Jak tw. przygotowawcze w postaci „ogólnej" wynika z wersji o dzieleniu przez wielomian wyróżniony (będzie ważne w dowodzie dla funkcji klasy C^∞).

Zakładamy więc, że jeśli

$$P = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x')\, x_n^i$$

to każdą $f(x)$ (C^∞ lub $\mathcal{O}$) można przedstawić w postaci

$$f(x) = q(x)\,P(x) + \sum_{i<p} r_i(x')\, x_n^i$$

(q, r_i – tej samej klasy). [z tej wersji wynika już – korzysta się tylko z różniczkowania i TFU, było poprzednio – że jeśli f spełnia:

$$\frac{\partial^i f}{\partial x_n^i}(0) = 0 \quad 0 \le i < p, \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_n^p}(0) \neq 0$$

to f jest równoważne wielomianowi wyróżnionemu stopnia p: $f = QP$ dla pewnego p jak wyżej, $Q(0) \neq 0$].

<u>Tw</u> $A_x = \mathcal{O}_x$ lub $\mathcal{E}_x$; Niech $(\mathbb{R}^n_x, 0) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^m_y, 0)$ – tej samej klasy: $\varphi_i \in A_x$; niech M będzie skończenie generowanym A_x-modułem. Jeśli

$$\dim_{\mathbb{R}} M / \mathfrak{m}_y M < \infty$$

to M jest skończenie generowanym A_y-modułem.

⚠ 1) jak zwykle ~~$\mathcal{O}_y$~~ ~~zas~~ $m_y \subset A_y$ jest ideałem maksymalnym (jedynym), $A_y \xrightarrow{\varphi^*} A_x$, M jest $\mathcal{O}_y$ modułem:

2

$$\cancel{f(y)\otimes} \; f(y) \odot m = f(\varphi(x))\, m .$$

oznaczenie chwilowe

mnożenie w sensie M

$\Rightarrow m_y M = A_y \mathcal{O}_y$- podmoduł M złożony z wszystkich elementów postaci

$$\sum_{sk} f_i(\varphi(x))\, m_i \;, \qquad f_i \in A_y \;, \; m_i \in M .$$

2) implikacja przeciwna jest również prawdziwa i jest oczywista.

Dowód: I krok: φ jest włożeniem (czyli immersją, bo tw. jest lokalne). Wtedy

$$A_y \xrightarrow{\varphi^*} A_x$$

jest surjektywne, więc jeśli e_i generują M nad A_x, to tym bardziej nad A_y.

II krok (zasadniczy): φ jest rzutem:

~~$\mathbb{R}^n_x \longmapsto$~~

$$\mathbb{R}^n_x \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \xmapsto{\varphi} (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}_y$$

czyli φ: $\quad y_\alpha = x_\alpha$
$\alpha \le n-1$.

③

Weźmy takie $m_i \in M$, że

1° m_i generują M nad A_x

2° $[m_i]$ generują $M / \mathfrak{m}_y M$ nad $\mathbb{R}$.

Z 1° i 2° wynika, że każdy element $m \in M$ daje się zapisać w postaci

$$m = \sum_{c_j \in \mathbb{R}} c_j \cdot m_j + \underbrace{\text{coś z } \mathfrak{m}_y M}_{\sum_{sk} \psi_k(\varphi(x)) z_k}$$

$z_k \in M$

$\psi_k(y_1, \dots y_{n-1}) \in \mathfrak{m}_y$ tzn. $\psi_k(0) = 0$

$z_k = \sum f_{ik}(x) m_k$

$f_{ik} \in A_x$

czyli to „coś" jest postaci

$$\sum \lambda_i(x) m_i$$

gdzie $\lambda_i \in A_x$,

$\lambda_i = 0$ gdy $x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$,

tzn λ_i zerują się na osi x_n.

Ostatecznie każde m zapisuje się jako

$$m = \sum_{\mathbb{R}} c_j \cdot m_j + \sum \lambda_j(x) m_j$$

zerują się na osi x_n.

Stosujemy to do wszystkich elementów postaci $x_n m_i$:

$$x_n m_i = \sum_j (c_{ij} + \lambda_{ij}(x)) m_j,$$

więc

$$\sum_j \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} - \lambda_{ij}(x) \right) m_j = 0 .$$

4

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to istnieje taka macierz B, że

$$BA = AB = \det A \cdot I$$

(oczywiście B jest macierzą transponowaną do macierzy utworzonej z ~~...~~ dopełnień algebraicznych elementów ~~...~~ macierzy ~~...~~ A). Przyjmujemy za

$$A = \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} - \lambda_{ij}(x) \right)_{i,j=1,\dots n}$$

i stosując B do równości uzyskamy:

$$\det A \cdot m_j = 0 \quad \forall j$$

czyli

$$\det A \cdot M = 0$$

Niech $P = \det A = P(x)$. Jeśli $x' = 0$, to $\lambda_{ij} = 0$, więc

$$P(0, x_n) = \det \left(x_n \delta_{ij} - c_{ij} \right) =$$

wielomian względem x_n, niezerowy, stopnia $p \leq n$.

Zatem P jest równoważne wiel. wyróżnionemu stopnia p:

$$P \sim P_1 = x_n^p + \sum_{i<p} a_i(x') x_n^i$$

i M jest generowany nad A_y przez wszystkie

$$x_n^s m_i, \qquad s = 0, \dots, p-1.$$

[każdy $m \in M$ jest postaci
$$m = \sum \psi_i(x)\, m_i$$
$$\psi_i \in A_x \qquad i$$
niech $\psi_i(x) = q_i(x)\, P_1(x) + r_i(x)$
$$r_i(x) = \sum_{j<p} r_{ij}(x')\, x_n^j\,;$$
wtedy
$$m = \underbrace{P_1 \sum q_i m_i}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ bo } PM=0} + \sum \underbrace{r_{ij}(x')\, x_n^j m_i}_{r_{ij} \odot x_n^j m_i}$$
bo r_{ij} pochodzą z A_y przez złożenie z φ = rzut].

III krok: Jeśli tw. jest prawdziwe dla ~~$\varphi_1 \varphi_2$~~ φ, ψ:
$$\cancel{A_\varphi} \quad \mathbb{R}^n_x \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m_y \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^l_z$$
to jest prawdziwe dla złożenia ~~$\psi\varphi$~~ $\psi \circ \varphi$. Bo niech M będzie sk. gener. nad A_x, i
$$\dim_{\mathbb{R}} (M / m_z M) < \infty.$$
$\psi^*(m_z) \subset m_y$, więc tym bardziej $\dim_{\mathbb{R}}(M/m_y M) < \infty$. Zatem M jest sk. generowany nad A_y; zatem M jest sk. generowany nad A_z.

IV krok: dowolne φ można przedstawić jako złożenie
$$\mathbb{R}^n_x \xrightarrow[\text{na wykres } \varphi]{\text{zanurzenie}} \mathbb{R}^{n+m}_{(x,y)} \xrightarrow{\text{rzut}} \mathbb{R}^{n-1+m}_{(x_1,\dots x_{n-1}, y)} \to \dots \mathbb{R}^m_y$$
$$x \longmapsto (x, \varphi(x)) \qquad (x,y) \longmapsto (x_1, \dots x_{n-1}, y)$$
co kończy dowód.

Równoważność funkcji i jej tasiemca Taylora.

$(\mathbb{R}^n_x,0) \xrightarrow[\text{kiełek } C^\infty]{f} (\mathbb{R},0)$; $(\mathbb{R}^n_x) \xrightarrow[\text{wielomianowe}]{T_0^m f} \mathbb{R}$,

Kiedy istnieje taki dyfeom. $(\mathbb{R}^n_x,0) \overset{h}{\circlearrowleft}$, że
$f\circ h^{-1} = T_0^m f$ (dla $m >> 0$) ?

<u>Tw</u> Jeśli ideał $I = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \supset \mathfrak{m}^k$ dla pewnej k, to takie h i m istnieje (nawet $m=2k+1$)

⚠ Warunek $I \supset \mathfrak{m}^k$ zależy tylko od $T_0^{k+1} f$.

Bo niech $I_k = I \cap \mathfrak{m}^k \underset{\text{zawsze}}{\subset} \mathfrak{m}^k$; wtedy $I \supset \mathfrak{m}^k \iff I_k = \mathfrak{m}^k$, a

tak jest $\underset{\text{Nakayama}}{\iff}$ $\mathfrak{m}^k = I_k + \mathfrak{m}^{k+1}$, czyli

$$\mathfrak{m}^{k+1} + I \supset \mathfrak{m}^k$$

Ten warunek zależy tylko od klas $\frac{\partial f}{\partial x_i} \bmod \mathfrak{m}^{k+1}$ czyli od klasy $f \bmod \mathfrak{m}^{k+2}$, czyli od rozwinięcia Taylora f rzędu $k+1$.

<u>Dowód tw</u> Z założenia każde x^α $(|\alpha| = k)$ daje się przedstawić w postaci

$$x^\alpha = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\lambda_i(x)$$

a stąd

$$x^\beta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \lambda_i(x) \qquad |\beta| \geq k$$

dla pewnych $\lambda_i \in \mathfrak{m}^{|\beta|-k}$

Niech $P(x) = T_0^{2k+1} f(x)$; zatem

$$f = P + R, \qquad R \in \mathfrak{m}^{2k+2}.$$

Szukamy takiego $h = x +$ coś z $\mathfrak{m}^2$, że
$P \circ h = f$. (nawet z $\mathfrak{m}^{k+1}$)

Niech $h(x) = x + \lambda(x)$, ~~gdzie~~ $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$,

$\lambda_i(x)$ będzie postaci (7)

$$\lambda_i(x) = \sum \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)\, \eta_{j,i}(x)$$

nowe funkcje

(czyli każde λ_i są w I), bo ideał generowany przez wszystkie $\frac{\partial P}{\partial x_j}$ jest ideałem generowanym przez wszystkie $\frac{\partial f}{\partial x_j}$).

$$P(x + \lambda(x)) = P(x) + \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\lambda_i(x) +$$

$$+ \sum R_{kl}(x, \lambda(x))\, \lambda_k(x)\, \lambda_l(x)$$

(Taylor rzędu 2)

Ale $R(x) = \sum \frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial P}{\partial x_j}(x)\, \psi_{ij}(x)$,

$\psi_{ij}(0) = 0$.

Zatem mamy równanie

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} \psi_{ij} = \sum \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_j} \eta_{ij} +$$

$$+ \sum \frac{\partial P}{\partial x_i} \eta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_j} \eta_{jl} R_{kl}(x, \lambda)$$

Wystarczy więc rozwiązać

$$\eta_{ij} + \sum \eta_{ik}\, \eta_{jl}\, R_{kl}(x, \lambda) = \psi_{ij},$$

a istnienie rozwiązań wynika z TFU.