Miara zewnętrzna na X:

$$2^X \xrightarrow{\mu_z} \mathbb{R}_+ \quad :$$

monotoniczność

$$\mu_z(\emptyset) = 0, \qquad \mu_z(A) \le \mu_z(B) \text{ gdy } A \subset B,$$

$$\mu_z\left(\bigcup A_n\right) \le \sum \mu(A_n) \quad \text{(podaddytywność)}$$

$A \subset X$ spełnia warunek Caratheodory'ego jeśli

$\forall\, W \subset A,\ Z \supset A'$ $\qquad (A' = X \setminus A)$

$$\mu_z(W \sqcup Z) = \mu_z(W) + \mu_z(Z). \iff \mu_z(W \sqcup A) \ge \dots$$

⚠ ten warunek można też sformułować tak:

$\forall\, V \subset X$ $\qquad \mu_z(V \cap A) + \mu_z(V \setminus A) = \mu_z(V)$

zamiast W $\qquad$ zamiast Z

$$V = W \sqcup Z.$$

Zbiory typu $V \cap A$, $V \setminus A$ nazywamy rozbiciem V zbiorem A. Zatem warunek Caratheodory'ego mówi, że miara zewnętrzna jest addytywna na rozbiciach <u>dowolnego</u> V zbiorem A.

<u>Tw</u> Caratheodory'ego: μ_z = miara zewnętrzna, $\mathfrak{M}$ = zb. wszystkich A spełniających war. Caratheodory'ego. Wtedy $\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem, i $\mu_z|_{\mathfrak{M}}$ jest miarą zupełną.

D. 1) $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A' \in \mathfrak{M}$

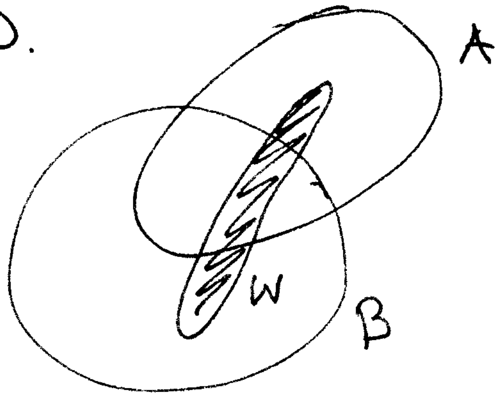
2) $\mu_z(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$

w szczególności $\emptyset \in \mathfrak{M}$

3) $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$ (czyli $\mathfrak{M}$ jest ciałem zb.)

– stąd wynika, że suma dowolnej skończonej liczby zbiorów z $\mathfrak{M}$ jest w $\mathfrak{M}$, oraz że przecięcie i różnica zb. z $\mathfrak{M}$ jest w $\mathfrak{M}$.

D.



$W \subset A \cup B$, $Z \subset (A \cup B)'$

$W_1 = W \cap A$, $W_2 = W \setminus A$ (rozbicie W zbiorem A)

A

$$\mu_z(W \sqcup Z) = \mu_z(W_1 \sqcup (Z \sqcup W_2)) =$$

$$= \mu_z(W_1) + \underbrace{\mu_z(Z \sqcup W_2)}_{\parallel \text{ bo } B \in \mathfrak{M}}$$

bo $A \in \mathfrak{M}$

$$\mu_z(Z) + \mu_z(W_2) =$$

$$= \underbrace{\mu_z(W_1) + \mu_z(W_2)}_{\overset{\parallel}{\mu_z(W)}} + \mu_z(Z)$$

znowu z tego, że $A \in \mathfrak{M}$.

4) Niech $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{M}$, parami rozłączne, $W_i \subset B_i$ dowolne, $Z \subset (\bigcup B_i)'$; wtedy

$$\mu_Z(Z \cup \bigcup W_i) = \mu(Z) + \sum \mu_Z(W_i).$$

D. Indukcja. $n=1$: wynika stąd, że $B_1 \in \mathfrak{M}$.
Krok indukcyjny: $n+1$ zamiast n.

$$\mu_Z(Z \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} W_i) = \mu_Z(Z \cup \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cup W_{n+1})$$

$$= \mu_Z(\underbrace{Z \cup \bigcup_{i=1}^{n} W_i}_{\text{zewnątrz } B_{n+1}}) + \mu_Z(\underbrace{W_{n+1}}_{\text{w } B_{n+1}})$$

bo $B_{n+1} \in \mathfrak{M}$

$$\underset{\text{indukcja}}{=} \mu_Z(Z) + \sum_{1}^{n} \mu_Z(W_i) + \mu_Z(W_{n+1}).$$

5) (przeliczalna addytywność $\mathfrak{M}$): $A_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

D. dzięki rozłączeniu można założyć, że A_n są parami rozłączne. Niech $A = \bigcup A_n$, $W \subset A$, $Z \subset A'$, $W_i = W \cap A_i$. Z 4), dla dowolnego n

$$\mu_Z(Z \cup W) \geq \mu_Z(Z \cup \bigcup_{i \leq n} W_i) =$$

$$= \mu_Z(Z) + \sum_{i \leq n} \mu_Z(W_i).$$

Po przejściu do granicy przy $n \to \infty$

$$\mu_Z(Z \cup W) \geq \mu_Z(Z) + \sum \mu_Z(W_i) \geq$$

$$\underset{\text{podaddyt. } \mu_Z}{\geq} \mu_Z(Z) + \mu_Z(\bigcup W_i) =$$

$$= \mu_Z(Z) + \mu_Z(W).$$

6) $\mu_Z | \mathfrak{M}$ jest miarą.

D. addytywność wynika z warunku Caratheodory'ego:

jeśli $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B = \emptyset$ to

$$\mu_z(A \cup B) = \mu_z(A) + \mu_z(B)$$

przyjąć

$W = A$, $\cancel{B}\, Z = B$

Przeliczalna addytywność wynika stąd, że:

jeśli
- μ jest określona na σ-ciele $\mathfrak{M}$,
- jest addytywna, $\mu(\emptyset) = 0$,
- jest przeliczalnie podaddytywna,

to jest miarą.

Bo niech $A_n \in \mathfrak{M}$ będą parami rozłączne; wtedy, $\forall n$

$$\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{i \le n} A_i\Big) \le \mu\left(\bigcup A_n\right)$$

po przejściu granicznym:

$$\sum \mu(A_n) \le \mu\left(\bigcup A_n\right),$$

a nierówność przeciwna jest podaddytywnością przeliczalną.

7) Zupełność $\mu_z|_{\mathfrak{M}}$: ☺☺.

Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$

Układ współrzędnych - ustalony.

Przedział: każdy zbiór postaci

$$P = \{x : a_i \le x_i \le b_i \quad \forall i\} \qquad a_i, b_i \text{ - skończ.}$$

Objętość P: $\quad \operatorname{vol} P = \prod (b_i - a_i)$.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a:

$$|A|_z = \inf_{\bigcup P_i \supset A} \sum \operatorname{vol} P_i .$$

Sprawdzamy aksjomaty:

$|\emptyset|_2 = 0$ oczywiste, monotoniczność też

przelicz. podaddytywność: $|\bigcup A_i|_2 \overset{?}{\leq} \sum |A_i|_2$:

oczywiste, jeśli chociaż jedna $|A_i|_2 = \infty$

Zatem niech $|A_i|_2 < \infty$ $\forall i$. Niech $\varepsilon > 0$ dowolne.

$$A_i \subset \bigcup_j P_{ij} \quad , \quad \sum_j \operatorname{vol} P_{ij} \leq |A_i|_2 + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

przedziały

wtedy

$$\bigcup_i A_i \overset{df}{=} A \subset \bigcup_{i,j} P_{ij} ,$$

$$\sum_{i,j} \operatorname{vol} P_{ij} \leq \sum_i \left(|A_i|_2 + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) =$$

$$= \sum |A_i|_2 + \varepsilon$$

więc

$$|A|_2 \leq \sum |A_i|_2 + \varepsilon \Rightarrow$$

dowolność ε

$$|A|_2 \leq \sum |A_i|_2 .$$

Tw $\forall P$ $\quad \operatorname{vol} P = |P|_2$.

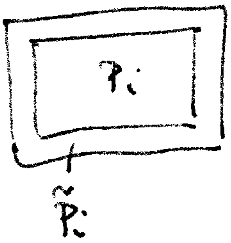
D. $|P|_2 \leq \operatorname{vol} P$ — za pokrycie P wziąć pokrycie jednoelementowe $\{P\}$.

Niech ε = dowolne,

$$P \subset \bigcup_1^\infty P_i \quad , \quad \sum \operatorname{vol} P_i \leq |P|_2 + \varepsilon .$$

Każdy P_i powiększmy do otwartego Q_i, o tej własności, że jeśli $\tilde{P}_i$ = domknięcie Q_i, to

$$\mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \mathrm{vol}\,P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$



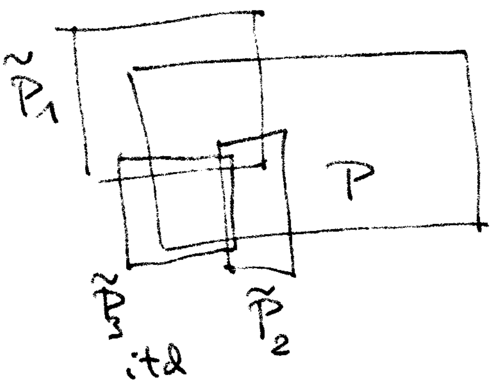
Zatem $\sum \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le |P|_z + 2\varepsilon$

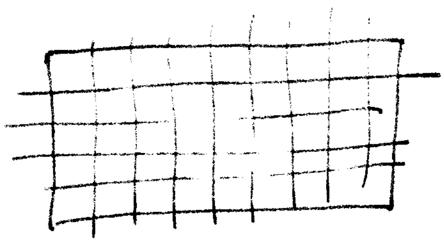
Ale P (zwarty) $\subset \bigcup Q_i$, więc można wybrać pokrycie skończone:

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} \tilde{P}_i.$$

Dla (takich) pokryć skończonych jest prawie oczywiste, że

$$\mathrm{vol}\,P \le \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i$$





P można pokrajać hiperpłaszczyznami równoległymi do hiperpłaszczyzn współrzędnych, i każde $\tilde{P}_i$ jest sumą niektórych z uzyskanych przedziałów

do sprawdz.: $\mathrm{vol}\,P = \sum \mathrm{vol}$(wszystkich "kratek")

$\forall i \quad \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \sum \mathrm{vol}$(kratek zawartych w $\tilde{P}_i$).

Zatem $\mathrm{vol}\,P \le \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,\tilde{P}_i \le |P|_z + 2\varepsilon.$