Pola wektorowe

$\mathbb{R}^n \underset{\text{otw}}{\supset} U$; pole wektorowe = funkcja,

która każdemu $U \ni x \longmapsto v(x) \in T_x \mathbb{R}$

Jeśli e_i = baza w $\mathbb{R}^n$, to $v(x) = \sum v_i(x) e_i$

funkcje o wartościach skalarnych

$v \in C^1 \overset{df}{\iff}$ wszystkie $v_i \in C^1$.

Jeśli $x_0 \in U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $v(x_0) \in T_{x_0} \mathbb{R}^n$,

to $\partial_{v(x_0)} f \in T_{y_0} \mathbb{R}^m$, $y_0 = f(x_0)$; czyli

$f'|_{x_0} : T_{x_0} \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{y_0} \mathbb{R}^m$ jest przekszt. liniowym

(w bazach e_i, E_j jego macierz jest macierzą Jacobiego $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right)$).

Ale ta operacja nie przenosi się na pola wektorowe: jeśli $f(x_0) = f(x_1) = y_0$, to nie ma powodu, żeby

$$f'|_{x_0}(v(x_0)) = f'|_{x_1}(v(x_1)).$$

Ta trudność znika, jeśli f jest różnowartościowa.

Ale nawet wtedy, gdy $v \in C^1$, to $f'v$ może nie być C^1.

Przykład: $n=m=1$, $f(x)=x^3$, $v(x)=1$ $\forall x$

$$f'(x)\,v(x) = 3x^2 \quad ; \text{ więc jeśli } y = x^3,$$

to dla $w(y) = f'(x)\,v(x)$

$$w(y) = 3y^{2/3} \notin C^1.$$

Ta operacja (indukowanie) jest dobrze określone, gdy f jest dyfeomorfizmem:

$$U \xrightarrow[\text{dyfeom. klasy } C^1]{f} W = f(U) \quad , \quad v = \text{pole wekt. na } U$$

Określamy

$$(f'v)(y) = f'|_x\, v(x)$$

gdzie $x = f^{-1}(y)$

[jeśli tylko założyć, że $f \in C^1$, to $f'v$ nie musi być C^1; ale jeśli $f \in C^{m+1}$, $v \in C^m$, to $f'v \in C^1$ – będzie później].

1-formy różniczkowe: w punkcie x_0: elementy $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ = funkcjonały na $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Różniczka funkcji φ (słabo różniczk. w x_0) określa

$$d\varphi\,(v) = \partial_v \varphi\,(x_0).$$

Jeśli e_i = baza $\mathbb{R}^n$, x_i = współrzędne, to

$$dx_i(v) = \partial_v x_i = v_i = \text{współrzędne } v$$
w bazie e_i

Zatem dx_i = baza sprzężona do e_i (zaczepionych w x_0).
Oczywiście $d\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$, bo $d\varphi(v) = \partial_v \varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underbrace{v_i}_{= dx_i(v)}$

Jeśli $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ słabo różniczk. w $x_0 \in U$,

to $T^*_{y_0}\mathbb{R}^m \xrightarrow{f^*} T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ jest to przekszt. sprzężone

do $f'|_{x_0}$ (jak zwykle $y_0 = f(x_0)$).

$$\underset{T_{x_0}\mathbb{R}^n \ni}{f^*(d\varphi)\;(v)} = d\varphi\,(f'_{x_0} v) = d(\varphi \circ f)(v)$$

czyli
$$f^* d\varphi = d(\varphi \circ f) \quad \text{(wszystko w odpowiednich punktach)}$$

W szczeg.
$$f^* dy_j = d(\underbrace{y_j \circ f}) = df_j$$
f_j = współrzędne f w bazie E_j.

Oczywiście, z liniowości

$$f^*(c_1 d\varphi_1 + c_2 d\varphi_2) = c_1 d(\varphi_1 f) + c_2 d(\varphi_2 f)$$

<u>Przykład</u>: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$
$$(r, \varphi) \longrightarrow (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Obliczyć
$$f^* dx, \quad f^* dy.$$

Rozw.: $f^* dx = d(x \circ f) = d(r\cos\varphi) = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

[Przyp: $d(\varphi\psi) = \psi d\varphi + \varphi d\psi$, bo

$$d(\varphi\psi)(v) = \partial_v(\varphi\psi) = \varphi\partial_v\psi + \psi\partial_v\varphi$$
$$= (\varphi d\psi + \psi d\varphi)(v)\ ].$$

1-forma na U: funkcja, która każdemu x przyporządkowuje $\omega(x) = \omega_x \in T_x^*\mathbb{R}^n$. We współrzędnych: dx_i = baza $T_x^*\mathbb{R}^n$ $\forall x$, więc każda ω piszemy się jednoznacznie jako

$$\sum \omega_i(x)\, dx_i \quad , \quad \omega_i : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\omega \in C^0$ lub C^1 $\iff$ wszystkie ω_i ~~...~~ $\in C^0$ lub C^1.

⚠ nie jest prawdą, że każda ω jest różniczką funkcji. Bo $d\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i$; więc jeśli $\omega = d\varphi$, to $\omega_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ $\forall i$; taka φ nie zawsze istnieje (będzie później).

Niech $U \xrightarrow[f]{\in C^1} \mathbb{R}^m$, ω = 1-forma na $W \subset \mathbb{R}^m$. Wtedy określamy $f^*\omega$ = 1-forma na $f^{-1}(W)$:

$$(f^*\omega)(x) \overset{df}{=} f_x^*(\omega_y)$$
$$y = f(x)$$

Na współrzędnych:

$$\omega = \sum \omega_j(y)\, dy_j$$

$$(f^*\omega)(x) = \sum \omega_j(f(x))\, f^*|_x dy_j$$
$$= \sum \omega_j(f(x))\, df_j(x),$$

czyli

$$\boxed{f^*\omega = \sum \omega_j \circ f\; df_j}$$

(w odróżnieniu od pól wektorowych tu nie występuje konieczność brania f^{-1}, i ta operacja jest dobrze określona dla wszystkich $f \in C^1$)

Później będzie, że jeśli $\omega \in C^m$, $f \in C^{m+1}$, to $f^*\omega \in C^m$.

<u>Podrozmaitości (klasy C^1) d wymiarowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$</u>: takie podzbiory M, że:

$$\forall x_0 \in M \quad \exists \text{ otoczenie } x_0 \in U \underset{\text{otw}}{\subseteq} M$$

$U \cap M$ jest wykresem funkcji klasy C^1
(przy pewnym rozbiciu zmiennych w $\mathbb{R}^n$)
czyli: istnieje taka permutacja

~~$i_1, \dots, i_d, j_1, \dots$~~

$(i_1, \dots i_d, i_{d+1}, \dots i_d)$

że $U \cap M$: $x_{i_\mu} = \varphi_\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$, $\varphi_\mu \in C^1$

Tu układ współrzędnych pochodzi od dowolnej bazy.

Przyjmujemy notację: $x' = (x_{i_1}, \dots x_{i_d})$, $x'' = (x_{i_{d+1}}, \dots x_{i_n})$ (6)

czyli
$$U \cap M : x'' = \varphi(x').$$

<u>Np.</u> sfery, walce; stożek – nie, globalne wykresy

<u>Podrozmaitości określone przez układy równań:</u>

niech $M : F_1 = 0, \dots, F_c = 0$
(gdzie $F_i \in C^1$ w otoczeniu M); załóżmy, że w każdym $x_0 \in M$ ~~$\nabla F_1(x_0)$~~ $\nabla F_1(x_0), \dots \nabla F_c(x_0)$ są lin. niezal., czyli
$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\dots c\\ j=1,\dots n}} = c.$$
Wtedy M jest podrozmaitością wymiaru $d = n - c$ (c nazywa się kowymiarem M: $c = \operatorname{codim} M$).

Bo wybierzmy, w x_0, minor rzędu c, $\neq 0$:
$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_c)}{\partial(x_{i_1}, \dots x_{i_c})}(x_0) \neq 0.$$
Wtedy, na mocy TFU, równania
$$F_1(x', x'') = 0, \dots \quad F_c(x', x'') = 0$$
można rozwikłać względem x'', gdzie
$$x'' = (x_{i_1}, \dots x_{i_c})$$
$$x' \text{ – pozostałe}$$
czyli $F_i(x', x'') = 0 \iff x'' = \varphi(x')$ punktu x_0

$\Updownarrow$ $(x', x'') \in M$ $\qquad$ $\Updownarrow$ M jest wykresem w otoczeniu

Podrozmaitości określone jako obraz przekształcenia

Niech

$$\underset{u_1, \dots, u_d}{\mathbb{R}^d_u} \overset{\text{otw}}{\supset} V \xrightarrow{F} \overset{\in C^1}{} \mathbb{R}^n_x$$

F różnowartościowe

$F'|_u$ injekcja $\forall u \in V$

Wtedy $M = F(V)$ jest podrozmaitością wymiaru

Bo niech $x_0 = F(u_0) \in M$. Z macierzy $\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}(u_0)\right)$ wybierzmy maksymalny minor niezerowy:

$$\frac{\partial(F_{i_1}, \dots, F_{i_d})}{\partial(u_1, \dots, u_d)}(u_0) \neq 0.$$

Na mocy TFO przekszt. $(F_{i_1}, \dots F_{i_d})$ jest dyfeomorfizmem w otoczeniu u_0. Zatem istnieje odwrotne, klasy C^1:

$$F_{i_1}(u) = x_{i_1}, \dots \quad F_{i_d}(u) = x_{i_d}$$

$$\Updownarrow$$

$$u = \Phi(x_{i_1}, \dots x_{i_d}).$$

Niech $x_{i_{d+1}}, \dots x_{i_n}$ = pozostałe zmienne.

Obraz przy F otoczenia punktu u_0 daje się przedstawić jako

$$x_{i_l} = F_{i_l} \circ \Phi(x_{i_1}, \dots x_{i_d}). \quad l > d$$

Wyznaczenie płaszczyzny stycznej. Z tego, że lokalnie podrozmaitość jest wykresem wynika od razu, że

1° każda płaszcz. styczna jest d-wymiarowa

2° każdy wektor ~~ξ~~ $v \in T_{x_0}M$ jest styczny do pewnej krzywej γ, klasy C^1, leżącej w M.

Niech $M: F_1 = 0, \ldots, F_c = 0$, i spełnione ~~są~~ jest założenie: $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right) = c$. Jeśli $\gamma(t) \in M \ \forall t$, to $F_i(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow F_i'(\dot{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \nabla F_i \perp \dot{\gamma}$. Zatem wszystkie ∇F_i są prostopadłe do płaszcz. stycznej, i $T_{x_0}M = \operatorname{span}(\nabla F_1(x_0), \ldots, \nabla F_c(x_0))$

$\nabla F_i|_M$ ~~tworzą~~ tworzą c pól, liniowo niezależnych w każdym punkcie, rozpinających przestrzeń normalną $T_{x_0}^{\perp}M$.

Jeśli $M = F(V)$, $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right) = d$, to oczywiście pola wektorowe

$$v_1\Big|_{F(u)} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial u_1}(u)\, e_i, \ \ldots, \ v_d\Big|_{F(u)} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial u_d}(u)\, e_i$$

są liniowo niezależne na M i rozpinają w każdym punkcie płaszczyznę styczną.