_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$,

$$U \overset{df}{=} \bigcup Q_i \ \text{ - otwarty}, \quad A \subset U$$

$$|U| \leq \sum |P_i| + \varepsilon < |A| + 2\varepsilon ;$$

$$|U \setminus A| = |U| - |A| < 2\varepsilon .$$

b) A dowolny. Pokrajmy $\mathbb{R}^n$ kostkami domkniętymi np. o długości boków $= 1$:



Przecinając A tymi kostkami uzyskamy zbiory mierzalne A_j, ograniczone, $\bigcup A_j = A$.

Korzystając z a), dla każdego j znajdziemy taki otwarty $U_j \supset A_j$, że $|U_j \setminus A_j| < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Niech $U = \bigcup U_j$, wtedy $A \subset U$ i

$$U \setminus A = \bigcup (U_j \setminus A) \subset \bigcup (U_j \setminus A_j)$$

$$\Rightarrow \quad |U \setminus A| \leq \sum |U_j \setminus A_j| < \varepsilon .$$

2) $\Rightarrow$ 3): niech, $\forall j$,

$$\underset{\text{otwarty}}{A \subset U_j}, \qquad |U_j \setminus A| < \frac{1}{j}$$

$$G \overset{df}{=} \bigcap U_j \in G_\delta$$

Wtedy $A \subset G$, $|G \setminus A| \leq |U_j \setminus A| < \frac{1}{j}$ $\forall j$.

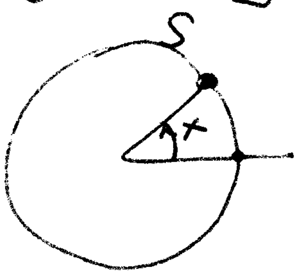
3) $\Rightarrow$ 1): wynika z zupełności miary Lebesgue'a.

Dowody 1) $\Rightarrow$ 2') $\Rightarrow$ 3') są analogiczne.

⚠ Dla dowolnego A istnieje taki $G \in G_\delta$, że $A \subset G$, $|A| = |G|$.

Przesuwalność miary Lebesgue'a: niech τ będzie dowolnym przesunięciem; wtedy A jest mierzalny $\Leftrightarrow$ $\tau(A)$ jest mierzalny i $|\tau(A)| = |A|$. (tak jest również dla dowolnych izometrii, ale jest trudniejsze do dowodu).

Przykład zbioru niemierzalnego. Najpierw na okręgu jednostkowym S: rolę przedziałów odgrywają łuki; zamiast przesunięć jest obrót. Punkty okręgu = kąty = liczby mod 2π



Niech $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ jest współmierne z π

Wtedy S rozbija się na klasy abstrakcji.

Niech $A \subset S$ będzie takim zb., że A ma dokł. jeden element wspólny z każdą klasą abstrakcji.

Dla $w \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ niech A_w będzie A po obrocie o kąt $2\pi \cdot w$. Wtedy

1° $A_w \cap A_{w'} = \emptyset$, gdy $w' \neq w$

2° $\bigcup A_w = S$.

D. 1° niech $x \in A_w \cap A_{w'}$, $w' < w$

τ_w = obrót o kąt $2\pi w$.

wtedy $x = \tau_{w'}(a') = \tau_w(a)$

dla pewnych $a, a' \in A$

$$\Rightarrow a' = \tau_{w-w'}(a)$$

więc A zawiera dwa punkty (a, a') w tej samej klasie abstrakcji.

2° $x \in S$ dowolny, $a \in [x]$. Zatem x powstaje z $a \in A$ przez obrót o kąt współmierny z 2π.

Zał., że A jest mierzalny. ~~Wtedy~~ wszystkie A_w też i $|A_w| = |A|$ (przesuwalność). Zatem

$$2\pi = |S| = \sum |A_w| = \sum |A| ;$$

jeśli $|A| > 0$, to $\sum |A| = \infty$; jeśli $|A| = 0$, to $\sum |A| = 0$ (sprzeczność).

<u>Wersja dla prostej</u>. $(0,1)$ zamiast S;

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$; niech $A \subset (0,1)$ zawiera dokładnie jeden element w każdej klasie abstrakcji.

Teraz w przebiega $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$, τ_w = przesunięcie o w : $\tau_w(x) = w + x$, $A_w = \tau_w(A)$

Niech $B = \bigcup_w A_w$; wtedy

1° A_w są parami rozłączne,

2° $(0,1) \subset B \subset (-1,2)$

(dowody – jak poprzednio). Gdyby A był mierzalny, ~~to~~ wszystkie A_w też, $|A_w| = |A|$; oraz

$$1 = |(0,1)| \leq |B| \leq |(-1,2)| = 3,$$

$|B| = \sum_w |A|$ – albo 0 albo ∞ (sprzeczność).

⚠ 1) Analogiczna konstrukcja w $\mathbb{R}^n$.

2) Ogólniej, dowodzi się, że każdy zbiór w $\mathbb{R}^n$ miary zewnętrznej dodatniej zawiera zbiór niemierzalny

3) Jeśli założyć pewnik wyboru tylko dla przeliczalnych rodzin zbiorów, to nie da się udowodnić istnienia zbioru niemierzalnego (Solovay).

<u>Wnioski z tw:</u> 1) $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ mierzalne

$\Rightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ jest mierzalny.

D. $A = S \cup Z$ $\quad S \in F_\sigma$, $|Z| = 0$,

$B = T \cup W$ $\quad T \in F_\sigma$, $|W| = 0$

$\Rightarrow A \times B = (S \times T) \cup (S \times W) \cup (Z \times T) \cup (Z \times W)$

$S \times T \in F_\sigma$. Że każdy z pozostałych składników (8)
jest miary 0, wynika z następującej uwagi:

jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ dowolny, $Z \subset \mathbb{R}^m$, $|Z| = 0$

to $|A \times Z| = 0$

D. można założyć, że A jest ograniczony (bo A jest przelicz. sumą zb. ograniczonych): $A \subset Q$ przedział

ε = dowolne; pokryjmy $Z \subset \bigcup P_i$,

$\sum |P_i| < \varepsilon$. wtedy

$$A \times Z \subset \bigcup (Q \times P_i),$$

$$|Q \times P_i| = |Q| \cdot |P_i| \Rightarrow$$

$$\sum |Q \times P_i| = |Q| \sum |P_i| \leq |Q| \varepsilon.$$

2) $Z \subset \mathbb{R}^n$, $|Z| = 0$, $Z \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ lipschitzowskie

$$\Rightarrow |f(Z)| = 0.$$

⚠ nie zawsze prawda dla f hölderowskich.

D. Można założyć, że f jest określone na $\mathbb{R}^n$ (Kirszbraun: każde przekszt. Lipschitzowskie określone na podzbiorze $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$ można rozszerzyć do przekszt. Lipsch. na $\mathbb{R}^n$, bez zmiany stałej Lipschitza; ważne, że w $\mathbb{R}^m$ używa się

(9)

normy zadanej przez iloczyn skalarny).

~~Ę~~ ε - dowolne; $Z \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i| < \varepsilon$;

kurcząc P_i i nieco ~~ką~~ je powiększając, można przyjąć, że wszystkie P_i mają wszystkie boki równe; zatem ~~[illegible]~~ $(\operatorname{diam} P_i)^n \leq C\, |P_i|$

C - zależy tylko od n.

Niech L = stała Lipschitza dla f; wtedy

$$\operatorname{diam}(f(P_i)) \leq L \operatorname{diam} P_i$$

$\Rightarrow$ $f(P_i)$ jest zawarta w kostce Q_i (= przedział o wszystkich bokach równych) o ~~[illegible]~~ średnicy $\leq C' \operatorname{diam} P_i$

zależne tylko od n

Zatem

$$\cancel{[illegible]}\ |f(P_i)| \leq C'^n C^n\ |P_i|,$$

$$|f(Z)| \leq \sum C'^n C^n |P_i| < (CC')^n \varepsilon.$$

<u>Wniosek</u> $\underset{\text{mierzalny}}{A} \subset \underset{\text{otwarty w } \mathbb{R}^n}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$

f - lokalnie Lipsch.

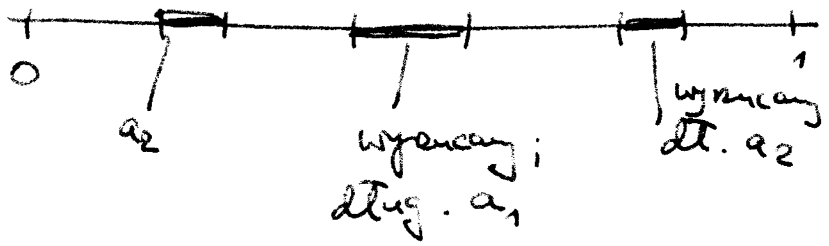
(np. ~~[illegible]~~ C^1)

Wtedy $f(A)$ jest mierzalny.

D. $A = S \cup Z$, $S \in F_\sigma$, $|Z| = 0$.

S można przedstawić jako sumę przelicz. liczby zbiorów zwartych, więc $f(S) \in F_\sigma$; $|f(Z)| = 0$, więc $f(A) = f(S) \cup f(Z)$ jest mierzalny.

Przykład Zbiory typu Cantora



itd

to, co zostanie $=$ zb. typu Cantora $C_{\underline{a}}$ (domknięty)

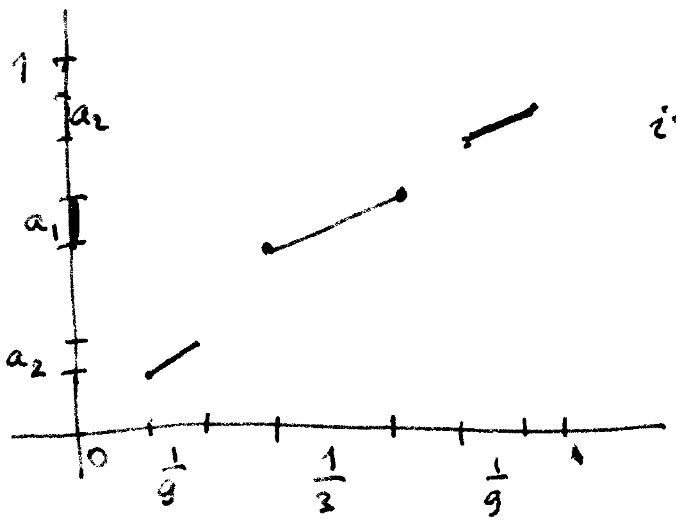
Zatem
$$|C_{\underline{a}}| = 1 - \sum_{1}^{\infty} 2^{n-1} a_n$$

Jeśli $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3^2}$, $\dots$, to uzyskamy zb. Cantora $\mathcal{C}$ i jego miara $= 1 - \sum 2^{n-1} \frac{1}{3^n} =$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 0.$$

Ale jeśli tylko $\sum 2^{n-1} a_n < 1$, to $|C_{\underline{a}}| > 0$.

Dla każdego $\underline{a}$ istnieje homeom. $[0,1] \xrightarrow{h} [0,1]$, $h(\mathcal{C}) = C_{\underline{a}}$:



itd.

Niech $|C_{\underline{a}}| > 0$. Wtedy $C_{\underline{a}}$ zawiera podzbiór niemierzalny K. Ale $h^{-1}(K) \subset \mathcal{C}$
$$h^{-1}(K) = K_0$$
więc K_0 jest miary 0, więc jest mierzalny.

$K = h(K_0)$, czyli obraz zbioru mierzalnego przy homeom. nie musi być mierzalny.

Analiza II*, 10 I '12

X = przestrzeń lokalnie zwarta, Hausdorffa, σ-zwarta
(tj. suma przelicz. wielu zb. zw.)

<u>Generowanie regularnych miar borelowskich przez zawartości:</u>

<u>zawartość</u> : funkcja λ, określona na rodzinie zwartych, spełniająca nast. warunki:

1° $0 \leq \lambda(C) < \infty \quad \forall C$

2° monotoniczność :

$$\underset{\text{zwarte}}{C_1 \subset C_2} \Rightarrow \lambda(C_1) \leq \lambda(C_2)$$

3° podaddytywność :

$$\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$$

3° addytywność :

$$\lambda(C_1 \sqcup C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2).$$

(stąd wynika, że $\lambda(\emptyset) = 0$).

Dla zbiorów <u>otwartych</u> określamy

$$\lambda_w(U) = \sup\{\lambda(C) : \underset{\text{zwarty}}{C \subset U}\}.$$

<u>Stw</u> λ_w ma nast. własności :

1° $\lambda_w(\emptyset) = 0$

2° jest monotoniczne

3° przeliczalnie podaddytywna

4° przeliczalnie addytywna.

$\textcircled{2}$

D. 1° 👁👁 , 2° – też

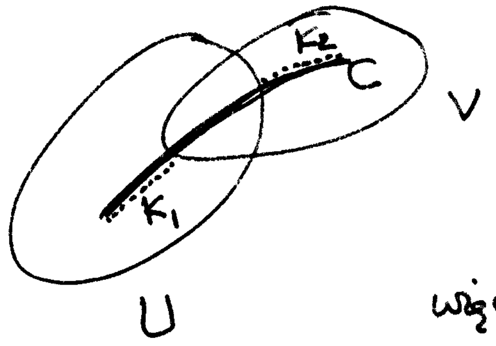
3° Najpierw skończona podaddytywność, czyli:

$$\cancel{U \subset V \Rightarrow \lambda_w(U)}$$

$$\lambda_w(U \cup V) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V).$$

Niech $C \subset U \cup V$. Wtedy $\exists\, C_1 \subset U,\ C_2 \subset V$

$$C = C_1 \cup C_2$$



[$C \setminus V = K_1$, $C \setminus U = K_2$ są zwarte, rozłączne,

więc $\exists$ otwarte rozłączne Ω_1, Ω_2,

$$K_1 \subset \Omega_1 \quad , \quad K_2 \subset \Omega_2 .$$

Przyjmujemy

$$C_1 = C \setminus \Omega_1, \quad C_2 = C \setminus \Omega_2 \ ].$$

Zatem

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_w(U \cup V) = \sup_C \lambda(C) \leq \lambda_w(U) + \lambda_w(V).$$

Stąd (indukcja) $\forall n$

$$\lambda_w\Big(\bigcup_{i \leq n} U_i\Big) \leq \sum_{i \leq n} \lambda_w(U_i).$$

Teraz przeliczalna podaddytywność:

Niech $C \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$; wtedy (zwartość C)

$\exists n \quad C \subset \bigcup_{i \le n} U_i$, więc

$$\lambda(C) \le \cancel{\sum_{i\le n} \lambda_w(U_i)}\ \lambda_w\Big(\bigcup_{i \le n} U_i\Big) \le$$

$$\le \sum_{i \le n} \lambda_w(U_i) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_w(U_i)$$

i wystarczy wziąć $\sup\limits_{C}$.

4° Najpierw skończona addytywność. Niech $U \cap V = \emptyset$,

$C_1 \subset U$, $C_2 \subset V$ zwarte $\Rightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ $\Rightarrow$

$$\lambda_w(U \cup V) \ge \lambda(C_1 \cup C_2) = \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$$

Biorąc $\sup\limits_{C_1, C_2}$: $\quad \lambda_w(U) + \lambda_w(V) \le \lambda_w(U \cup V)$

– nierówność przeciwna wynika z podaddytywności.

Przeliczalna addytywność : U_i – parami rozłączne.

$\forall n$

$$\lambda_w\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i\Big) \ge \lambda_w\Big(\bigcup_{i \le n} U_i\Big) = \sum_{i \le n} \lambda_w(U_i)$$

po przejściu granicznym przy $n \to \infty$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_w(U_i) \le \lambda_w\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U\Big).$$

Dla dowolnego $A \subset X$ określamy

$$\mu_z(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ \text{otw}}} \{\lambda_w(U)\}.$$

<u>Stw</u>. ~~A~~ μ_z jest miarą zewnętrzną.

D. $\mu_z(\emptyset)=0$ ☉☉, ~~monotoniczność~~ – też.

Niech A_i będą dowolne; $\varepsilon > 0$. $\underset{\text{otw}}{\exists U_i} \supset A_i$

$$\mu_z(A_i) > \lambda_w(U_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\mu_z\left(\bigcup A_i\right) \le \lambda_w\left(\bigcup U_i\right) \le \sum \lambda_w(U_i) <$$

$$< \sum \mu_z(A_i) + \varepsilon.$$

<u>Stw</u> Miara indukowana ~~z~~ z μ_z via tw. Caratheodory'ego jest borelowska regularna, tzn. każdy zbiór borelowski jest mierzalny, a miara każdego zwartego jest skończona.

~~zwarte każdy~~

D. Ostatnia część jest oczywista (z lokalnej zwartości) bo każdy zwarty C ma otoczenie o zwartym domknięciu. Wystarczy więc wykazać, że każdy zwarty jest mierzalny.

<u>Lemat 1</u> 1) $\mu_z(U) = \lambda_w(U)$ $\forall U$ otwartego,

2) $\mu_z(\mathring{C}) \le \lambda(C) \le \mu_z(C)$ $\forall C$ zwartego

D. 1) $\mu_z(U) \le \lambda_w(U)$ ☉☉

naodwrót: niech $U \subset V$; $\lambda_w(V) \ge \lambda_w(U)$

więc $\inf_{V \supset U} \lambda_w(V) \ge \lambda_w(U)$.

2) niech $\underset{\text{zw.}}{C} \subset \underset{\text{otw}}{U}$; wtedy

$$\lambda(C) \leq \lambda_w(U)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(C) \leq \inf_{U \supset C} \lambda_w(U) = \mu_z(C)$$

Jeśli za U w 1) przyjmiemy $\mathring{C}$, to

$$\mu_z(\mathring{C}) = \lambda_w(\mathring{C}) \underset{\text{przypomnienie}}{=} \cancel{\sup_{C_1} \lambda(C_1)} \sup_{C_1 \subset \mathring{C}} \lambda(C_1)$$

$$\leq \lambda(C).$$

<u>Lemat 2</u> Zbiór $A \subset X$ jest mierzalny $\Leftrightarrow$ $\forall U$ otw.

$$\mu_z(U) \geq \mu_z(U \cap A) + \mu_z(U \setminus A).$$

(czyli warunek Carathéodory'ego ma być spełniony tylko dla zb. otwartych)

D. $\Rightarrow$ oczywiste

$\Leftarrow$ Weźmy dowolny Z : $Z \subset U$.

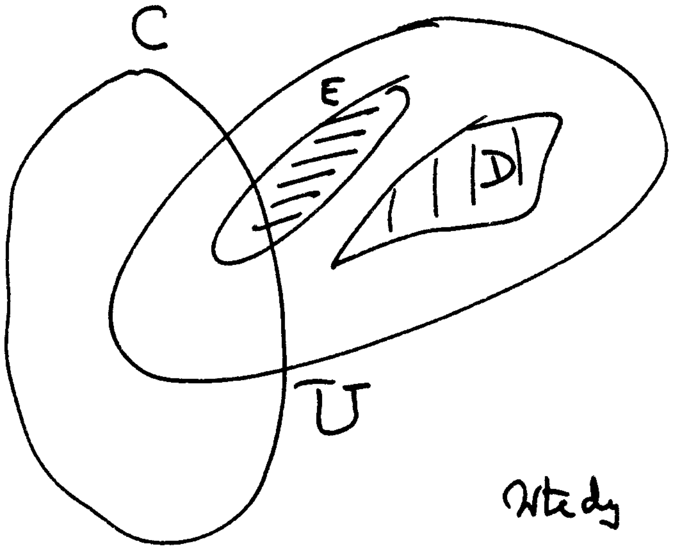
$$\lambda_w(U) \underset{\text{Lemat 1}}{=} \mu_z(U) \underset{\substack{\text{zakł., że} \\ \text{jest spełn.} \\ \text{ta nierówność} \\ \text{(jak w tezie} \\ \text{lematu)}}}{\geq} \mu_z(U \cap A) + \mu_z(U \setminus A)$$

$$\geq \mu_z(Z \cap A) + \mu_z(Z \setminus A)$$

Biorąc $\inf_{U \supset Z}$ otrzymamy war. Caratheodory'ego dla Z.

Ciąg dalszy dowodu stw.: trzeba wykazać, że $\forall U$

$$\mu_Z(U) \geq \mu_Z(U \cap C) + \mu_Z(U \setminus C).$$



Weźmy dowolny zwarty $D \subset U \setminus C$ i niech $E \subset U \setminus D$ zwarty.

Wtedy

$$\mu_Z(U) = \lambda_w(U) \geq \lambda(E \sqcup D) =$$

$$= \lambda(E) + \lambda(D)$$

$$\Rightarrow \mu_Z(U) \geq \lambda(D) + \sup_{E \subset U \setminus D} \lambda(E) =$$

$$= \lambda(D) + \lambda_w(U \setminus D) = \lambda(D) + \mu_Z(U \setminus D) \geq$$

$$\geq \lambda(D) + \mu_Z(U \cap C).$$

$$\Rightarrow \mu_Z(U) \geq \sup_D \lambda(D) + \mu_Z(U \cap C) =$$

$$= \underbrace{\lambda_w(U \setminus C)}_{= \mu_Z(U \setminus C)} + \mu_Z(U \cap C)$$

cbdo.

Def λ jest regularna, jeśli $\forall$ zwartego C
$$\lambda(C) = \inf_{\substack{D:\ C \subset \mathring{D} \\ \text{zw.}}} \lambda(D).$$

Stw $\mu(C) = \lambda(C)$ dla C zwartych, o ile λ jest regularna (przyp.: μ = miara powstała z μ_z).

D. jeśli $\varepsilon > 0$ jest dowolne, to $\exists \underset{\text{zw.}}{D}$, $C \subset \mathring{D}$
$$\lambda(C) \geq \lambda(D) - \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \lambda(C) \leq \mu_z(C) \leq \mu_z(\mathring{D}) = \lambda_w(\mathring{D}) \leq$$
$$\leq \lambda(D) \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

⚠ tatwo się dowodzi, że jeśli μ jest regularną miarą borelowską, ~~to~~ to $\lambda(C) \stackrel{df}{=} \mu(C)$ jest regularną zawartością, i μ pokrywa się z miarą uzyskaną z λ jak poprzednio.

⚠ Niech $X \xrightarrow{f} X$ będzie homeomorfizmem. Jeśli λ jest niezmiennicza względem f (tzn $\lambda(f(C)) = \lambda(C)$ $\forall C$ zwartego), to μ również jest niezmiennicza.

Miara Haara G = grupa topologiczna lokalnie zwarta i (dla uproszczenia) σ-zwarta. Działanie grupowe $x, y \longmapsto xy^{-1}$ jest (z definicji) ciągłe.

Niech $L_x : G \to G$, $L_x(y) = xy$. Analogicznie $R_x(y) = yx$. Miara nazywa się lewostronnie (prawostr.) niezmiennicza jeśli $\forall A$ mierzalnego $L_x A \overset{df}{=} xA$ jest mierzalny (Ax jest mierzalny) i $\mu(L_x A) = \mu(A)$ ($\mu(R_x A) = \mu(A)$)

Tw Na każdej grupie jak wyżej istnieje niezerowa lewostronna regularna miara Haara borelowska (tj wszystkie zb. borelowskie są mierzalne)

1) Taka miara jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej multyplikatywnej (dowód będzie później)

2) Analogicznie istnieje prawostronnie niezmiennicza miara Haara; miara prawostr. niezmiennicza nie zawsze jest lewostronnie niezmiennicza, ale tak jest dla grup przemiennych (oczywiste) i zwartych (Łatwe).

3) Dla $(\mathbb{R}^n, +)$ miarą Haara jest miara Lebesgue'a

4) Trywialny przykład miary niezmienniczej (dla dowolnej grupy): $\mu(A) = \begin{cases} \overline{\overline{A}} & \text{gdy } A \text{ skończ.} \\ \infty & \text{'' } A \text{ nieskończ.} \end{cases}$
Oczywiście gdy G jest skończona, to każda miara niezmiennicza jest proporcjonalna do tej.

5) Miara Haara spełnia warunek: $\mu(U) > 0$ dla dowolnego $U \neq \emptyset$ otwartego. Bo gdyby $\mu(U) = 0$ dla jakiegoś U, to - przesuwając U - można by

dodatkowo założyć, że U jest otoczeniem e. Jeśli C jest zwarty, to istnieje skończone pokrycie C zbiorami postaci $x_i U$; zatem $\mu(C)=0$ i z σ-przeliczalności $\mu(G)=0$.

Dowód tw. Dla dowolnego otoczenia $U \ni e$ i dowolnego zwartego C niech

$$C:U = \min\{n : \exists\, x_1,\dots,x_n \in G \quad C \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U\}.$$

Wybierzmy dowolnie otoczenie $A \ni e$, $\bar{A}$ zwarte, i niech

$$\lambda_U(C) = \frac{C:U}{A:U}$$ ← czynnik normalizacyjny.

Oczywiste własności funkcji λ_U:

$0 \le \lambda_U < \infty$, nawet $\forall C \quad \lambda_U(C) \le C:A$,
monotoniczność
podaddytywność
lewostr. niezmienniczość

bo $C:U \le (C:A)\cdot(A:U)$

Zamiast addytywności jest słabsza własność:

jeśli $C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1} = \emptyset$, to

$$\lambda_U(C_1 \cup C_2) = \lambda_U(C_1) + \lambda_U(C_2)$$

[$C_1 U^{-1} = \{xu^{-1} : x \in C_1,\ u \in U\}$ = otoczenie C_1; więc założenie jest dużo mocniejsze niż rozłączność zbiorów C_1, C_2. Jeśli na G jest metryka, to to założenie jest równoważne warunkowi, że zbiory C_1, C_2 są w dodatniej odległości].

Bo $\forall x \quad xU \cap C_1 \neq \emptyset \Rightarrow xU \cap C_2 = 0$

[gdyby $xU \cap C_1 \neq \emptyset$ & $xU \cap C_2 \neq \emptyset$, to

dla pewnych c_1, c_2 $\quad (c_i \in C_i)$

$x u_1 = c_1$ & $x u_2 = c_2$

$u_1 \in U \qquad u_2 \in U$

$\Rightarrow x = c_1 u_1^{-1} = c_2 u_2^{-1}$

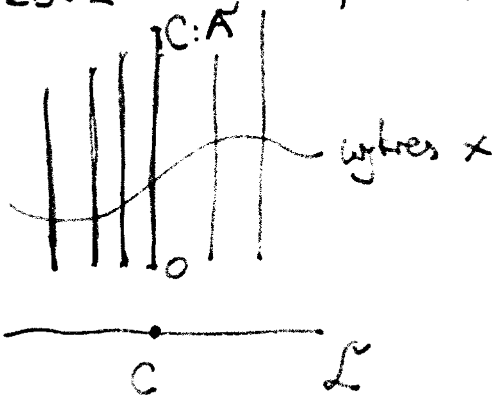
$\Rightarrow x \in C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1}$].

Zatem każde pokrycie $C_1 \cup C_2$ zbiorami postaci $x_i U$ składa się z dwóch rozłącznych pokryć C_1 i C_2 takimi zbiorami.

Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich otoczeń e i tworzymy produkt

$$\mathfrak{X} = \prod_{C = \text{zwarte}} [0, C:A]$$

z topologią Tichonowa. $\mathfrak{X}$ jest zwarta. Punkty $\mathfrak{X}$ są to funkcje x, określone na rodzinie $\mathcal{L}$ wszystkich zb. zwartych, $x(C) \in [0, C:A] \subset \mathbb{R}$



Baza otoczeń $x \in \mathfrak{X}$: wyznaczona przez skończ. liczbę $C_i \in \mathcal{L}$, $i=1,\dots,N$ i liczbę ε:

$$\underbrace{\mathcal{U}_{C_1 \dots C_N, \varepsilon, x}}_{\text{otoczenie } x} = \{ y \in \mathfrak{X} : |y(C_i) - x(C_i)| < \varepsilon \ \forall i \}.$$

W szczególności odwzorowanie "ewaluacji w $C \in \mathcal{L}$"

$$ev_C : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x(C)$$

jest ciągłe (bo na $\mathcal{U}_{C,\varepsilon,x}$ $|ev_C(y) - ev_C(x)| < \varepsilon$).

Dla dowolnego $U \in \mathfrak{N}$ $\lambda_U \in \mathcal{X}$; niech

$$\Lambda(U) = \{\lambda_V : V \subset U\}.$$

Rodzina tych zbiorów ma własność:

|| każde skończone przecięcie $\bigcap_{i\leq k} \Lambda(U_i)$ jest niepuste:

$$\text{bo } \bigcap \Lambda(U_i) \supset \Lambda(\overbrace{\bigcap U_i}^{\in \mathfrak{N}}) \neq \emptyset$$

Tym bardziej domknięcia $\overline{\Lambda(U)}$ mają tę samą własność. Ze zwartości $\mathcal{X}$ wynika, że $\bigcap_{U \in \mathfrak{N}} \overline{\Lambda(U)} \neq \emptyset$.

Niech $\lambda \in \bigcap_{U \in \mathfrak{N}} \overline{\Lambda(U)}$; wykażemy, że jest to niezerowa niezmiennicza (lewostr.) zawartość, co zakończy dowód.

– $\forall_C$ $\lambda(C) \in [0, C:A]$ – bo wszystkie elementy każdego $\Lambda(U)$ mają tę własność

– monotoniczność λ: niech $C_1 \subset C_2$. Z ciągłości ev_{C_1} i ev_{C_2}

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{X} : ev_{C_1}(x) \leq ev_{C_2}(x)\}$$

jest domknięty, oraz każda $\lambda_U \in \mathcal{F}$; zatem $\lambda \in \mathcal{F}$.

– podaddytywność : $\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$

– dowód identyczny

– addytywność : Niech $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1, C_2 \in \mathcal{L}$. Wtedy dla dostatecznie małego $U \in \mathcal{N}$

$$C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1} = \emptyset,$$

więc

$$\lambda_U(C_1 \cup C_2) = \lambda_U(C_1) + \lambda_U(C_2)$$

i tak samo jest dla wszystkich $V \subset U$.

Jeśli teraz $\mathcal{F} = \{x : ev_{C_1 \cup C_2}(x) = ev_{C_1}(x) + ev_{C_2}(x)\}$

to $\mathcal{F}$ jest domknięty i $\Lambda(U) \subset \mathcal{F}$. Zatem $\lambda \in \mathcal{F}$.

– $\lambda(A) = 1$ (więc $\lambda \neq 0$). Bo ~~to~~ $\lambda_U(A) = 1$ $\forall U$, więc każde $\Lambda(U) \subset \underbrace{\{x : ev_A(x) = 1\}}_{\text{domknięty}}$

$$\Rightarrow \quad \underset{\lambda(A)}{\underset{\shortparallel}{ev_A(\lambda)}} = 1.$$

⚠ Istnieje dowód istnienia miary Haara nie wykorzystujący pewnika wyboru dla nieprzeliczalnych rodzin zbiorów [Hewitt-Ross: Abstract Harmonic Analysis].

Analiza II* 13 I '12

Funkcje mierzalne

$(X, \mathfrak{M})$ — X przestrzeń, $\mathfrak{M}$ σ-ciało podzbiorów X

$X \xrightarrow{f} Y$ przestrz. topologiczna

jest mierzalna $\overset{}{\underset{df}{\iff}}$ $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$ $\forall U \subset Y$ otw.

$\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ $\forall B$ borelowskiego w Y

- Obcięcie funkcji mierzalnej do mierzalnego podzbioru jest funkcją mierzalną;
- jeśli $\bigcup A_i \xrightarrow{f} Y$, $f|_{A_i}$ jest mierzalna $\forall i$, $A_i \in \mathfrak{M}$

to f jest mierzalna.
- jeśli $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f mierzalne, g ciągłe, to $g \circ f$ jest mierzalne (Y, Z = przestrz. topol.)

Najważniejszy przypadek: $Y = \overline{\mathbb{R}}$.

- f jest ~~borelo~~ mierzalna $\iff f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathfrak{M}$ $\forall a$

[i analogicznie dla półprostych postaci $[-\infty, a]$, $(a, \infty]$, $[a, \infty]$].

D. $\Rightarrow$ ⊙ ⊙

$\Leftarrow$ ponieważ każdy zb. otwarty w $\overline{\mathbb{R}}$ jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych (a,b) i (a,∞), więc wystarczy wykazać, że $f^{-1}((a,b)) \in \mathfrak{M}$, $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}$

i $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$

i $f^{-1}(\infty) \in \mathfrak{M}$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathfrak{M}$

$$(a,\infty) = \bigcap_n \left[a-\tfrac{1}{n},\infty\right) = \bigcap_n \left(\overline{\mathbb{R}} \setminus \left(-\infty, a-\tfrac{1}{n}\right)\right)$$

2

$(a,b) = (-\infty, b) \cap (a,\infty)$, itd

- $X \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^m$ jest mierzalne $\Leftrightarrow$ wszystkie składowe f są mierzalne

  (wystarczy wykazać mierzalność przeciwobrazu każdego przedziału, którego wierzchołki mają współrzędne wymierne)

- suma i iloczyn funkcji mierzalnych (tam, gdzie określone) jest f. mierzalną.

  [$f+g$ jest nieokreślona tam, gdzie $f=\infty$ i $g=-\infty$ albo na odwrót; jest to zbiór mierzalny; po wyrzuceniu go można skorzystać z ciągłości dodawania

  $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \setminus$ (zb. punktów nieokreśloności) $\to \overline{\mathbb{R}}$.

  Podobnie dla mnożenia; albo można łatwo udowodnić, że dla f mierzalnej f^2 jest mierzalna (ciągłość $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto x^2$) i skorzystać z tego, że $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$]

Kresy (górny i dolny) w $\overline{\mathbb{R}}$ - oczywista definicja; każdy zbiór niepusty ma sup i inf.

Jeśli $f_i : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($i \in I$ - dowolny), to określone jest więc $\sup_i f_i(x) = F(x)$, i $\inf_i f_i(x) = G(x)$.

- jeśli I jest przeliczalny, $A \in \mathfrak{M}$, wszystkie f_i są mierzalne, to $\sup_i f_i$, $\inf_i f_i$ są mierzalne

[bo niech $F = \sup_i f_i$; dla dowolnej $a \in \mathbb{R}$

$$\{x : F(x) \leq a\} = \{x : \forall_i \; f_i(x) \leq a\}$$
$$= \bigcap_i \{x : f_i(x) \leq a\} \quad].$$

- jeśli $f_n : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne ($A \in \mathfrak{M}$), $f_n \longrightarrow f$ punktowo, to f jest mierzalna.

[bo dla ciągu $a_n \longrightarrow g$ $\quad a_n, g \in \overline{\mathbb{R}}$ i dowolnej c:

$$g < c \iff \forall k \; \exists N \; \forall n > N \quad a_n < c + \frac{1}{k};$$

zatem, dla dowolnej c:

$$\{x : f(x) < c\} \overset{=}{\Leftarrow} \{x : \forall k \; \exists N \; \forall n > N \quad f_n(x) < c + \frac{1}{k}\} =$$
$$= \bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n > N} \underbrace{\{x : f_n(x) < c + \frac{1}{k}\}}_{\in \mathfrak{M}}$$

(4)

<u>Funkcje proste</u>: funkcje o wartościach skończonych, nieujemnych, przyjmujące tylko skończenie wiele wartości. Każda taka funkcja jest postaci $\sum c_j \chi_{A_j}$ (χ_A = f. charakterystyczna A), $c_j \geq 0$, skończone; takie przedstawienie nie jest jednoznaczne, ale jeśli dodać założenie, że wszystkie c_j są różne, dodatnie, i A_j są rozłączne, to przedstawienie jest jednoznaczne.

– jeśli $A \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^+$, to $\exists$ ciąg funkcji prostych $A \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^+$, niemalejący (tj $\forall x$ $f_n(x) \nearrow$), zbieżny punktowo do f.
Jeśli f jest ograniczona, to dodatkowo można uzyskać, że $\cancel{|f-f_n|}\ 0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2^n}$. Jeśli f jest mierzalna, to f_n można wybrać mierzalne.

D.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{gdy } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \\ & k \leq n \cdot 2^n \\ n & \text{gdy } f(x) \geq n \end{cases}$$

<u>Całka z funkcji nieujemnej</u> $A \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^+$.

Rozbicie $\varsigma = \{E_1, \ldots, E_m\}$ zbioru A (niekoniecznie