Analiza II*, 25 XI '11

Druga pochodna złożenia : $\varphi = f \circ g$

(f, g - różniczk. dwukrotnie w $y_0 = g(x_0)$, x_0 - odpowiednio)

I. Na współrzędnych:

$$\mathbb{R}^n_x \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k_z$$
$$x_0 \longrightarrow y_0$$

$$\varphi_\ell(x) = f_\ell(g(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i}(x) = \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p}(g(x)) \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_\ell}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial y_q \partial y_p}(y_0) \frac{\partial g_q}{\partial x_j}(x_0) \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(x_0)$$
$$+ \sum_p \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p}(y_0) \frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Niech $v, w \in T_{x_0}\mathbb{R}^n_x$, $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$

Wtedy

$$\varphi''_\ell(w,v) = \sum \frac{\partial^2 f_\ell}{\partial y_q \partial y_p} \overbrace{\frac{\partial g_q}{\partial x_j} w_j}^{\text{współrzędne } g'(w)} \overbrace{\frac{\partial g_p}{\partial x_i} v_i}^{\text{wsp. } g'(v)} +$$

współrzędne $\varphi''|_{x_0}(w,v)$

$$+ \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y_p} \overbrace{\frac{\partial^2 g_p}{\partial x_j \partial x_i} w_j v_i}^{\text{wsp. } g''(w,v)}$$

więc

$$\varphi_\ell''(w,v) = f_\ell''(g'(w), g'(v)) + f_\ell'(g''(w,v));$$

ostatecznie

$$\varphi''(w,v) = f''(g'(w), g'(v)) + f'(g''(w,v))$$

albo

$$\underset{\text{w } x_0}{\varphi''} = \underset{\text{w } y_0}{f''}\,\underbrace{(g', g')}_{\text{w } x_0} + \underset{\text{w } y_0}{f'}\;\underset{\text{w } x_0}{g''}.$$

II. niezmienniczo:

$$\varphi' = f' \circ g \cdot g'$$

składanie przekształceń liniowych

$$\varphi''\big|_{x_0} = f''\big|_{y_0}\left(g'\big|_{x_0} \cdot g'\big|_{x_0}\right) + f'\big|_{y_0}\, g''\big|_{x_0}.$$

Jeszcze bardziej skomplikowany jest wzór na drugą pochodną złożenia

$$h = \psi f \varphi$$

to są często dyfeomorfizmy.

$$\mathbb{R}^n_u \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n_x \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m_v$$

dla uproszczenia te same wymiary

tu też

$\varphi: \quad x = x(u) \qquad$ (dokł.: $x_i = x_i(u)$, itd.)

$\psi: \quad v = v(y)$

$f: \quad y = y(x)$

Wtedy pisze się, w skrócie:

$$\frac{\partial h}{\partial u_i} = \frac{\partial v}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial u_i}$$

(wszystko w odpowiednich punktach)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_j \partial u_i} = \sum \frac{\partial^2 v}{\partial y_q \partial y_p} \frac{\partial f_q}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial u_j} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial u_i}$$

$$+ \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s \partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial u_j} \frac{\partial x_r}{\partial u_i} +$$

$$+ \sum \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial f_p}{\partial x_r} \frac{\partial^2 x_r}{\partial u_j \partial u_i} .$$

<u>Wniosek</u>: Druga pochodna złożenia jest funkcją pierwszych i drugich pochodnych składanych funkcji, wielomianową, ale nieliniową.

<u>Hesjan funkcji</u>. Szczególny przypadek poprzedniego rachunku:

niech $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Jak f'' zmienia się przy dyfeomorfiźmie:

niech ~~φ~~ $g = f \circ \varphi$

φ dyfeom. dwukrotnie różniczk. w x_0, $x_0 \xrightarrow{\varphi} x_0$

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0} = \sum \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}\right|_{x_0} \left.\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right|_{x_0} \left.\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_j}\right|_{x_0}$$

$$+ \sum \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x_0} \left.\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0}.$$

Jeśli więc $\underline{f'(x_0) = 0}$, to (wszystko w x_0)

$$g'' = f''(\varphi', \varphi')$$

– w poprzedniej terminologii

(czyli $g''(w,v) = f''(\varphi'(w), \varphi'(v))$).

<u>Def</u> Hessian f w punkcie krytycznym x_0 (punkt krytyczny: taki, w którym $f'(x_0) = 0$) jest to forma kwadratowa

$$v \longmapsto f''|_{x_0}(v,v)$$

(właściwie to samo co $f''|_{x_0}$, bo $f''|_{x_0}$, jako forma dwuliniowa symetryczna, jest jednoznacznie wyznaczona przez hessian).

Jeśli $V \xrightarrow{Q} \mathbb{R}$ jest formą kwadratową na przestr. wektorowej V, to każdy $A \in GL(V) = Aut(V)$ ~~działa na~~

określa Q_A = forma kwadratowa :

$$Q_A(v) = Q(Av)$$

Jeśli teraz Q^f = hessian f (w punkcie krytycznym x_0), to dla dowolnego dyfeom. φ, $\varphi(x_0)=x_0$

$$Q^{f\circ\varphi} = Q^f_{\varphi'|_{x_0}} .$$

$f\circ\varphi$ = obraz f przy działaniu dyfeomorfizmu φ;

Zatem hessian obrazu f przy działaniu dyfeom φ = obraz hessianu przy działaniu przekształcenia liniowego $\varphi'|_{x_0}$. Stąd uzyskuje się niezmienniki rel. równoważności funkcji :

$$f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 \iff \exists\varphi \quad f_2 = f_1\varphi$$

dyfeomorfizm zachowujący x_0.

Ograniczmy się do funkcji, dla których x_0 jest krytyczny.

$\mathrm{rk}\, Q^f$ = niezmiennik, a jeśli $\mathrm{rk}\, Q^f = n$, to sygnatura Q^f = niezmiennik.

Uogólnienie na wyższe wymiary

$$x_0 \in \mathbb{R}^n_x , \quad y_0 \in \mathbb{R}^m_y$$

Rozpatrujemy przekształcenie

$$x_0 \in U_f = U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y , \qquad f(x_0) = y_0 .$$

$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow$ $\exists$ dyfeomorfizmy klasy C^1

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x_0 \longrightarrow x_0$$
$$\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$y_0 \longrightarrow y_0$$

(określone w otoczeniach x_0, y_0 odpow.)

że $f_2 = \psi f_1 \varphi$.

$\operatorname{rk} f'(x_0)$ jest niezmiennikiem tej relacji (jedynym zależnym od pochodnych 1 rzędu).

To wynika stąd, że

$$(\psi f_1 \varphi)'\big|_{x_0} = \psi'\big|_{y_0} \, f_1'\big|_{x_0} \, \varphi'\big|_{x_0}.$$

$f_1'\big|_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y)$, $\varphi'\big|_{x_0} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n_x)$, $\psi'\big|_{y_0} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^m_y)$. Automorfizmy $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n_x)$, $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}^m_y)$ działają na $L(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y)$ przez składanie, więc wszystkie 1 pochodne przekształceń równoważnych f_1 powstają z $f_1'\big|_{x_0}$ przez składanie z automorfizmami.

Druga pochodna nie ma takich własności. Ale można ją zmodyfikować.

Niech $K = K_f = \ker f'\big|_{x_0}$, $C = C_f = \operatorname{coker} f'\big|_{x_0}$
$= \mathbb{R}^m_y / \operatorname{im} f'\big|_{x_0}$.

Wtedy jest kanoniczny rzut $\mathbb{R}^m_y \longrightarrow C$

i określone jest

$$K \hookrightarrow \mathbb{R}^n_x \xrightarrow[\text{przekszt. kwadratowa}]{f''_{x_0}} \mathbb{R}^m_y \longrightarrow C .$$

<u>Def.</u> Niezmiennicza druga pochodna jest to przekszt. kwadratowe $K \xrightarrow{Q_f} C$ określone wyżej.

To jest uogólnienie hessianu.

<u>TW</u> Jeśli $f_2 \sim f_1$ via φ, ψ jak wyżej, to

$$Q_{f_2}(v) = \psi' \, Q_{f_1}(\varphi'(v)) .$$

w punktach x_0, y_0 odpowiednio

⚠ $\varphi' : K_{f_2} \longrightarrow K_{f_1}$,

$\mathrm{im}\, f_2' = \psi' \, \mathrm{im}\, f_1'$ (wszystko w odpowiednich punktach)

więc ψ' określa izomorfizm

$$C_{f_1} \longrightarrow C_{f_2} ;$$

ten izomorfizm występuje w sformułowaniu tw.

⚠ Weźmy takie bazy e_α, e_μ w $\mathbb{R}^n_x$

i E_β, E_μ w $\mathbb{R}^m_x$, że

e_α rozpinają K_f

E_μ " $\mathrm{im}\, f'$

(liczba e_μ jest taka jak liczba E_μ).

Wtedy, po zastosowaniu liniowego autom. w $\mathbb{R}^m_y$ można założyć, że

$$f' : e_\mu \longrightarrow E_\mu ,$$

czyli (zakładając, że $x_0 = 0$, $y_0 = 0$) część liniowa f wygląda tak:

$$((x_\alpha), (x_\mu)) \longmapsto (0, (x_\mu)).$$

Napiszmy f:

$$y_\beta = f_\beta((x_\alpha), (x_\mu))$$
$$y_\mu = f_\mu((x_\alpha), (x_\mu)).$$

Wtedy

$$Q_f = Q_f((x_\alpha))$$

jest przekszt. kwadratowym od zmiennych x_α i jego β-współrzędna jest zadana przez macierz

$$\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2}} \Big|_0 \right).$$

<u>Dowód tw.</u> Jeśli $f_2 = \psi f_1 \varphi$, to

$$f_2'' = \psi''(f_1'\varphi', f_1'\varphi') + \psi' f_1''(\varphi', \varphi') +$$

$= 0$ na K_{f_2}

$+ \underbrace{\psi' f_1' \varphi''}_{\in \operatorname{im} f_2'}$, więc po przejściu do

$$K_{f_2} \xrightarrow{Q_{f_2}} C_2$$

uzyskamy „wzór transformacyjny"

$$Q_{f_2} = \psi' f_1''(\varphi', \varphi') = \psi' Q_{f_1} \circ \varphi'$$

działanie automorfizmu jak opisane przy przekształceniu kwadratowym.

Przykład Niech $\dim V = 2$, $\dim W = 2$.
Wtedy przestrzeń form kwadratowych na V (o wartościach skalarnych) jest 3-wymiarowa; nazwijmy ją $\varkappa(V)$.

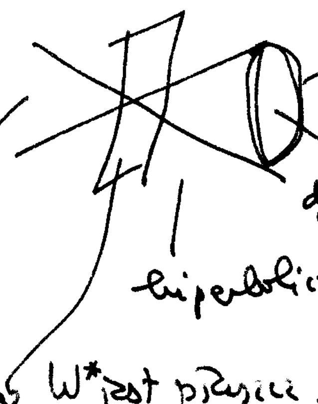
Rozpatrzmy przekszt. kwadratowe $V \xrightarrow{q} W$.

Jeśli $\omega \in W^*$, to $\omega \circ q$ jest formą kwadratową.
Zatem mamy przekształcenie liniowe

$$\begin{aligned} W^* &\longrightarrow \varkappa(V). \\ \omega &\longmapsto \omega \circ q \end{aligned}$$

Są następujące możliwości na obraz W^*:

1)



stożek form parabolicznych

elipt dod. określ.

jeśli forma jest $= \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$ to parabol.: $\beta^2 = \alpha\gamma$

elipt: ujemnie określone

hiperboliczne

obraz W^* jest płaszczyzną.

zawierającą O i tylko formy hiperboliczne

2) obraz W^* przecina stożek form parabolicznych wzdłuż dwóch prostych

3) obraz W^* jest płaszczyzną styczną do stożka

4) obraz W^* jest prostą w części hiperbolicznej.

5) " " eliptycznej.

6) " " " tworzącą stożka

7) " " " jest punktem.

Teraz za V bierzemy K_f, za W – ~~...~~ C_f, $q = Q_f$. Wtedy ułożenie obrazu C_f^* w $\mathcal{X}(K_f)$ jest niezmiennikiem dyfeomorfizmów.

Przykład: $f_\pm : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4 \\ x_3 x_4 \end{pmatrix}$

~~...~~ rzędy ich ~~...~~ macierzy ~~...~~ Jacobiego w O $\Delta_\xi = 2$;

ale ułożenie ~~ξ_+~~ $C^*_{f_+}$ odpowiada 2), ułożenie $C^*_{f_-}$ odpowiada 1) wg powyższej listy. Więc ten niezmiennik rozróżnia te przekształcenia.