Analiza II* 13 I '12

Funkcje mierzalne

$(X, \mathfrak{M})$ — X przestrzeń, $\mathfrak{M}$ σ-ciało podzbiorów X

$X \xrightarrow{f} Y$ przestrz. topologiczna

jest mierzalna $\overset{}{\underset{df}{\iff}}$ $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$ $\forall U \subset Y$ otw.

$\iff f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ $\forall B$ borelowskiego w Y

- Obcięcie funkcji mierzalnej do mierzalnego podzbioru jest funkcją mierzalną;
- jeśli $\bigcup A_i \xrightarrow{f} Y$, $f|_{A_i}$ jest mierzalna $\forall i$, $A_i \in \mathfrak{M}$

to f jest mierzalna.
- jeśli $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f mierzalne, g ciągłe, to $g \circ f$ jest mierzalne (Y, Z = przestrz. topol.)

Najważniejszy przypadek: $Y = \overline{\mathbb{R}}$.

- f jest ~~borelo~~ mierzalna $\iff f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathfrak{M}$ $\forall a$

[i analogicznie dla półprostych postaci $[-\infty, a]$, $(a, \infty]$, $[a, \infty]$].
~~$[-\infty, a]$, $[-\infty, a)$, $[a, \infty]$, $(a, \infty]$~~

D. $\Rightarrow$ ☺

$\Leftarrow$ ponieważ każdy zb. otwarty w $\overline{\mathbb{R}}$ jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych (a, b) i (a, ∞), więc wystarczy wykazać, że $f^{-1}((a,b)) \in \mathfrak{M}$, $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}$ i $f^{-1}(\infty) \in \mathfrak{M}$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathfrak{M}$

i $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$

$$(a,\infty) = \bigcap_n \left[a-\tfrac{1}{n},\infty\right) = \bigcap_n \left(\overline{\mathbb{R}} \setminus \left(-\infty, a-\tfrac{1}{n}\right)\right)$$

2

$(a,b) = (-\infty, b) \cap (a,\infty)$, itd

- $X \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^m$ jest mierzalne $\Leftrightarrow$ wszystkie składowe f są mierzalne

  (wystarczy wykazać mierzalność przeciwobrazu każdego przedziału, którego wierzchołki mają współrzędne wymierne

- suma i iloczyn funkcji mierzalnych (tam, gdzie określone) jest f. mierzalną.

  [$f+g$ jest nieokreślona tam, gdzie $f=\infty$ i $g=-\infty$ albo naodwrót; jest to zbiór mierzalny; po wyrzuceniu go można skorzystać z ciągłości dodawania $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}} \setminus$ (zb. punktów nieokreśloności) $\to \overline{\mathbb{R}}$.

  Podobnie dla mnożenia; albo można łatwo udowodnić, że dla f mierzalnej f^2 jest mierzalna (ciągłość $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto x^2$)

  i skorzystać z tego, że $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$]

Kresy (górny i dolny) w $\overline{\mathbb{R}}$ - oczywista definicja;
każdy zbiór niepusty ma sup i inf.

Jeśli $f_i : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($i \in I$ - dowolny), to określona jest więc $\sup_i f_i(x) = F(x)$, i $\inf_i f_i(x) = G(x)$.

- jeśli I jest przeliczalny, $A \in \mathfrak{M}$, wszystkie f_i są mierzalne, to $\sup_i f_i$, $\inf_i f_i$ są mierzalne

[bo niech $F = \sup_i f_i$; dla dowolnej $a \in \mathbb{R}$

$$\{x : F(x) \leq a\} = \{x : \forall_i \quad f_i(x) \leq a\}$$
$$= \bigcap_i \{x : f_i(x) \leq a\} \ ].$$

- jeśli $f_n : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne ($A \in \mathfrak{M}$), $f_n \longrightarrow f$ punktowo, to f jest mierzalna.

[bo dla ciągu $a_n \longrightarrow g$ $\quad a_n, g \in \overline{\mathbb{R}}$
i dowolnej c:

$$g < c \iff \forall k \ \exists N \ \forall n > N \quad a_n < c + \frac{1}{k};$$

zatem, dla dowolnej c:

$$\{x : f(x) < c\} \subseteq \{x : \forall k \ \exists N \ \forall n > N \quad f_n(x) < c + \tfrac{1}{k}\} =$$
$$= \bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n>N} \underbrace{\{x : f_n(x) < c + \tfrac{1}{k}\}}_{\in \mathfrak{M}}$$

__Funkcje proste__: funkcje o wartościach skończonych, nieujemnych, przyjmujące tylko skończenie wiele wartości. Każda taka funkcja jest postaci $\sum c_j \chi_{A_j}$ (χ_A = f. charakterystyczna A), $c_j \geq 0$, skończone; takie przedstawienie nie jest jednoznaczne, ale jeśli dodać założenie, że wszystkie c_j są różne, dodatnie, i A_j są rozłączne, to przedstawienie jest jednoznaczne.

– jeśli $A \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^+$, to $\exists$ ciąg funkcji prostych $A \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}^+$, niemalejący (tj $\forall x$ $f_n(x) \nearrow$), zbieżny punktowo do f.

Jeśli f jest ograniczona, to dodatkowo można uzyskać, że $\cancel{|f - f_n|}$ $0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2^n}$. Jeśli f jest mierzalna, to f_n można wybrać mierzalne.

D.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{gdy } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \\ & k \leq n \cdot 2^n \\ n & \text{gdy } f(x) \geq n \end{cases}$$

__Całka z funkcji nieujemnej__ $A \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}^+$.

Rozbicie $\varsigma = \{E_1, \dots, E_m\}$ zbioru A (niekoniecznie