Analiza II*, 18 XI '11

Uwagi o 1-formach

1) funkcje (o wartościach w $\mathbb{R}$) = 0-formy

Jeśli $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \underset{\text{0-forma}}{\xrightarrow{\varphi}} \mathbb{R}$, to

$$f^*\varphi \stackrel{df}{=} \varphi \circ f.$$

Wtedy

$$f^* d\varphi = d(\varphi\circ f) = d f^*\varphi$$

czyli d jest przemienna z f^* (funktorialność d)

2) dla funkcji

$$d(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\, d\varphi_1 + c_2\, d\varphi_2$$

$c_1, c_2 = \mathrm{const}$,

$$d(\varphi\psi) = \varphi\, d\psi + \psi\, d\varphi$$

3) obliczyć różniczkę złożenia

$$d(\varphi(f_1, \dots, f_k)).$$

Można obliczyć to jak poprzednio: jeśli $f = (f_1, \dots, f_k)$ to

$$d(\varphi\circ f) = f^* d\varphi = f^*\left(\sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\, dy_j\right)$$

$$= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\circ f \; df_j.$$

Albo: ~~to~~

$$d\left(\varphi(f_1, \dots f_k)\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi(f_1, \dots f_k)\right) dx_i$$

$$= \sum_{j,i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \circ f \; \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \circ f \; \underbrace{\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i}_{df_j} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \circ f \; df_j .$$

4) Niech $(x,y) \xmapsto{f} (\overset{u}{x+y}, \overset{v}{x^2+y^2}, \overset{w}{x^3y^3})$,

$\omega = u\,dv + v\,dw + w\,du$; obliczyć $f^*\omega$.

Rozwiązanie:

$$f^*(\omega) = f^*(u\,dv) + f^*(v\,dw) + f^*(w\,du) =$$

$$= (u \circ f)\, d(x^2+y^2) + (v \circ f)\, d(x^3y^3) +$$

$$+ w \circ f \; d(\underset{x+y}{\cancel{x^3y^3}}) =$$

$$= (x+y)(2x\,dx + 2y\,dy) + (x^2+y^2)(3x^2y^3\,dx$$

$$+ 3x^3y^2\,dy) + x^3y^3(dx+dy) =$$

$$= \left(2x(x+y) + 3x^2y^3(x^2+y^2) + x^3y^3\right)dx +$$

$$+ \left(2y(x+y) + 3x^3y^2(x^2+y^2) + x^3y^3\right)dy .$$

Przykład zanurzenia $\mathbb{RP}^n$ w przestrzeń euklidesową.

$$\mathbb{RP}^n \ni (x_0 : \cdots : x_n) \xrightarrow[\text{na obraz}]{\text{homeomorfizm}} (u_{ij})_{i,j=0,\dots n}$$

(współrzędne w $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$

$$u_{ij} = \frac{x_i \cdot x_j}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

Łatwo sprawdzić, że obraz jest opisany równaniami:

$$\begin{cases} u_{ij}\, u_{kl} = u_{ik}\, u_{jl} & \text{dla wszystkich } i,j,k,l \\ u_{00} + u_{11} + \cdots + u_{nn} = 1 \end{cases}$$

Do tego układu jednak TFU się nie stosuje (można wykazać, że nie ma układu pól wektorowych, normalnych do obrazu, wszędzie liniowo niezależnych).

Grassmanniany $G_d(\mathbb{R}^n)$ = przestrzeń wszystkich d-wymiarowych podprzestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$, z naturalną topologią. Rozpatrzmy $\mathbb{R}^{n^2}$ jako wszystkie $n \times n$ macierze. Zanurzenie

$$G_d(\mathbb{R}^n) \ni H \longmapsto P_H = \text{rzut ortogonalny na } H$$
$$= \text{macierz } n \times n$$

Rzuty ortogonalne są macierzami scharakteryzowanymi przez równania $A^2 = A$, $A^* = A$ (na każdej składowej zbiór rozwiązań $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{const}$).

Ekstrema związane: Niech $M^d \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (lub określona w otoczeniu M).

Jeśli $f|_M$ osiąga w $x_0 \in M$ ekstremum lokalne i jest ~~[illegible]~~ różniczkowalna w x_0, to

$$\nabla f(x_0) \perp T_{x_0} M.$$

(oczywiste, bo dla dowolnej krzywej $(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\gamma} M$, $\gamma(0) = x_0$, $f \circ \gamma$ ma ekstremum lokalne w $t=0$, więc $0 = (f \circ \gamma)'(0) = f'|_{x_0} \dot{\gamma}|_0$; ale każdy wektor styczny do M w x_0 jest styczny do pewnej krzywej klasy C^1 leżącej w M).

W szczególności, jeśli $M: F_i = 0$, i do tego układu stosuje się TFU, to warunkiem koniecznym na ekstremum jest, by

$$\nabla f(x_0) = \sum \lambda_i \nabla F_i(x_0)$$

dla pewnych stałych λ_i (bo $\nabla F_i(x_0)$ rozpinają przestrzeń normalną do M w x_0).

Przykłady 1) $M: |x| = 1 \iff \sum x_i^2 = 1$,

$f(x) = \langle Sx, x \rangle$ = forma kwadratowa.

Jeśli w $x_0 \in M$ f osiąga ekstremum lokalne, to

$$\underbrace{\nabla f(x_0)}_{= Sx_0} = \lambda x_0 \qquad \left(\nabla\left(\sum x_i^2\right) = 2x \right)$$

czyli x_0 jest wektorem własnym S.

2) $\forall x_i > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Z jednorodności L i P wystarczy wykazać, że jeśli $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = 1$, to $x_1 + \cdots + x_n \geq n$;

czyli że $\inf\limits_{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1} (x_1 + \cdots + x_n) \geq n$.

Ekstrema lokalne: $\nabla(x_1 + \cdots + x_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\nabla(x_1 \cdots x_n - 1) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \cdots x_n \\ x_1 x_3 \cdots x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

g na $M: x_1 \cdots x_n - 1 = 0$

czyli uzyskujemy warunek konieczny:

$\dfrac{1}{x_i} = \lambda \implies$ wszystkie x_i muszą być równe

a wtedy wszystkie $x_i = 1$

więc $x_1 + \cdots + x_n = n$.

Zauważmy, że na M poza kulą o promieniu R przynajmniej jedno x_i musi być $\geq \dfrac{R}{\sqrt{n}}$. Jeśli więc $R = n\sqrt{n}$, to na M poza tą kulą $\implies x_1 + \cdots + x_n \geq n$.
Zatem $\inf(x_1 + \cdots + x_n) \geq n$.