14. X. 2001

Dowód wzoru Leibniza: $(\varphi f)'(x_0) = \varphi'(x_0) f(x_0) + \varphi(x_0) f'(x_0)$.

$$\left[\text{czyli} \quad (\varphi f)'\big|_{x_0}(h) = \underbrace{\varphi'\big|_{x_0}(h)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underset{\in Y}{f(x_0)} + \underset{\in \mathbb{R}}{\varphi(x_0)}\, \underset{\in Y}{f'\big|_{x_0}(h)} \right.$$

$$\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + \varphi'\big|_{x_0} h + R(h) \qquad |R(h)| \le \varepsilon |h|$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'\big|_{x_0} h + S(h) \qquad |S(h)| \le \varepsilon |h|$$

(dla $|h| < \delta$)

$\Rightarrow$

$$\varphi(x_0+h) f(x_0+h) - \varphi(x_0) f(x_0) =$$

$$= \underbrace{\varphi(x_0) f'\big|_{x_0}(h) + \varphi'\big|_{x_0}(h)\, f(x_0)} +$$

$$+ \underbrace{\varphi(x_0) S(h)} + R(h) f(x_0) + \varphi'\big|_{x_0}(h) \cdot S(h)$$

$$+ f'\big|_{x_0}(h)\, R(h) + R(h) S(h)$$

część liniowa przyrostu

$$|\quad| \le |\varphi(x_0)| \cdot \varepsilon |h| ,$$

$$|R(h) f(x_0)| \le \varepsilon |h|\, |f(x_0)| , \quad \text{itd.}$$

Dowód reguły różniczk. złożenia:

Niech $g(x_0) = y_0$; wtedy

$$g(x_0+h) = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + g'\big|_{x_0} h + R(h) \qquad |R(h)| \le \varepsilon \quad |h| \le \delta$$

$$f(y_0+k) = f(y_0) + f'\big|_{y_0} k + S(k) \qquad |S(k)| \le \varepsilon |k| \quad |k| \le \delta$$

$$\Rightarrow \quad f\circ g\,(x_0+h) = f\Big(y_0 + \underbrace{g'\big|_{x_0} h + R(h)}_{k}\Big)$$

$$|k| \le |g'|_{x_0}|\,|h| + \varepsilon |h|$$

norma operatora

więc $\quad |k| < \delta \quad$ o ile

$$|h| \le \frac{\delta}{|g'|_{x_0}| + \varepsilon} \overset{df}{=} \delta_1 .$$

Niech $|h| < \min(\delta, \delta_1)$; wtedy $|k| < \delta$ i

$$f\circ g\,(x_0+h) = \underbrace{f(y_0)}_{\substack{\parallel \\ f\circ g(x_0)}} + f'\big|_{y_0} k =$$

$$= f\circ g\,(x_0) + \underbrace{f'\big|_{y_0} g'\big|_{x_0}}_{f'(y_0)\circ g'(x_0)\,h} h + \underbrace{f'\big|_{y_0} R(h)}_{\text{co do normy jest}}$$

$$\le |f'|_{y_0}|\,|R(h)|$$

$$\le |f'|_{y_0}|\,\varepsilon$$

Przykłady

1) pochodna przekszt. liniowego $A : X \to Y$

$$A'|_{x_0} = A, \qquad \forall x_0$$

2) pochodna przekszt. odwrotnego (jeśli istnieje – będzie później dokładniej o tym – tw. o funkcji odwrotnej)

$$f \circ g = id$$

$$\Rightarrow \quad f'|_{y_0} \circ g'|_{x_0} = I \qquad y_0 = g(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f'|_{y_0} = (g'|_{x_0})^{-1}$$

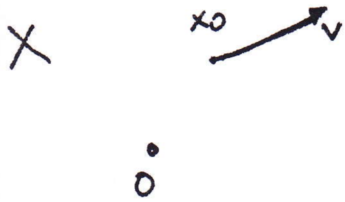
3) jeśli A = liniowe, to

$$(A \circ f)'|_{x_0} = A \circ f'|_{x_0}.$$

4) w terminach pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)|_{x_0} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(y_0)\, \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x_0)$$

dlaczego to jest mylące: bo $A'|_{x_0}$ lepiej myśleć, że jest określone na wektorach zaczepionych w x_0 i przyjmuje wartości w przestrzeni wektorów zaczepionych w $y_0 = A(x_0)$



– takie wektory oznaczmy przez $T_{x_0}X$;
przez przesunięcie równoległe
$T_{x_0}X$ można utożsamić z X.

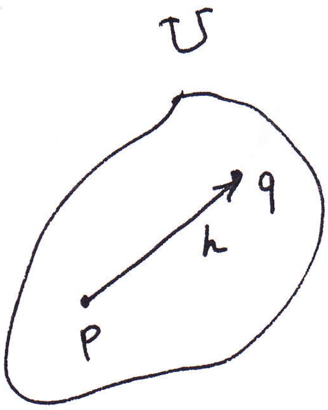
czyli: A jest określone na <u>punktach</u> X (= wektory zaczepione w o), a $A'|_{x_0}$ – na wektorach z $T_{x_0}X$.

Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji o wartościach skalarnych

$X \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Załóżmy, że odcinek $\overline{pq} \subset U$ (domknięty),

$$h = q - p,$$

i we wszystkich punktach ~~tego odcinka~~ istnieje skończona $\partial_h f$. Wtedy dla pewnego $\xi \in \overline{pq}$



$$f(q) - f(p) = \partial_h f(\xi).$$

W szczególności, jeśli f jest słabo różniczk. we wszystkich punktach $\overline{pq}$, to

$$f(q) - f(p) = f'_{\xi} \cdot h \underset{\text{ozn.}}{=} f'(\xi)(q-p)$$

D. niech $\varphi(t) = f(p + th)$ $\quad t \in [0,1]$. Wtedy

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w $[0,1]$

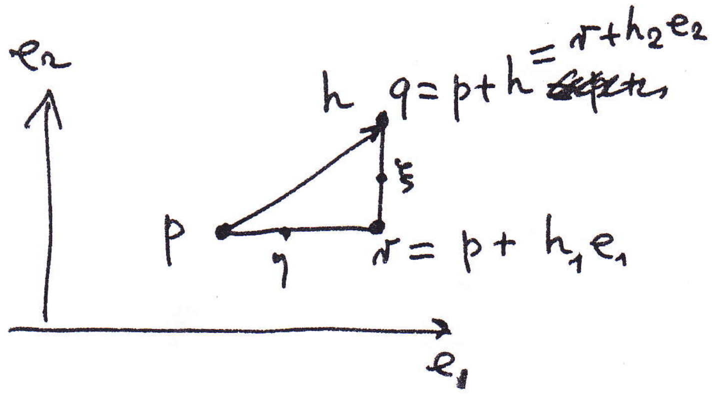
$$\underset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\| \\ f(q)}}{\varphi(1)} - \underset{\substack{\| \\ f(p)}}{\varphi(0)} = \underbrace{\varphi'(\xi)}_{\substack{\|\,\text{def} \\ \partial_h f(\xi).}}$$

Wniosek (konstruktywny warunek dostateczny na różniczkowalność w przestrzeniach skończ. wym.)

Jeśli (w jakiejś bazie $e_i \in \mathbb{R}^n$) istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{\text{ozn.}}{=} \partial_{e_i} f$ w otwartym U i są ciągłe, to f jest w każdym punkcie U różniczkowalna.

Dowód, dla $X = \mathbb{R}^2$ (dowód dla $\mathbb{R}^n$ - identyczny).

Niech $p \in U$; wykażemy różniczkowalność f w p.



$h = h_1 e_1 + h_2 e_2$

Stosujemy tw. o wartości średniej do obu odcinków pr i rq:

$$f(q) = f(p+h) = f(r) + \partial_{e_2} f(\xi)\, h_2$$

dla pewnego $\xi \in [rq]$

$$= f(p) + \partial_{e_1} f(\eta)\, h_1 + \partial_{e_2} f(\xi)\, h_2$$

dla pewnego $\eta \in [pr]$

$$= f(p) + \underbrace{\partial_{e_1} f(p)\, h_1 + \partial_{e_2} f(p)\, h_2}_{} +$$

$$+ \underbrace{\left[\partial_{e_1} f(\eta) - \partial_{e_1} f(p)\right] h_1 + \left[\partial_{e_2} f(\xi) - \partial_{e_2} f(p)\right] h_2}_{\text{kandydat na resztę.}}$$

$h \mapsto \partial_{e_1} f(p) h_1 + \partial_{e_2} f(p) h_2$ jest liniowe

więc jest to kandydat na pochodną

Szacujemy resztę, np. pierwszy składnik:

z ciągłości $\partial_{e_1} f$:

$$|\partial_{e_1} f(\eta) - \partial_{e_1} f(p)| < \varepsilon \quad \text{o ile tylko}$$
$$|r - p| < \delta$$

$|h_1| \leq C|h|$ dla pewnej stałej C zależnej tylko od bazy e_i (⚠ w bazie ortonormalnej oczywiście $|h_1| \leq |h|$)

Analogicznie drugi składnik.

Uogólnienie wniosku na ~~przes~~funkcje o wartościach wektorowych, ale w przestrz. skończonego wymiaru.

$$\mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

e_i = baza w $\mathbb{R}^n$ $\qquad$ E_j = baza w $\mathbb{R}^m$

$$f(x) = \sum f_j(x)\, E_j$$

to są współrzędne f w bazie E_j = funkcje o wartościach skalarnych; $f_j = \pi_j \circ f$, gdzie π_j = rzut na j-tą oś: $\pi_j\left(\sum_k \lambda_k E_k\right) = \lambda_j E_j$

Wtedy, oczywiście:

f jest różniczk. w x_0 $\Longleftrightarrow$ wszystkie f_j są różniczk. w x_0 i

$$f'(h) = \sum f_j'(h)\, E_j .$$

Zatem:

jeśli w pewnych bazach e_i, E_j j. wyżej, wszystkie $\partial_{e_i} f_j$ istnieją i są ciągłe w U, to f jest różniczk. we wszystkich punktach U