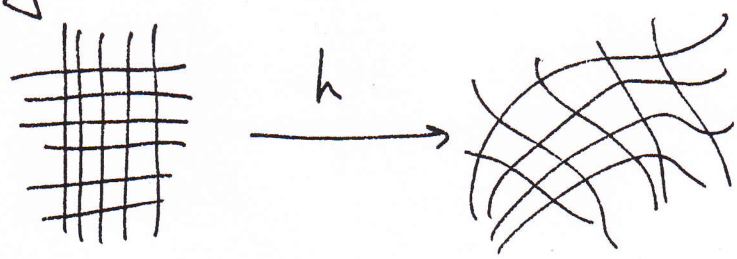
Analiza II*, 8 XI '11

Dyfeomorfizmy: $\mathbb{R}^n \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{h} V \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^n$

homeom., $h \in C^1$, $h^{-1} \in C^1$ $\overset{\text{TFO}}{\iff}$

homeom, $h \in C^1$, $J_h \neq 0$

⚠ homeom. można traktować jak "współrzędne krzywoliniowe":



czyli współrzędne $h^{-1}(x)$ traktujemy jak „współrzędne krzywoliniowe" x.

Najciekawsze własności przekształceń to takie, które są niezmiennicze względem dyfeomorfizmów.

Tw ("o rzędzie"): Załóżmy, że

$$x_0 \in \underset{x_1,\dots,x_n}{\overset{\mathbb{R}^n}{\cup}\!\!\!\!\!\quad\bar{U}} \xrightarrow{f} \underset{y_1 - y_m}{\mathbb{R}^m} \ni y_0 = f(x_0),\ f \in C^1,$$

w otoczeniu x_0 f' ma stały rząd r. Wtedy, w otoczeniach x_0 i y_0 istnieją takie dyfeomorfizmy h_1, h_2, że

$$h_2 \circ f \circ h_1$$

jest postaci $(u_1, \dots, u_n) \longmapsto (u_1, \dots, u_r, 0, \dots 0)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n_x \supset U & \xrightarrow{\ f\ } & V \subset \mathbb{R}^m_y \\ h_1 \uparrow & & \downarrow h_2 \\ \mathbb{R}^n_u \supset U_1 & \xrightarrow[h_2 \circ f \circ h_1]{} & V_1 \subset \mathbb{R}^m_v \end{array}.$$

⚠ Najważniejszy jest przypadek maksymalnej wartości r, czyli $r = \min(n, m)$. Wtedy wystarczy założyć że $\operatorname{rk} f'(x_0) = r$, i postać $h_2 \circ f \circ h_1$ jest

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{gdy } n \le m$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{gdy } n \ge m.$$

D. Po zmianie numeracji zmiennych można założyć, że $\dfrac{\partial(f_1, \dots f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}(x_0) \neq 0$. Niech $x' = (x_1, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots x_n)$, $y' = (y_1, \dots y_r)$, $\tilde{y} = (y_{r+1}, \dots y_m)$, $g(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$. Z TFU układ równań

$$g(x', x'') = y'$$

jest rozwiązalny względem x':

$$x' = \varphi(y', x'')$$

Niech $(u', u'') \xmapsto{H} (\varphi(u', u''), u'')$ – dyfeom.
Wtedy

$$g \circ H(u', u'') = g(\varphi(u', u''), u'') = u'.$$

Niech $\bar f = f \circ H$; zatem

$$\bar f' = \begin{array}{cc} & \quad r \\ r & \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline ? & \end{array}\right] \end{array}$$

tu są $\dfrac{\partial \bar f_\mu}{\partial u_\nu}$

Ponieważ $\forall u$

$$\operatorname{rk} \bar f' = r, \text{ więc}$$

$$\frac{\partial \bar f_\mu}{\partial u_\nu} \equiv 0$$

czyli $\bar f_\mu$ nie zależą od u''. Zatem

$$\bar f_\mu(u) = \psi_\mu(u') = \psi_\mu(\bar f_1(u), \dots \bar f_r(u)).$$

⚠ wracając teraz (via H^{-1}) do zmiennych x uzyskujemy, że f_μ $(\mu > r)$ są funkcjami od $f_1, \dots, f_r$:

$$f_\mu(x) = \psi_\mu(f_1(x), \dots, f_r(x)).$$

Niech $h_1 = H$.
Teraz dyfeomorfizm w przestrzeni $\mathbb{R}^m_y$:

$$(y', \tilde y) \xmapsto{h_2} (y', \tilde y - \psi_\mu(y'))$$

Wtedy

$$h_2 \circ \bar f(u) = (u', 0).$$