Uzupełnienia na temat pochodnej 1 rzędu

5440

1) Pochodna przekszt. odwrotnego :

jeśli $X \supset U \xrightarrow{f} Y$, $U \ni x_0$, $f(x_0) = y_0$,

$g = f^{-1}$, f, g są różniczk. w x_0, y_0

odpowiednio, to

$$g \circ f = id \qquad i$$

$$g'|_{y_0} \cdot f'|_{x_0} = I$$

$\Rightarrow$ $f'|_{x_0}$ jest izomorfizmem liniowym i

$$g'|_{y_0} = (f'|_{x_0})^{-1}.$$

Dla $X = Y = \mathbb{R}^n$: warunkiem koniecznym na to, by f (różniczk. w x_0) miało różniczkowalne f^{-1} jest, by $f'|_{x_0}$ było odwracalne $\Rightarrow$ $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right) \neq 0$ (w dowolnych bazach):

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^n$$

baza e_i baza: E_j (niekoniecznie ta sama)

wtedy $f = \sum f_j E_j$.

<u>Def</u> $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)$ = jakobian f w x_0

②

$$\overset{\text{ozn.}}{=} J_f(x_0) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0)$$

Jakobian ma przejrzystą interpretację geometryczną (będzie później).

2) Przestrzeń styczna do wykresu przekształcenia.

$$\mathbb{R}^n_x \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m_y \quad , \quad x_0 \in U, \quad y_0 \overset{\text{def}}{=} f(x_0)$$

$$(x_0, y_0) \in G_f = \{(x,y) \;:\; y = f(x)\} = \text{wykres } f.$$

Niech, ogólnie, $A \subset \mathbb{R}^N$, a = punkt skupienia A

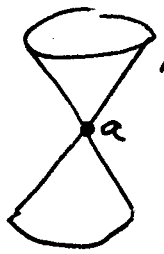
Sieczna do A w a: każda prosta przechodząca przez a i jakiś inny punkt $q \in A$.

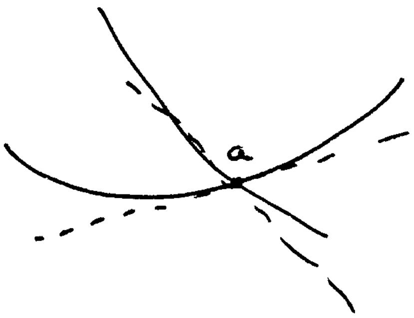
Stożek styczny do A w a:

$$C_a(A) = \{ w : \exists \text{ ciąg siecznych do } A$$
$$a q_\nu ,$$
$$A \setminus \{a\} \ni q_\nu \longrightarrow a$$
$$\text{i wektorów } w_\nu \in a q_\nu ,$$
$$w_\nu \longrightarrow w \}.$$

(przyjemnie jest uważać wektory $C_a A$ za zaczepione w a; czyli $C_a A \subset T_a \mathbb{R}^N$).

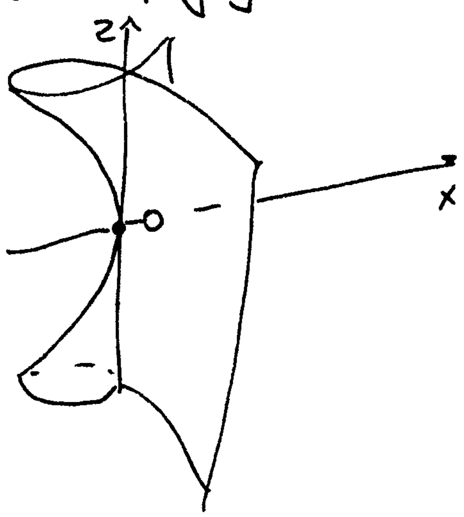
łatwo sprawdzić, że $C_a A$ jest stożkiem (tzn. jeśli $w \in C_a A$, to $\lambda w \in C_a A$). Nie zawsze jest przestrzenią liniową:

a)  $A: z^2 = x^2 + y^2$ – wtedy $C_a A = A$

b)  przecinające się krzywe C^1 w $\mathbb{R}^2$ (tj wykresy funkcji klasy C^1)

$C_a A$ = suma mnogościowa stycznych w a do obu tych krzywych

c) obliczyć $C_0 A$, gdy $A: y^2 = x^3 + x^2 z^2$



(odp. $\{y=0\}$)

Teraz ~~...~~ $a = (x_0, y_0) \in G_f = A$.

<u>Obserwacja</u>: $T_a G_f$ jest przestrzenią liniową, której rzut na $\mathbb{R}^n_x$ jest izomorfizmem liniowym $\Leftrightarrow$ f jest w x_0 różniczkowalna i wtedy

$$T_a G_f = \{(\xi, \eta) : \eta = f'|_{x_0} \xi \}.$$

D. Wszystkie granice wektorów na siecznych są postaci

$$\lambda_\nu \left(h_\nu, f(x_0 + h_\nu) - f(x_0) \right)$$

$$h_\nu \longrightarrow 0, \quad \lambda_\nu \in \mathbb{R}.$$

Jeśli f jest w x_0 różniczkowalna i $f'|_{x_0} = A$, to

$$\lambda_\nu (h_\nu, f(x_0 + h_\nu) - f(x_0)) =$$

$$= (\lambda_\nu h_\nu, A(\lambda_\nu h_\nu) + \lambda_\nu \cdot R(h_\nu))$$

$$\frac{R(h_\nu)}{|h_\nu|} \longrightarrow 0$$

Ten ciąg ma być zbieżny; więc

$$\lambda_\nu h_\nu \longrightarrow \xi$$

i wtedy

$$A(\lambda_\nu h_\nu) + \underline{\lambda_\nu R(h_\nu)}$$

$$A(\lambda_\nu h_\nu) \downarrow A\xi$$

w szcz. $|\lambda_\nu| \leq \frac{\text{const}}{|h_\nu|}$

$$|\lambda_\nu R(h_\nu)| = |\lambda_\nu| \, |R(h_\nu)| \leq |\lambda_\nu| |h_\nu| \cdot \frac{R(h_\nu)}{|h_\nu|} \to 0$$

Naodwrót: każda podprzestrzeń liniowa, której rzut na $\mathbb{R}^n_x$ jest izomorfizmem, pisze się jako

$$\{(\xi,\eta) : \eta = A\xi\} \text{ - dla pewnego liniowego } \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}$$

Zatem $\forall \xi \ \exists \lambda_\nu, h_\nu \quad h_\nu \to 0, \quad \lambda_\nu h_\nu \to \xi$,

wtedy

$$\cancel{\lambda_\nu(f(x_0))} \ \lambda_\nu \left(f(x_0+h_\nu) - f(x_0)\right) \longrightarrow A\xi$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda_\nu \left(f(x_0+h_\nu) - f(x_0) - A h_\nu \right) \longrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{|\lambda_\nu|}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{|\lambda_\nu h_\nu|}_{\downarrow \ |\xi|} \ \frac{|f(x_0+h_\nu) - f(x_0) - A h_\nu|}{|h_\nu|} \to$$

Dla $\xi \neq 0$ wychodzi teza.

3) Gradient funkcji. Niech $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ będzie słabo różniczk. w x_0. Wtedy $f'(x_0) \in (\mathbb{R}^n)^*$.

<u>Def</u> $\nabla f(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) =$ taki (jedyny) wektor (zaczepiony w x_0), że $\forall v$

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = f'|_{x_0}(v) = \partial_v f(x_0).$$

⚠ pochodna funkcji (= różniczka) nie zależy od iloczynu skalarnego (ani normy); ale gradient zależy.

Przykład e_i = baza $\mathbb{R}^n$, x_i = stowarzyszone współrzędne:

tzn $x = \sum x_i e_i$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{df}{=} \partial_{e_i} f = f'(e_i) \quad (\text{dokł.:}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} = f'|_{x_0}(e_i))$$

Jeśli (e_i) jest ortonormalna, to piszę

$$\nabla f(x_0) = \sum z_i e_i$$

uzyskamy, $\forall v = \sum v_i e_i$

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \sum z_i v_i = \cancel{\sum \partial f}$$

$$= \partial_v f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

czyli

$$\nabla f(x_0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) e_i.$$

Teraz niech e_i będzie dowolna, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ji}$

Wtedy, znowu piszę $\nabla f(x_0) = \sum z_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \sum z_i v_j \underset{\substack{\shortparallel \\ g_{ji}}}{g_{ij}} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

$$\cancel{\sum g_{ij} z_i} \quad \sum_j \left(\sum_i g_{ji} z_i - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) v_j = 0.$$

Ta równość ma być spełniona $\forall v$, więc

$$\sum g_{ji} z_i = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Niech (g^{ij}) będzie macierzą odwrotną do (g_{ij}):

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases};$$

wtedy

$$z_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

czyli

$$\nabla f(x_0) = \sum_i \Big(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \Big) e_i .$$

4) Pojęcie różniczki funkcji.

$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{słabo różniczk. w } x_0 .$$

Wtedy $f'(x_0) \overset{\text{df}}{=} df(x_0) \in (\mathbb{R}^n)^*$ (w odróżnieniu od $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$).

$$df(x_0)(v) = f'(x_0)\ (v) = \partial_v f(x_0) .$$

Niech e_i będzie bazą $\mathbb{R}^n$ i x_i = stowarzyszonymi współrzędnymi. x_i można traktować jak funkcję na $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n \ni x \overset{x_i}{\longmapsto} x_i \in \mathbb{R} . \quad \text{liniowa}$$

$dx_i\ (v) = v_i = e_i^*(v)$, więc

$$dx_i = e_i^* = \text{baza sprzężona do } e_i .$$

Stąd

$$df(x_0)(v) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, v_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i(v)$$

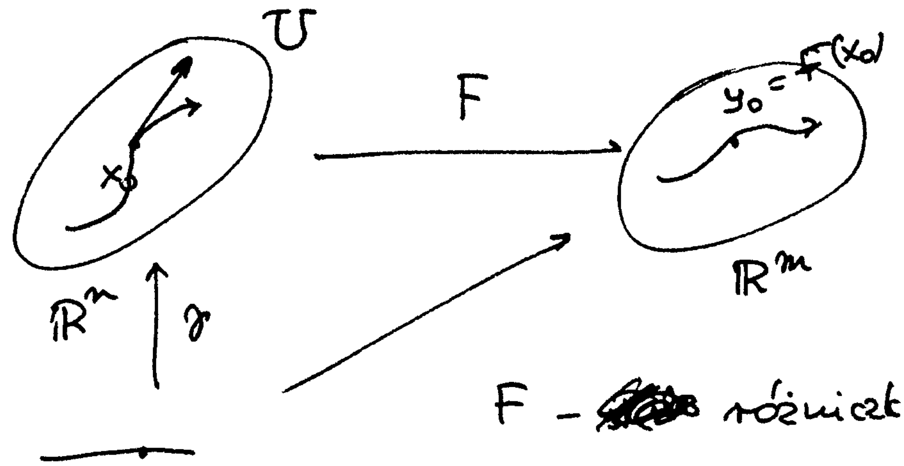
więc

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i .$$

Elementy $(\mathbb{R}^n)^*$ (dokładniej: $(T_{x_0}\mathbb{R}^n)^* \overset{\text{ozn.}}{=} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$) nazywają się 1-formami w x_0. Zatem

$$df(x_0) \in T^*_{x_0}\mathbb{R}^n .$$

5) Interpretacja pochodnej przekształcenia w terminach krzywych



F – różniczk. w x_0

$\gamma : (a,b) \longrightarrow U$ (krzywa sparametryzowana)

$\gamma(0) = x_0$

γ = różniczk. w 0

$\dot\gamma(0) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$

= „wektor prędkości γ"

Wtedy (różniczk. złożenia)

$$(F \circ \gamma)'(0) = F'|_{x_0} \cdot \dot\gamma(0).$$

Jeśli $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$, to można wziąć dowolną (różniczk. w 0) $\gamma(t)$, że $\dot\gamma(0) = v$ (np. $\gamma(t) = x_0 + tv$)

i wtedy

$$F'|_{x_0} v = (F \circ \gamma)^{\cdot}(0).$$

6) Działanie pochodnej przekształcenia na 1-formach.

$$\mathbb{R}^n \supset \underset{\substack{\in \\ x_0}}{U} \xrightarrow{F} \underset{F(x_0) = y_0}{\mathbb{R}^m},$$

F – różniczk. w x_0.

Różniczka (pochodna) F :

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n \xrightarrow{F'|_{x_0}} T_{y_0}\mathbb{R}^m$$

i jest określone przekształcenie sprzężone

$$T^*_{y_0}\mathbb{R}^m \xrightarrow{(F')^* \overset{\text{ozn}}{=} F^*} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n .$$

<u>Tw</u> $F^*(df) = \cancel{d(f\circ F)}$ (dla $V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $V \ni y_0$, różniczk. w y_0)

$= d(f\circ F)$

D. dla dowolnego $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$:

$$F^*(df)(v) = df\,(F'|_{x_0} v) =$$

def. przekszt. sprzężonego

$$= f'|_{y_0}\,(F'|_{x_0}(v)) =$$

$$= (f\circ F)'|_{x_0}(v) = d(f\circ F)|_{x_0}(v)$$

różniczkowanie złożenia

<u>Przykład</u>: Czy podobny wzór zachodzi dla gradientów?

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m \\ \psi & & \cup \\ x_0 & & V \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ & & \psi \\ & & y_0 = F(x_0) \end{array}$$

– jak poprzednio

F, f – różniczkowalne w x_0, y_0 odpowiednio

Mamy więc funkcję f (określ. w otocz. y_0) i $f\circ F$ w otoczeniu x_0. Czy

$$F'|_{x_0}\,\nabla(f\circ F)(x_0) \overset{?}{=} \nabla f(y_0) .$$

NIE:

w bazach ortonormalnych e_i, E_j :

$$F(x) = \sum F_j(x)\, E_j$$

$$\nabla f\big|_{y_0} = \sum \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0)\, E_j$$

$$\nabla (f\circ F)\big|_{x_0} = \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\Big|_{y_0} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\Big|_{x_0} e_i$$

$$F'\big|_{x_0} \nabla(f\circ F)\big|_{x_0} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} F' e_i$$

$$= \sum \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} E_k$$

⚠ To jest znany fakt z algebry liniowej: niech

$$V \xrightarrow{A\ \text{- liniowe}} W$$

(V, W – z iloczynami skalarnymi)

$$W^* \xrightarrow{A^*} V^*$$

sprzężone

Niech $\omega \in W^*$, $\lambda = A^*\omega \in V^*$.

$\exists!\ v, w$

$$\omega(\eta) = \langle w, \eta\rangle \qquad \forall \eta \in W$$

$$\lambda(\xi) = \langle v, \xi\rangle \qquad \forall \xi \in V$$

Ale wtedy $w \neq Av$ (chyba, że A jest izometrią)

Dokładniej, niech $V \xrightarrow{\Phi_V} V^*$ będzie izomorf. danym przez iloczyn skalarny:

$$\Phi_V(v) = \lambda, \quad \lambda(\xi) = \langle v, \xi\rangle.$$

Wtedy diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "A^*"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny $\iff$ A jest izometrią : $A^*A = I$

7) Interpretacja geometryczna gradientu.

a) jego kierunek (jeśli $\nabla f(x_0) \neq 0$) jest „kierunkiem najszybszego wzrostu" f w sensie następującym: niech $a = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ i b będzie dowolnym wektorem jednostkowym; wtedy

$$\partial_b f(x_0) = \langle b, \nabla f(x_0) \rangle \leq$$
$$\leq |\nabla f(x_0)|$$

równość spełniona tylko dla $b = a$

$|\nabla f(x_0)| = \partial_a f(x_0)$ = „szybkość wznoszenia się", jeśli x porusza się po prostej $x_0 + ta$.

b) warstwica f: $V_c = \{x : f(x) = c\}$.

Niech $\nabla f(x_0) \neq 0$ i $c = f(x_0)$. Wtedy $\nabla f(x_0)$ jest prostopadły do V_c w tym sensie, że dla każdej krzywej $(a,b) \xrightarrow{\gamma} V_c \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma(0) = x_0$

różniczkowalnej w x_0,

$$\langle \nabla f(x_0), \dot\gamma(0) \rangle = 0.$$

Bo $\langle \nabla f(x_0), \dot\gamma(0) \rangle = (\underbrace{f\circ\gamma}_{\text{const}=c})^{\dot{}}\big|_0 = 0.$

⚠ W tej wersji własność powyższa jest b. słaba, bo może się zdarzyć, że jedynymi krzywymi γ spełniającymi powyższe założenia są krzywe stałe: $\gamma(t) = x_0$.

8) Warunek konieczny na ekstremum lokalne: jeśli $\underset{\mathbb{R}^n \supset \text{otw}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ przyjmuje ekstr lok. w $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\partial_v f(x_0)$ istnieje, to $\partial_v f(x_0) = 0$. W szczeg. jeśli istnieją w x_0 wszystkie pochodne cząstkowe w x_0, to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$; jeśli f jest słabo różniczk. w x_0, to $f'(x_0) = 0$.

⚠ w odróżnieniu od $n=1$, w wyższych wymiarach istnieją funkcje, określone np. na całym $\mathbb{R}^n$, z wieloma maximami i ani jednym minimum (np. $\sin x - y^2$).

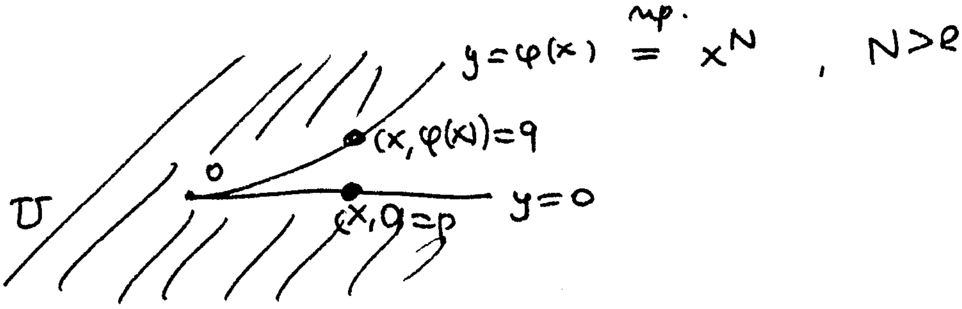
9) Niektóre wnioski z tw. o przyrostach skończonych.

a) jeśli $\underset{\text{słaba pochodna}}{f'|_{x_0} = 0}$ $\forall x_0$, $\underset{\text{spójny otwarty}}{U} \xrightarrow{f} Y$

to $f = \text{const}$

b) jeśli U jest wypukły i $\| f'|_{x_0} \| \leq K$ $\forall x_0$, to $$|f(x) - f(x')| \leq K |x - x'|$$ 13

⚠ Bez założenia wypukłości – niekoniecznie:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \text{ lub } x \leq 0 \\ x^2 & y \geq \varphi(x) \ \& \ x > 0 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 2 \ , \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 0 \ , \text{ ale}$$

$$|f(q) - f(p)| = x^2$$

$$|q - p| = \varphi(x)$$

Jeśli U jest spójny i otwarty, to można określić metrykę "wewnętrzną" d_U:

długość odcinka pq $= \|q - p\|$ (zakł., że mamy zadaną normę)

$\Rightarrow$ długość łamanej = sumie długości jej segmentów

$d_U(p, q) = \inf$ długości łamanych łączących p i q

Wtedy, jeśli $|f'| \leq K$ wszędzie w U, to

$$|f(q) - f(p)| \leq K d_U(p, q).$$

c) Tw. Niech $X \supset U \xrightarrow[f_\nu]{\text{otw, spójny}} Y$ ~~będą~~ (X, Y – mające skończ. wymiarowe)

f_ν różniczk. w U; $\forall x_0 \in U\ \exists r > 0$

f'_ν – zbieżne jednostajnie w $K(x_0, r)$.

Niech $g = \lim f'_\nu : U \longrightarrow L(X, Y)$.

~~Wtedy~~ Niech $f_\nu(x_0)$ będzie zbieżny, dla pewnego $x_0 \in U$.

Wtedy f_ν jest zb. jednostajnie ~~wok~~ w pewnej kuli wokół każdego punktu (o dodatnim promieniu) i jeśli $f = \lim f_\nu$, to $f' = g$.

D. Weźmy dowolne x_0, r – jak wyżej. Wtedy $\forall x \in K(x_0, r)$

$$\cancel{f_\nu(x) - f_\mu(x_0)}$$

$$\left| \left(f_\nu(x) - f_\mu(x) \right) - \left(f_\nu(x_0) - f_\mu(x_0) \right) \right| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \sup_{z \in K(x_0, r)} \left\| f'_\nu|_z - f'_\mu|_z \right\|$$

$$< \varepsilon r \quad \text{dla } \mu, \nu \gg 0.$$

Zatem jeśli $f_\mu(x)$ jest zbieżny dla jakiegoś $x \in K(x_0, r)$, to jest zbieżny jednostajnie w $K(x_0, r)$.

Stąd, ze spójności U, $f_\mu(x)$ jest zbieżny $\forall x$, jednostajnie w $K(x_0, r)$.

Pozostaje wykazać, że ~~...~~ $f' = g$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$.

$$\exists \nu_0 \quad \| f'_\nu(z) - f'_\mu(z) \| < \varepsilon \quad \& \quad \| g(x_0) - f'_\nu(x_0) \| \leq \varepsilon .$$

$$\forall z \in K(x_0, r) \quad , \mu, \nu > \nu_0 .$$

Jeśli w poprzedniej nierówności $\nu \to \infty$, to

$$\Big| \big(f(x) - f(x_0) \big) - \big(f_\mu(x) - f_\mu(x_0) \big) \Big| < \varepsilon |x - x_0|$$

Z definicji różniczkowalności:

$$\forall \nu \ \exists \delta \qquad | f_\nu(x) - f_\nu(x_0) - f'_\nu(x_0)(x - x_0) | \leq$$

$$\leq \varepsilon |x - x_0|$$

dla $|x - x_0| < \delta$

Ustalamy teraz $\nu > \nu_0$.

Stąd

$$| f(x) - f(x_0) \} - g'(x_0)(x - x_0) | \leq \dots$$

(nierówność trójkąta).