Teoria miary

σ-ciało $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru (=przestrzeni) X:

1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$

2) $\forall A \in \mathfrak{M} \quad X \setminus A \stackrel{df}{=} A' \in \mathfrak{M}$

3) $\underset{n\in\mathbb{N}}{A_n \in \mathfrak{M}} \implies \bigcup A_n \in \mathfrak{M}$.

Stąd wynika, że $A \setminus B \in \mathfrak{M}$ dla $A, B \in \mathfrak{M}$, i $\bigcap A_n \in \mathfrak{M}$ dla $A_n \in \mathfrak{M}$.

Jeśli 3) zastąpić warunkiem: $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}$ to otrzymamy ciało zbiorów (=podalgebrę Boole'a 2^X).

Przykłady

1) $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$

2) $\mathfrak{M} = 2^X$

3) Dla $A \in X$ $\quad \mathfrak{M} = \{\emptyset, A, X\setminus A, X\}$

4) Jeśli $\mathfrak{A} \subset 2^X$ jest dowolną rodziną zbiorów, to jest pojęcie σ-ciała (albo ciała) zbiorów generowanego przez $\mathfrak{A}$: jest to najmniejsze (względem relacji $\subset$) σ-ciało (albo ciało) zawierające $\mathfrak{A}$; oczywiście jest to przekrój wszystkich σ-ciał (albo ciał) zawierających $\mathfrak{A}$.

Jeśli za $\mathfrak{A}$ weźmiemy wszystkie zb. otwarte (albo domknięte) przestrzeni ~~topologicznej~~ X, to σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ nazywa się σ-ciałem zbiorów borelowskich; jeśli $\mathfrak{A}$ składa się ze wszystkich podzbiorów zwartych X, to σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ nazywa się σ-ciałem zbiorów baire'owskich (dla $\mathbb{R}^n$ – lub ogólniej lokalnie zwartych ośrodkowych przestrzeni – te klasy pokrywają się).

5) Niech $Q = X$ będzie ~~wielościanem~~ kostką w $\mathbb{R}^n$:

$$Q = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n),$$

$\mathfrak{A}$ = rodzina wszystkich przecięć

$Q \cap$ półprzestrzeń

gdzie

półprzestrzeń = $\{x : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < A\}$

każdy zbiór postaci.

Ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ = wielościany w Q.

6) $X = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{A}$ = algebraiczne hiperpowierzchnie

tzn wszystkie zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{C}^n : P(x) = 0\}$$

P=wielomian

Ciało generowane przez $\mathfrak{A}$ = ciało zbiorów konstruowalnych;

$X = \mathbb{R}^n$; $\mathfrak{A}$ = wszystkie zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$$

P=wielomian

Ciało gener. przez $\mathfrak{A}$ = ciało zbiorów semialgebraicznych

7) X – dowolna; $\mathfrak{A}$ = rodzina wszystkich jednopunktowych zbiorów; wtedy

σ-ciało generowane przez $\mathfrak{A}$: zbiór wszystkich zbiorów albo przeliczalnych, albo o przeliczalnych uzupełnieniach

ciało gener. przez $\mathfrak{A}$: zbiór wszystkich zbiorów albo skończonych, albo o skończonych uzupełnieniach.

8) Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-ciałem (ciałem) podzbiorów X. $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{M}$ jest przeliczalnie addytywnym σ-ideałem (ideałem) jeśli:

a) $\underset{n \in \mathbb{N}}{A_n \in \mathfrak{I}} \Rightarrow \bigsqcup A_n \in \mathfrak{I}$

b) $\underset{\mathfrak{M}}{\overset{}{B}} \subset A \in \mathfrak{I} \Rightarrow B \in \mathfrak{I}$

(dla ciał: zastąpić a) warunkiem: $A, B \in \mathfrak{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{I}$).

Niech $\underset{A, B \in \mathfrak{M}}{A \sim B} \Leftrightarrow A \dot{-} B \overset{df}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{I}$.

Wtedy zbiór $\mathfrak{M}/\mathfrak{I}$ klas abstrakcji jest σ-ciałem (ciałem) — w definicji ciała lub σ-ciała opuścić warunek, że chodzi o podzbiory jakiejś przestrzeni, a działania określić aksjomatycznie.

<u>Miara μ</u> na σ-ciele $\mathfrak{M}$: funkcja

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathbb{R}}_+ \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

z umowami:

$\infty + \infty = \infty$, $a + \infty = \infty$,

$0 \cdot \infty = 0$

$a \cdot \infty = \infty \quad \forall a > 0$

$a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

z własnościami:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(\bigsqcup A_n) = \sum \mu(A_n)$

przeliczalna addytywność $\quad \forall A_n \in \mathfrak{M}$

A_n = parami rozłączne: $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n, m$.

μ skończona: $\mu(X) < \infty$

unormowana: $\mu(X) = 1$

półskończona: $X = \bigcup X_n$, $X_n \in \mathfrak{M}$, $\mu(X_n) < \infty$

μ zupełna: jeśli $\underset{\mathfrak{M}}{A \subset \underset{\cap}{B}}$, $\mu(B)=0$, to $A \in \mathfrak{M}$.

Przykłady: 1) $\mathfrak{M} = 2^X$,

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A=\emptyset \\ \infty & A \neq \emptyset \end{cases}$$

2) $\mathfrak{M} = 2^X$

$$\mu(A) = \begin{cases} \bar{\bar{A}} & \text{gdy } \bar{A} < \infty \\ \infty & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$$

3) $\mathfrak{M} = 2^X$, $\quad f: X \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

(jeśli ~~A~~ $A \setminus \{x : f(x)=0\}$ jest nieprzeliczalny, to tę sumę uważamy za $+\infty$)

4) $\mathfrak{M} = 2^X$, $\quad x_0 \in X$, $\quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$

5) Obcięcie miary do podzbioru $Y \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathfrak{M}\} = \{A \in \mathfrak{M} : A \subset Y\}$$

$$\mu_Y(A) = \mu(A)$$

dla $A \in \mathfrak{M}_Y$.

<u>Addytywna funkcja zbioru</u> μ: zamiast 2) – addytywność: μ – określ. na <u>ciele</u> zbiorów $\mathfrak{N}$

2') $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$A, B \in \mathfrak{N}$.

Często rozpatruje się też f. zbioru, tzw. (addyt. lub przeliczalnie addytywne), które nie są nieujemne, albo przyjmują wartości w jakiejś przestrzeni wektorowej.

<u>Przykłady takich funkcji</u>: $\mathfrak{N}$ = ciało podwielościanów Q (jak w przykładzie 5)

1) $\mathfrak{N} \ni A \longmapsto \chi(A)$ = charakterystyka Eulera A

2) niezmiennik Dehna: f = addytywna $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$n=3$
(tzn $f(x+y) = f(x) + f(y)$),

$f(\pi) = 0$

$$\underset{A \in \mathcal{W}}{DA} = \sum l_i \, f(\alpha_i)$$

długości krawędzi A — kąty dwuścienne przy tych krawędziach.

3) jeśli $\mu : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^+$ jest addytywna, to jest postaci $\mu(A) = c\,|A|$

const ≥ 0 — objętość A.

Najprostsze własności miary

1) $A \subset B$, $A, B \in \mathfrak{M}$ $\Rightarrow$ $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotoniczność)

bo $B = \underset{\mathfrak{M}}{(B \setminus A)} \sqcup \underset{\mathfrak{M}}{A}$

$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$

2) $A \subset B$, $A, B \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) < \infty$ $\Rightarrow$

$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(wynika z poprzedniego dowodu, bo odejmowanie jest wykonalne)

3) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

$A, B \in \mathfrak{M}$, $\mu(A \cap B) < \infty$ — analogicznie

(te własności są słuszne również dla addytywnych funkcji zbioru)

4) $\mu(\bigcup A_n) \le \sum \mu(A_n)$ $\quad A_n \in \mathfrak{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5) a) jeśli $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_n \in \mathfrak{M}$, to $\mu(\bigcup A_n) = \lim \mu(A_n)$

(ozn.: $A_n \nearrow$)

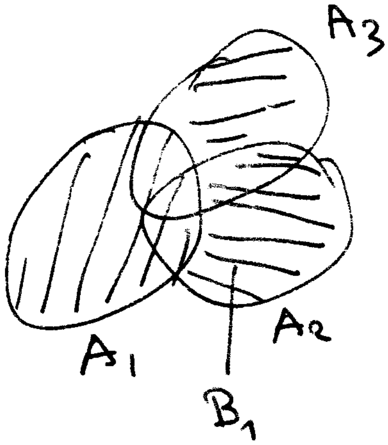
b) jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, to $\mu(\bigcap A_n) =$

(ozn.: $A_n \searrow$), $A_n \in \mathfrak{M}$ $\qquad = \lim \mu(A_n)$

o ile $\mu(A_1) < \infty$ (lub, ogólniej, $\mu(A_k) < \infty$ dla pewnego k).

<u>Dowody</u>: rozłącznianie zbiorów: niech $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in \mathbb{N})$;

wtedy $\exists B_n \in \mathfrak{M}$, parami rozłączne, $B_n \subset A_n$



$\bigsqcup B_n = \bigcup A_n$ i nawet $\forall k$

$\bigcup_{n \le k} B_n = \bigcup_{n \le k} A_n$

konstrukcja:

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus B_1$

$B_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$

$\vdots$

$B_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$

ad 4): $\mu(\bigcup A_n) = \mu(\bigsqcup B_n) = \sum \mu(B_n) \le \sum \mu(A_n)$

ad 5a): B_n = rozłącznienie A_n; w tym wypadku

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ...

$\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(B_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n)$

$= \lim \mu(A_k)$.

ad 5b) Niech $\mu(A_k)<\infty$; mamy

$$\mathfrak{M} \ni A_j' = A_k \setminus A_{k+j} \nearrow$$

Zatem

$$\mu\left(\bigcup A_j'\right) = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\mu(A_j')}_{\mu(A_k)-\mu(A_{k+j})} =$$

$$= \mu(A_k) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\bigcup A_j' = A_k \setminus \bigcap A_{k+j} = A_k \setminus \bigcap A_n,$$

co kończy dowód.

6) Uzupełnianie miary: μ - określona na $\mathfrak{M}$.

Niech $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{ A \cup B : A \in \mathfrak{M},\ B \subset C \in \mathfrak{M},\ \mu(C) = 0\}$,

$\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$.

Wtedy $\widetilde{\mathfrak{M}}$ jest σ-ciałem zbiorów, $\tilde{\mu}$ jest dobrze określona (tzn. nie zależy od przedstawienia zbioru $C \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ w postaci $A \cup B$), i $\tilde{\mu}$ jest miarą zupełną.

Dowód jest bezpośredni i łatwy (ćwiczenie).