Druga pochodna

$$\mathbb{R}^n \underset{otw}{\supset} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

Załóżmy, że f jest różniczkowalne $\forall x \in U$; wtedy pochodna f określa przekształcenie

$$U \xrightarrow{f'} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

f jest dwukrotnie różniczk. w x_0 jeśli f' jest różniczk. w x_0 i $f''(x_0) = (f')'(x_0)$; zatem

$$f''(x_0) : \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{liniowe}]{} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

czyli

$$f''(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) =$$

$$= L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

przestrzeń przekszt. dwuliniowych $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$.

Analogicznie słaba różniczkowalność.

Podobnie jeśli $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ zastąpić przestrzeniami Banacha, bo jeśli X, Y są takie, to $L(X,Y)$ ma naturalną

operatory liniowe ciągłe.

normę. Zatem pojęcie drugiej pochodnej przenosi się na przestrzenie Banacha.

Weźmy dowolny $h \in \mathbb{R}^n$ i niech

$$\varphi_h(x) = \partial_h f(x) = f'|_x(h).$$

Jeśli f jest dwukrotnie różniczk. w x_0, to $\varphi_h(x)$ jest różniczk. w x_0 i

$$\varphi_h'(x_0) = f''|_{x_0}(\cdot, h)$$

(tzn. $\forall k \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_h'|_{x_0}(k) = f''|_{x_0}(k,h)$$).

Bo

$$\| f'|_{x_0+u} - f'|_{x_0} - f''|_{x_0}(u) \| \le \varepsilon |u|$$

dla $|u|<\delta$

czyli

$$\| \underbrace{f'|_{x_0+u}(h)}_{\varphi_h(x_0+u)} - \underbrace{f'|_{x_0}(h)}_{\varphi_h(x_0)} - \underbrace{f''|_{x_0}(u,h)}_{\text{operator liniowy wzgl. } u} \| \le \varepsilon |u| |h|$$

dla $|u|<\delta$

Naodwrót:

jeśli $\forall h$ $\varphi_h(x) = \partial_h f(x)$ jest różniczk. w x_0 (i f jest różniczk. w U), to f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0 i

$$f''|_{x_0}(u,h) = \varphi_h'|_{x_0}(u).$$

Dowód: Niech $A_h = \varphi_h'\big|_{x_0} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Wtedy A zależy liniowo od h. Bo niech $h = h_1 + h_2$.

Ponieważ

$$\varphi_h = \varphi_{h_1} + \varphi_{h_2}$$

więc

$$\underbrace{\varphi_h'\big|_{x_0}}_{=A_h} = \underbrace{\varphi_{h_1}'\big|_{x_0}}_{=A_{h_1}} + \underbrace{\varphi_{h_2}'\big|_{x_0}}_{=A_{h_2}}$$

Analogicznie z mnożeniem przez stałą. Mamy więc odwzorowanie dwuliniowe

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (h, u) \longmapsto A_h(u) \in \mathbb{R}^m .$$

Weźmy bazę e_i w $\mathbb{R}^n$ (np. ortonormalną, jeśli norma w $\mathbb{R}^n$ pochodzi od iloczynu skalarnego).

Wtedy, $\forall i$

$$|\varphi_{e_i}(x_0+u) - \varphi_{e_i}(x_0) - A_{e_i}(u)| \le \varepsilon |u| \quad \text{dla } |u|<\delta$$

Z liniowości lewej strony poniżej, dla pewnej stałej C (zależnej tylko od bazy), $\forall h$

$$|\varphi_h(x_0+u) - \varphi_h(x_0) - A_h(u)| \le C\varepsilon |u|\,|h|$$

Stąd, dla $A(u) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A(u)(h) = A_h(u)$,

$$\big|\big(f'(x_0+u) - f'(x_0) - A(u)\big)(h)\big| =$$

$$= |\varphi_h(x_0+u) - \varphi_h(x_0) - A_h(u)| \le C\varepsilon |u||h| \quad \text{dla } |u|<\delta,$$

a więc $\|f'(x_0+u) - f'(x_0) - A(u)\| \le C_\varepsilon |u|$

dla $|u|<\delta$.

⚠ W dowodzie wykorzystany był tylko fakt różniczkowalności wszystkich φ_{e_i} w x_0. A więc:

> f jest różniczk. dwukrotnie w x_0 $\Longleftrightarrow$ jest różniczk. w otoczeniu x_0 i wszystkie pochodne cząstkowe (w jakiejś bazie) są różniczkowalne w x_0.

Oznaczenia:

$$f'' = d^2 f = D^2 f$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\partial_i f = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad \partial_i \partial_j f = D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Przekształcenia klasy C^2: takie przekształcenia różniczkowalne, że (w pewnej bazie) wszystkie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ są ciągłe $\Longleftrightarrow$ $\forall h$ $\varphi_h(x)$ jest C^1

$\Longrightarrow$ f jest dwukrotnie różniczk. i $U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest ciągłe.

(równoważność wynika z powyższych faktów i twierdzenia, że ciągłość pochodnych cząstkowych implikuje różniczkowalność funkcji).

Przykłady

1) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$; wyliczyć $f''(x_0)$ w terminach pochodnych cząstkowych (w dowolnej bazie).

Rozwiązanie:
$$\varphi_h(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, h_i$$
$$\Rightarrow \varphi'_h\Big|_x (k) = \sum \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_j}\Big|_{x_0} k_j =$$
$$= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_{x_0} h_i k_j .$$

2) $f(x) = Ax$ liniowe; obliczyć f''.

Rozwiązanie:
$$\varphi_h(x) = Ah \quad \text{- niezależne od } x$$
więc $\varphi'_h(x) = 0$
$$\Rightarrow f'' \equiv 0.$$

W terminach współrzędnych:
$$f_r(x) = \sum a_{ri} x_i$$
$$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} = a_{ri}, \quad \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_j \partial x_i} = 0.$$

Jeśli ~~f_r~~, w bazie E_r w $\mathbb{R}^m$, f ma współrzędne f_r:
$$f(x) = \sum f_r E_r$$
to
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} E_r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \partial x_j} E_r \text{ i}$$
$$f''\big|_{x_0}(h,k) = \sum_{i,j,r} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i k_j E_r .$$

3) $f(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$ = forma kwadratowa o wartościach skalarnych

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \sum a_{pj} x_j + \sum a_{ip} x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_p} = a_{pq} + a_{qp}$$

$$f''|_{x_0} (k,h) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_q \partial x_p} k_q h_p$$

dowolne

$$= \sum (a_{pq} + a_{qp}) k_q h_p$$

Bez współrzędnych:

$f(x) = \langle Ax, x \rangle$, $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{liniowe}]{A} \mathbb{R}^n$

$\varphi_h(x)$ = cz. liniowa przyrostu

$$f(x+h) - f(x) = \langle A(x+h), x+h \rangle - \langle Ax, x \rangle$$

więc

$$\varphi_h(x) = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle =$$

$$= \langle Ax, h \rangle + \langle A^* x, h \rangle =$$

$$= \langle (A + A^*) x, h \rangle,$$

$$\varphi'_h|_x (k) = \langle (A + A^*) k, h \rangle =$$

$$= f''|_x (k, h).$$

Tw o symetrii f'': Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalne w x_0, to $f''|_{x_0}(k,h) = f''|_{x_0}(h,k)$.

D. Wystarczy wykazać, że (w dowolnej bazie)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0),$$

a to wystarczy wykazać dla każdej składowej f_r przekszt. f (w dowolnej bazie E_j przestrzeni $\mathbb{R}^m$). Weźmy i, j, i niech $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}(e_i, e_j)$. Wystarczy więc wykazać, że jeśli $\varphi = f_r|_{\mathbb{R}^2}$, to

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Zatem od początku można założyć, że $n = 2$, $i=1$, $j=2$, i f przyjmuje wartości skalarne; oczywiście za x_0 można przyjąć 0.

Do tego przypadku, przy pomocy podobnego rozumowania, można zredukować przypadek funkcji określonych na przestrzeniach Banacha, o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Współrzędne w $\mathbb{R}^2$ oznaczmy przez x, y.

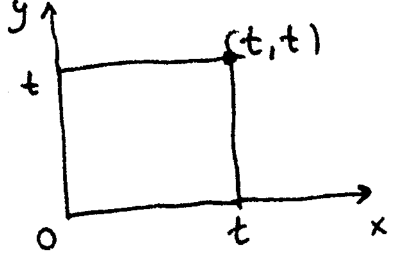
Można jeszcze założyć, że $f(0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$ (funkcję f można zastąpić przez

$$f(x,y) - f(0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0),$$

co nie zmienia ani różniczkowalności, ani drugiej pochodnej).

Niech $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ $\quad (i,j=1,2)$.

Niech



$$g(t) = f(t,t) - f(t,0) - f(0,t) + \underbrace{f(0,0)}_{=0}.$$

Wykażemy, że

$$\frac{g(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} a_{2,1}.$$

Stąd, z symetrii zagadnienia względem zamiany osi współrzędnych wynika, że również

$$\frac{g(t)}{t^2} \longrightarrow a_{1,2}$$

czyli $a_{1,2} = a_{2,1}$.

Zastąpmy teraz funkcję f przez

$$\tilde{f} = f(x,y) - \frac{1}{2} a_{1,1} x^2 - a_{2,1} xy ;$$

ta funkcja ma pochodne $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}\Big|_0 = 0$, $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_2 \partial x_1}\Big|_0 = 0$.

Funkcje g (dla f) i $\tilde{g}$ (dla $\tilde{f}$) są związane oczywistą zależnością:

$$\tilde{g} = g -$$ (taka ~~f~~ funkcja dla wielomianu kwadratowego, oczywista do policzenia)

więc wystarczy wykazać, że

$$\frac{\tilde{g}(t)}{t^2} \longrightarrow 0,$$

czyli od razu można założyć, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\Big|_0 = 0$

Z różniczkowalności $\frac{\partial f}{\partial x}$ w 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)}^{=0} + y\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)}^{=0}$$

$+$ reszta

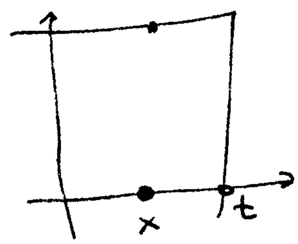
czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\psi(x,y), \qquad \psi \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

(tzn. $\psi(0)=0$ i ψ jest ciągła w 0).

Niech, dla ustalonego t

$$h(x) = f(x,t) - f(x,0) \qquad , 0 \le x \le t$$



Wtedy

$$g(t) = h(t) - h(0).$$

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) =$$

$$= \sqrt{x^2+t^2}\,\psi(x,t) - x\,\psi(x,0)$$

$$\Rightarrow \quad |h'(x)| \le \sqrt{2t^2}\,\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon t(1+\sqrt{2})$$

(o ile t jest na tyle małe, że w całym kwadracie $|\psi|<\varepsilon$). Zatem $|h(t)-h(0)| \le \varepsilon t^2(1+\sqrt{2})$

i

$$\frac{|g(t)|}{t^2} \le \varepsilon(1+\sqrt{2}).$$

Przykład łatwo sprawdzić, że jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

to wszystkie ~~$\frac{\partial^2 f}{\partial x}$~~ cztery pochodne cząstkowe 2 rzędu istnieją w $\mathbb{R}^2$, ale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$; f jest ponadto różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

Uzupełnienie poprzedniego wykładu.

Jeśli $M^d \subset \mathbb{R}^n$ jest podrozmaitością, to parametryzacja $\mathbb{R}^d \supset U \xrightarrow{F\in C^1} M^d$ obszaru $F(U)$ nazywa się też mapą na $F(U)$.

Jeśli $F_1 : U_1 \longrightarrow M$, $F_2 : U_2 \longrightarrow M$ są mapami, to $F_2^{-1}\circ F_1 \in C^1$ i jest dyfeomorfizmem (tam, gdzie określone) (skorzystać z TFO).

Przekształcenie

$$M^{d_1} \xrightarrow{f} N^{d_2}$$

jest C^1 jeśli dla dowolnych map $U_1 \xrightarrow{F} M$, $U_2 \xrightarrow{G} N$ $G^{-1}\circ f\circ F \in C^1$.

Pole wektorowe na M: funkcja $M \ni x \longmapsto v(x) \in T_xM$.

Jeśli F jest parametryzacją kawałka M, to określa ona pola $V_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(F^{-1}(x))$. ~~Pole wektorowe $v \in C^1$ jeśli dla dowolnej parametryzacji $v(x) = \sum \varphi_\alpha(F^{-1}(x))\, V_\alpha(x)$, gdzie $\varphi_\alpha \in C^1$. Podobnie można określić 1-formy różniczkowe na M, klasy C^1~~. Różniczka f w x jest przekszt. liniowym $T_xM \to T_{f(x)}N$,
$f: M \longrightarrow N$