Analiza $\overline{\text{II}}^*$, 28 X '11

<u>Całka</u> (z funkcji ciągłej 1 zmiennej o wartościach wektorowych);

X - ~~przestrzeń~~ Banacha

$I = [a,b]$

$I \xrightarrow{f} X$ ciągła $\Rightarrow$ jednostajnie ciągła

Funkcja pierwotna : $I \xrightarrow{F} X$

$F' = f$

<u>Tw</u> Każda f ciągła ma funkcję pierwotną określoną z dokładnością do stałej addytywnej (stała $\in X$).

D. Dla X skończ. wymiarowej można wziąć dowolną bazę $e_i \in X$, $f = \sum f_i e_i$ $(f_i : I \to \mathbb{R})$ i $F = \sum \int f_i \, e_i$.

Dla X dowolnej można tego dowieść aproksymując f funkcjami ciągłymi kawałkami liniowymi:

$$f_\nu \rightrightarrows f$$

f_ν jest postaci : ~~dla pewnego podziału~~

weźmy podział $\mathcal{P}_\nu = (t_0 = a < t_1 < \dots = b)$ na 2^ν równych części

i

$$f_\nu(t) = (1-\lambda) f(t_i) + \lambda f(t_{i+1})$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$t = (1-\lambda) t_i + \lambda t_{i+1}$$

(czyli: $\lambda = \dfrac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$, ②

$$f_\nu(t) = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} f(t_i) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} f(t_{i+1})$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1}]$)

Każda funkcja liniowa ma f. pierwotną:

jeśli $f(t) = A + Bt \quad (A, B \in X)$,

to $F(t) = \underset{X}{\underbrace{const}} + At + \frac{B}{2}t^2$,

więc wszystkie f_ν mają f. pierwotne F_ν (skleić poszczególne funkcje z zachowaniem ciągłości). Przez dobór stałej można uzyskać, że $\forall \nu \quad F_\nu(a) = 0$. Zatem $F_\nu(a)$ jest zbieżny & F_ν' jest zb. jednostajnie

$\Rightarrow \quad F_\nu \rightrightarrows F \quad \& \quad F' = \lim F_\nu' = \lim f_\nu = f$.

O.K.

Z ciągłości jednostajnej f wynika, że

$$\int_a^b f \overset{df}{=} F(b) - F(a)$$

jest granicą sum Riemanna

$$S_\nu = \sum f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$$

podział P_ν: $t_0 = a < t_1 < \dots < b$

$\xi_i \in [t_i, t_{i+1})$

i stąd wynika oszacowanie

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \sup_{t \in [a,b)} |f(t)| \, (b-a).$$

Dalsze własności (oczywiste)

- liniowość: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

$$\int_a^b \underset{\text{const}}{\lambda} f = \lambda \int_a^b f$$

- całk. przez podstawienie: jeśli $h : [a', b'] \to [a,b]$, $\hat{C}^1$

to $$\int_a^b f = \int_{a'}^{b'} f \circ h \cdot h'$$

- całk. przez części: $[a,b] \xrightarrow{f} X$, $[a,b] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ obie C^1

$$\int_a^b g f' = g f\Big|_a^b - \int_a^b g' f .$$

[dowód: $\int_a^b f = F h(b') - F h(a') =$

$$= \int_{a'}^{b'} (F \circ h)' = \int_{a'}^{b'} F' \circ h \cdot h' = \int_{a'} f \circ h \; h']$$

podobnie całk. przez części

Ciągłość i różniczkowanie całki z parametrem

$$A \times I \xrightarrow[\text{ciągła}]{f} X \qquad \underset{\text{otw}}{A \subset} M \text{ metryczna}$$

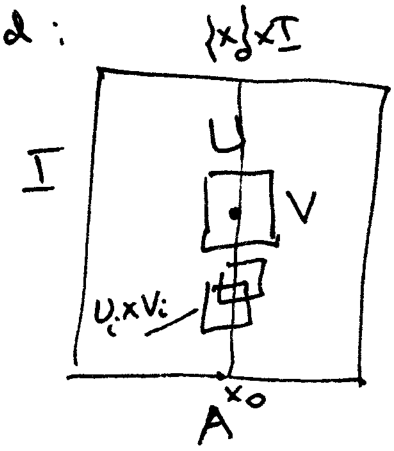
$$I = [a,b]$$

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt \qquad (x \in A)$$

$F : A \to X$

Stw F jest ciągła na A.

Dowód:



$x_0 \in A$ dowolne; ε dowolne

Jeśli $t \in I$, to $\exists$ otoczenie ~~(f z x₀)~~ (x_0, t) postaci

$$\underbrace{U}_{\text{otw w } A} \times \underbrace{V}_{\text{otw. w } I}$$

że ~~f l t~~

$$\| f(x,t') - f(x_0,t) \| < \varepsilon$$

dla $(x,t') \in U \times V$

Z pokrycia $\{x_0\} \times I$ zbiorami postaci

$$\underbrace{(U \times V)}_{\text{jak wyżej}} \cap (\{x_0\} \times I)$$

wybieramy pokrycie skończone $U_i \times V_i$. $U_0 \overset{df}{=} \bigcap U_i$ jest otoczeniem x_0 i łatwo widać, że $\forall t \in I$ $\forall x \in U_0$

$$\| f(x,t) - f(x_0,t) \| < \varepsilon .$$

Zatem
$$\| F(x) - F(x_0) \| \cancel{\le} \cancel{\int_a^b} = \left\| \int_a^b \big(f(x,t) - f(x_0,t) \big)\, dt \right\| \le \varepsilon (b-a).$$

Stw Załóżmy, że $\forall t$

$D_x f(t,x)$ pochodna wzgl. x, czyli pochodna odwzorowania $A \ni x \mapsto f(t,x)$ istnieje i jest ciągła. Wtedy

$$F'(x) = \int_a^b D_x f(t,x)\,dt$$

(reguła Leibniza)

Dowód: Jak poprzednio $\forall \varepsilon$, $x_0 \in A$ $\exists$ otoczenie $U_0 \ni x_0$ $\forall x \in U_0$, $t \in I$

$$|D_x f(t,x) - D_x f(t,x_0)| < \varepsilon.$$

Z tw. o wartości średniej (o przyrostach skończonych) $\exists$ otoczenie $U_1 \ni x_0$ $\forall t \in I$, $\forall x = x_0 + h \in U_1$

$$\| f(t,x_0+h) - f(t,x_0) - D_x f(t,x_0)h \| \leq \varepsilon |h|.$$

Zatem

$$\Big| F(x_0+h) - F(x_0) - \underbrace{\int_a^b D_x f(t,x_0)\cdot h\,dt}_{= \left(\int_a^b D_x f(t,x_0)\,dt\right)h} \Big| \leq \varepsilon |h| (b-a)$$

(wystarczy np. napisać sumy Riemanna).

OK.

Uwagi o rachunku różniczk. w przestrzeniach nieskończ. wymiaru.

1) przestrzenie Banacha:

— wszędzie trzeba zakładać, że pochodna jest operatorem liniowym ciągłym ($\Rightarrow$ ograniczonym:

$$|Ax| \leq \|A\| |x|$$

$\inf\{C : |Ax| \leq C|x| \ \forall x\}$)

— do tw. o ~~...~~ przyroście skończonym trzeba skorzystać z tw. Hahna-Banacha (trzeba wiedzieć, że $\forall z \neq 0 \ \exists u \in X^*$ funkcjonał liniowy ciągły $\|u\| \leq 1$, $u(z) = |z|$).

— „ciągłość pochodnych cząstkowych $\Longrightarrow$ różniczkowalność"

Ogólnie: jeśli f jest słabo różniczkowalna i f' jest ciągła, to f jest różniczkowalna.

2) przestrzenie Frécheta (z przeliczalną liczbą półnorm, dla uproszczenia):

$\| \ \|_i$ półnormy

zbiory (kule) $\{x : \|x\|_i < r\}$ przyjmujemy za podbazę otoczeń 0.

Jeśli $X \xrightarrow{A} Y$ liniowy (X, Y - jak wyżej), to A jest ciągły $\iff$

$$\forall i \quad \exists C_i, j \quad \forall x$$

$$\|Ax\|_i \leq C_i \|x\|_j$$

Najprzyjemniej jest uporządkować półnormy:

$$\| \ \|_1 \leq \| \ \|_2 \leq \dots ;$$

wtedy A jest ciągły $\iff$ $\forall i \ \exists C_i, \ j = j(i) \quad \forall x$

$$\|Ax\|_i \leq C_i \|x\|_{i+j}$$

"shift"

Pochodną łatwo określić. Niech np.

$$X = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$$

$$\|\varphi\|_i = \sup_{\substack{|t| \leq i \\ 0 \leq k \leq i}} |\varphi^{(k)}(t)| ,$$

$$f : X \longrightarrow X , \quad f(\varphi) = \varphi'^2 .$$

Wtedy pochodna kierunkowa

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi + th) - f(\varphi)}{t} = 2\varphi' h'$$

więc

$$f'_\varphi(h) = 2\varphi' h'$$

Można określić co to są przekształcenia C^1.

Ale nie uzyskuje się TFU.