Analiza II*, 29.XI.'11.

TFO & TFU dla funkcji klasy C^2.

Jeśli $f \in C^2$, $J_f(x_0) \neq 0$, to $f^{-1} \in C^2$ (TFO);

jeśli $F \in C^2$, $F = F(x,y)$, $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)(x_0,y_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0) = 0$, to rozwiązanie $\varphi(x)$ równania $F(x,y) = 0$ jest klasy C^2 (w otoczeniu x_0) (TFU).

D. Wystarczy dla TFO, bo TFU można uzyskać jako wniosek TFO. Niech $g = f^{-1} \in C^1$. Wtedy $g' = (f^{-1})' \circ g$; ponieważ $(f^{-1})'$ jest C^1 i $g \in C^1$, więc $g' \in C^1$, czyli $g \in C^2$.

⚠ 1) Niech $\mathbb{R}^n \supset U \ni x \longmapsto \underset{\text{odwracalne}}{A(x)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

(czyli $\forall x$ $A(x)$ można traktować jak macierz).

Obliczyć $(A^{-1})'$.

<u>Rozw.:</u>

$$A(x)\, A^{-1}(x) = I$$

$$\Rightarrow \quad A' A^{-1} + A(A^{-1})' = 0$$

$$(A^{-1})' = -A^{-1} A' A^{-1}.$$

Trzeba to rozumieć tak:

$$\partial_v(A^{-1}) = -A^{-1} \overbrace{\partial_v A}^{= A'(v)} A^{-1}, \quad \text{czyli:}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "{A,\ \partial_v A = A'(v)}"] & \mathbb{R}^m \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$, więc:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "A^{-1}"'] \arrow[rrr, bend right, "-\partial_v(A^{-1})"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\partial_v A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "A^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$.

2) Niech f spełnia zał. TFO; obliczyć g'', gdzie $g = f^{-1}$.

Rozw.:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_x \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n_y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$f = f(x)$
$g = g(y)$

$$g_i(f(x)) = x_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial g_i}{\partial y_p}\bigg|_{f(x)} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}\bigg|_x = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_q \partial y_p} \frac{\partial f_q}{\partial x_k} \frac{\partial f_p}{\partial x_j} + \underbrace{\sum \frac{\partial g_i}{\partial y_p} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}}_{\substack{\text{działaniem } g' \\ \text{na wektor} \\ f''(e_j,\, e_k)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad g''\big|_{y_0} = g'\big|_{y_0} \, f''\big|_{x_0}\left(g'\big|_{y_0},\ g'\big|_{y_0}\right),$$

czyli:

$$\begin{tikzcd} T_{x_0}\mathbb{R}^n_x \arrow[r, "f' = f'|_{x_0}"] & T_{y_0}\mathbb{R}^n_y \arrow[l, shift left=2, "g'|_{y_0} = g'"] \end{tikzcd}$$

Niech $v, w \in T_{y_0}\mathbb{R}^n_y$; weźmy takie $\xi, \eta \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$, że

$\cancel{v = \varphi'}$ $v = f'\xi$, $w = f'\eta$ (czyli $\xi = g'v$, $\eta = g'w$);

wtedy

$$g''(v,w) = g'\underbrace{f''(\xi,\eta)}_{\in T_{y_0}\mathbb{R}^n_y} = f'^{-1} f''(\xi,\eta).$$

3) Niech $F(x,y) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R})$ spełnia:

$F \in C^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$; obliczyć drugą pochodną funkcji $y = \varphi(x)$ określonej przez równanie $F(x,\varphi(x)) = 0$, w punkcie x_0.

Rozw.:

$\cancel{\varphi'(x) =}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

Ostatecznie

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{x_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x_i}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \qquad (4)$$

(wszystkie pochodne obliczone w (x_0, y_0)).

4) TFO i TFU, z powyższym uzupełnieniem, przenoszą się, z oczywistych względów, na przestrzenie Banacha.

<u>Indukowanie pól wektorowych i 1-form przez przekszt. klasy C^2.</u>

a) Niech $\underset{\text{otw}}{\mathbb{R}^n_x \supset U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n_y$ będzie dyfeom. klasy C^2, $v(x) = \sum v_i(x) e_i$ - polem wektorowym klasy C^1 na U (tzn. $v_i \in C^1$; e_i = baza (dowolna) $\mathbb{R}^n$).

Wtedy

$$(f'(v))(y) \overset{df}{=} f'\big|_{f^{-1}(y)}\left(v\big|_{f^{-1}(y)}\right)$$

jest klasy C^1 na $f(U)$.

Bo $f^{-1} \in C^2$ i

$$f'\big|_x (e_i) = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\, E_j$$

(gdzie E_j = baza $\mathbb{R}^n_y$, $f = \sum f_j E_j$), więc

$$f'(v) = \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\circ f^{-1}}_{C^1} \cdot \underbrace{v_i \circ f^{-1}}_{C^1}\, E_j .$$

b) Niech $\mathbb{R}^n_x \underset{\text{otw}}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y$, $f \in C^2$, ω = 1-forma klasy C^1 na $V \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^m_y$. Wtedy $f^*\omega$ jest klasy C^1 (na ~~U~~ $\cap f^{-1} V$).

Bo weźmy bazy $e_i \in \mathbb{R}^n_x$, $E_j \in \mathbb{R}^m_y$ i stowarzyszone z nimi współrzędne x_i, y_j odpowiednio. Wtedy

f : $y_j = f_j(x)$,

$$\omega|_y = \sum \omega_j(y)\, dy_j ,$$

$$f^*\omega|_x = \sum \omega_j(f(x))\, df_j =$$

$$= \sum_j \omega_j \circ f\, df_j = \sum_{j,i} \underbrace{\omega_j \circ f}_{\in C^1} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}_{\in C^1} dx_i .$$

<u>Podrozmaitości klasy C^2</u>: lokalnie <u>wykresy</u> przekształceń klasy C^2. Jeśli

$$\begin{tikzcd} & M^d \overset{C^2}{\subset} \mathbb{R}^n \\ U \arrow[ur, "F"] & V \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

dwie parametryzacje, to $G^{-1}F$ jest dyfeom. klasy C^2.

Stąd <u>wynika</u>, że można mówić o polach wektorowych i 1-formach klasy C^1 na M^d; powyższa uwaga o polach i formach indukowanych pozostaje w mocy.

Wzór Taylora rzędu 2

$x_0 \in U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

f – dwukrotnie różniczk. w x_0.
(i jednokrotnie w otoczeniu x_0).

Niech

$$T^2_{x_0} f\,(h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(h) + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,(h,h) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{1!} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, h_i + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j}_{\displaystyle \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)\, h_i^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}$$

we współrzędnych

Własności reszty

$$R(h) \stackrel{df}{=} f(x_0+h) - T^2_{x_0} f\,(h)$$

1) **Peano**:

$$\frac{R(h)}{|h|^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(tylko przy założeniu dwukrotnej różniczk. w x_0)

Dowód:

$R''(0) = 0$ i R jest różniczk. w otoczeniu 0

$$\Rightarrow \quad |R'(h)| \le \varepsilon |h| \quad \text{dla } |h| < \delta$$

Ze wzoru na szacowanie przyrostu

$$|R(h)| = |R(h) - R(0)| \le \varepsilon |h|^2, \; |h| < \delta.$$

Wniosek: Jeśli forma kwadratowa $h \mapsto f''|_{x_0}(h,h)$ (dla f o wartościach skalarnych) jest określona dodatnio (ujemnie) i $f'(x_0) = 0$, to f ma lok. min (max) w x_0. Jeśli jest nieokreśl., to nie ma ekstremum.

Dowód: $|f''|_{x_0}(h,h)| > c|h|^2$ dla pewnej $c > 0$, o ile ta forma jest określona (dodatnio lub ujemnie). $|R(h)| < \varepsilon |h|^2$. Dla form nieokreślonych tzn. zmieniających znak) – analogicznie.

2) Lagrange: f ma wartości skalarne, dwukrotnie różniczkowalna w U, odcinek $[x_0 x]$ łączący x_0 i x jest zawarty w U. Wtedy $\exists \xi \in [x_0 x]$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''|_{\xi}(x - x_0, x - x_0)$$

⚠ wygodnie jest ostatni składnik napisać w postaci

$$\frac{1}{2!} f''|_{x_0}(x - x_0, x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(f''|_{\xi}(x - x_0, x - x_0) - f''|_{x_0}(x - x_0, x - x_0)\right).$$

Dowód: niech $\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$; wtedy

$$\varphi'(t) = f'\big|_{x_0+t(x-x_0)}(x-x_0)$$

$$\varphi''(t) = f''\big|_{x_0+t(x-x_0)}(x-x_0,\, x-x_0)$$

i wystarczy zastosować wzór Taylora do φ''.

Wniosek: Niech, dla funkcji dwuliniowej B,

$$\|B\| = \sup_{|v|,|w|\le 1} |B(v,w)|;$$

wtedy, przy poprzednich założeniach,

$$|R(x-x_0)| \le \frac{1}{2}\sup_{\xi\in[x_0 x]} \|f''(\xi) - f''(x_0)\|\, |x-x_0|^2.$$

Dla funkcji o wartościach wektorowych (w przestrz. Banacha X) – pozostaje tylko oszacowanie reszty:

$$\| R(h) | \le \frac{1}{2} \sup_{\xi} \|f''(\xi) - f''(x_0)\|\, |x-x_0|^2.$$

Dowód: bierzemy taki funkcjonał liniowy ciągły u na X, że

$$|u| = 1, \quad |u(R(h))| = |R(h)|$$

i korzystamy z przypadku skalarnego dla funkcji skalarnej $u\circ f$; definicja normy $\|f''(\xi) - f''(x_0)\|$ – jak we wniosku wyżej; $|B(v,w)|$ oznacza teraz normę w X.

3) Wzór całkowy na resztę. Załóżmy, że $f \in C^2$; ze wzoru całkowego na φ uzyskamy wzór

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'|_{x_0}(h) + \left(\int_0^1 (1-t) f''|_{x_0+th}(h,h)\, dt\right).$$

$$h = x - x_0$$

[Jak wprowadzić całkę z funkcji ciągłej o wartościach wektorowych, w przestrzeniach Banacha X: jeśli X jest sk. wymiarowa, to bierzemy bazę e_i; wtedy $f(t) = \sum f_i(t) e_i$ i $\int_0^1 f = \sum \int_0^1 f_i\, e_i$.

Jeśli X jest dowolna, to def. funkcję kawałkami liniową ciągłą:

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$$

dla pewnego podziału $\mathcal{P}: 0 = t_0 < \dots < t_N = 1$ i punktów $x_0, \dots, x_N \in X$:

$$\varphi(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} x_i + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} x_{i+1}$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Całkę z φ określamy oczywistym jawnym wzorem.

Jeśli teraz $[0,1] \xrightarrow{f} X$ jest ciągła, to $\exists$ $\varphi_\nu : [0,1] \to X$ ciągłych, kawałkami liniowych, zbieżnych jednost. do f; $\int_0^1 f \overset{df}{=} \lim \int_0^1 \varphi_\nu$.

To nie zależy od wyboru ciągu φ_ν. Łatwo dowodzi się wzorów na całkowanie przez części i podstawienie. W dowodzie wzoru całkowego na resztę wykorzystuje się tylko całk. przez części, więc ten dowód przechodzi na dowolne przestrzenie Banacha X].

Pochodne wyższych rzędów

$$f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$$

jeśli $X \xrightarrow{f} Y$

to $f^{(k)}\big|_{x_0}$ jest przekszt. k-liniowym ciągłym

$$X \times \cdots \times X \longrightarrow Y.$$

Jeśli $h_1, \dots, h_{k-1} \in X$, to

$$f^{(k)}(h_1, \dots, h_{k-1}, h_k) = \left(f^{(k-1)}(h_1, \dots, h_{k-1})\right)'(h_k)$$

różniczkowanie funkcji

$$X \ni x \longmapsto f^{(k-1)}\big|_x (h_1, \dots, h_{k-1}) \in Y$$

przy ustalonych $h_1, \dots, h_{k-1}$

Jeśli X jest skończ. wymiarowa, to f jest k razy różniczk. w x_0 $\iff$ $\forall h_1, \dots, h_{k-1}$ funkcja $x \longmapsto f^{(k-1)}\big|_x (h_1, \dots, h_{k-1})$ jest różniczk. w x_0 i zachodzi wtedy powyższy wzór.

Jeśli f jest k-krotnie różniczk. w x_0, to $f^{(k)}|_{x_0}$ jest symetryczna:

$$f^{(k)}|_{x_0}(h_1, \ldots, h_k) = f^{(k)}|_{x_0}(h_{i_1}, \ldots, h_{i_k}).$$

Dowód: indukcja względem k.

$$f^{(k-1)}_{x_0}(h_1, \ldots, h_{k-1}) = f^{(k-1)}|_{x_0}(h_1, \ldots \overset{\text{bez } i}{\downarrow} \ldots h_i)$$

Niech $g = f^{(k-2)}(h_1, \underset{\text{bez } i}{\ldots}, h_{k-2})$ i wtedy

$$g''|_{x_0}(h_i, h_k) = g''|_{x_0}(h_k, h_i)$$

Stąd

$$f^{(k)}|_{x_0}(h_1, \ldots, h_k) = f^{(k)}|_{x_0}(h_1, \underset{\text{bez } i}{\ldots} h_k, h_i).$$

Wystarczy skorzystać teraz z symetrii $f^{(k-1)}|_{x_0}$.

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}.$$

Wygodna notacja:

niech $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$;

wtedy

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$,

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. W tej notacji „tasiemiec"

Taylora wygląda tak:

$$T^m_{x_0} f\ (h) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\Big|_{x_0} h^\alpha .$$

Funkcje klasy C^m, wzór Taylora rzędu m, podrozmaitości klasy C^m - dokładnie jak dla $m=2$; TFO & TFU - też.
Funkcje klasy C^∞ - klasy C^m, $\forall m$.

Przykład: Niech $\mathbb{R}^{n+1}$ ma współrzędne $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C^\infty$ i $M: y = \varphi(x)$. Jeśli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ zeruje się na M, to $\exists\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$f(x,y) = (y - \varphi(x))\ g(x,y).$$

Bo $f(x,y) = f(x,y) - f(x, \varphi(x)) =$

$$= \int_{\varphi(x)}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt = \qquad t = \varphi(x) + u\,(y - \varphi(x))$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x) + u\,(y-\varphi(x)))\,du}_{g(x,y)\, \in C^\infty}\ (y - \varphi(x))$$

na mocy twierdzeń o różniczkowaniu całki względem parametru.

Przykład 2 $\quad f \in C^\infty$ na $\mathbb{R}^n$ (lub kuli wokół 0); wtedy np.

$$f(x) - f(0) = \sum x_i\, g_i(x) \qquad g_i \in C^\infty.$$

Bo $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \sum x_i \underbrace{\int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt}_{g_i(x) \in C^\infty}$.

Piszę $g_i(x) = \underbrace{g_i(0)}_{c_i} + \sum_j x_j\, h_{ij}(x)$, $h_{ij} \in C^\infty$,

uzyskamy $\quad f(x) = f(0) + \sum c_i x_i + \sum h_{ij}(x) x_i x_j$; z konieczności $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. To postępowanie można kontynuować.